EGY ALGORITMUS A HÁROMSZOROSAN ÖSSZEFÜGGŐ SÍKBELI GRÁFOK ELŐÁLLÍTÁSÁRA

SZILASSI LAJOS—SOÓS GÁBOR

Jacob Steiner vetette fel először 1832-ben a következő problémát: Ismeretes, hogy a topológiailag különböző konvex poliéderek között egy 4 lapú, kettő 5 lapú és hét 6 lapú van. Vajon hány 7, 8, 9, ... lapú (topológiailag különböző) konvex poliéder létezik?

A század elejére sikerült megadni a helyes választ 7 és 8 lapú poliéderekre. Az akkori kutatások tartalmaztak bizonyos — nem is mindenütt pontos — részeredményeket a 9 és 10 lapú poliéderekre is, azonban az összes eset leírására — magas számuk miatt — nem kerülhetett sor. A számítógépek elterjedésével új lendületet vettek az ilyen irányú kutatások azzal, hogy számítógépre alkalmazható algoritmusok készültek a magasabb lap- és csúcsszámú poliéderek előállítására. Így sikerült meghatározni a 9 és 10 lapú poliéderek pontos számát, egyúttal megadni a 11 és 12 lapúak egy részét is. Azonban — mint látni fogjuk — az előállítandó esetek igen magas száma miatt a számítógép alkalmazásával is hasonló akadályba ütközünk, mint a század elején — kisebb lapszámra — a „kézi" módszerrel. Így legfeljebb arra törekedhetünk, hogy a magasabb lap- és csúcsszámú poliédereknek egy-egy szűkebb osztályát állítsuk elő.

Ebben a dolgozatban ismertetjük a fent vázolt eredményeket, majd bemutatunk egy algoritmust, amely alkalmas — szükség esetén 10-nél nagyobb lap- és csúcsszámú — poliéderek egy-egy szűkebb osztályának előállítására.

1. Mivel vizsgálódásunk szempontjából olyan poliédereket tekintünk különbözőknek, melyek topologikus transzformációval nem vihetők át egymásba, a konvex poliéderek helyett elegendő azok Schlegel-diagramjával [1 159. old.], azaz a nekik megfelelő absztrakt poliéderekkel foglalkozunk. Ez utóbbiak pedig lényegében a háromszorosan összefüggő síkbeli gráfok.

Egy gráfot *síkbelinek* (vagy hálónak) nevezünk, ha felrajzolható egy síkra (ezzel egyenértékű módon egy gömbre) úgy, hogy élei sehol se keresztezzék egymást. Egy gráf *háromszorosan összefüggő,* ha bármely két különböző csúcsa összeköthető legalább három olyan élekből álló úttal, melyeknek a végpontjaikon kívül nincs közös csúcsuk. Ugyanezt meg lehet határozni így is: A háromszorosan összefüggő síkbeli gráf bármely két csúcsát az oda befutó élekkel együtt eltávolítva összefüggő marad. A legalább négy csúcsú, egyszerű (azaz hurokélt és párhuzamos éleket nem tartalmazó) háromszorosan összefüggő síkbeli gráfok *absztrakt poliédert* alkotnak. Az absztrakt poliéder lapjai a sík (vagy gömb) felületnek a gráf élei által feldarabolt tartományai lesznek, csúcsai, ill. élei pedig a gráf csúcsai, ill. élei. Ha valamely él vagy csúcs egy lap határán van, vagy valamely csúcs egy él végpontja, akkor ezt a kapcsolatot a szokásos módon az „illeszkednek" kifejezéssel fogjuk jelölni. Az illeszkedési reláció szimmetrikus.

Bizonyíthatók az absztrakt poliéderek alábbi tulajdonságai:

1/a. Minden élre kettő és csak kettő csúcs illeszkedik;
1/b. Minden élre kettő és csak kettő lap illeszkedik;
2/a. Két csúcsra csak egy él illeszkedik;
2/b. Két lapra csak egy él illeszkedik;
3/a. Minden csúcsra legalább három lap illeszkedik;
3/b. Minden lapra legalább három csúcs illeszkedik;
4/a. Ha két lapnak van két közös csúcsa, akkor ezeknek a csúcsoknak van közös élük, és ez a két lap közös éle.
4/b. Ha két csúcsnak van két közös lapja, akkor ezeknek a lapoknak van közös élük, és ez a két csúcs közös éle.

Az 1/a.—4/b. tulajdonságok elegendők is ahhoz, hogy egy gráf háromszorosan összefüggő legyen.

Az absztakt poliéder minden lapjának egy-egy belső pontját kiválasztva, és ezek közül a szomszédos (közös éllel rendelkező) lapokon kiválasztott pontokat összekötve egy új gráfhoz jutunk, melyet az eredeti *duálisának* nevezünk. Az 1/a.—4/b. tulajdonságokból adódik, hogy ez a gráf is absztrakt poliéder. Egy absztrakt poliéder és a duálisa közötti (kölcsönösen egyértelmű) megfeleltetés során lapoknak csúcsok, éleknek élek, csúcsoknak lapok, illeszkedő elemeknek illeszkedő elemek felelnek meg. Igy egy absztrakt poliédert megadva, lényegében a duálisát is megadtuk.

Steinitz tétele [2] értelmében minden absztrakt poliéder realizálható konvex poliéder alakjában, azaz minden absztrakt poliéderhez létezik vele topológiailag ekvivalens konvex poliéder. Ha ugyanazt a konvex poliédert két absztrakt poliéder is előállítja, akkor ezeket az absztrakt poliédereket *izomorfoknak* nevezzük, és nem tekintjük őket különbözőknek. Az absztrakt poliéderek közötti izomorfia nyilvánvalóan ekvivalencia reláció. Ha egy absztrakt poliéder izomorf a duálisával, akkor *ön-duálisnak* nevezzük.

A konvex poliéderek élei, lapjai és csúcsai közötti legalapvetőbb összefüggések — melyeket gráfjaik konstruálására bármilyen utat választva is, feltétlenül ki kell használnunk — a következők:

(1) $$L+C=E+2, \quad \text{(Euler-tétele)}$$

ahol L a lapok, C a csúcsok, E az élek számát jelenti; a

(2) $$\sum_{k=3}^{L-1} k.C_k = \sum_{k=3}^{C-1} k.L_k = 2E$$

összefüggés, ahol C_k, ill. L_k azoknak a csúcsoknak, ill. lapoknak a számát jelöli, melyekre k él illeszkedik (azaz fokszámuk k). Természetesen

(3) $$\sum_{k=3}^{L-1} C_k = C, \quad \sum_{k=3}^{C-1} L_k = L$$

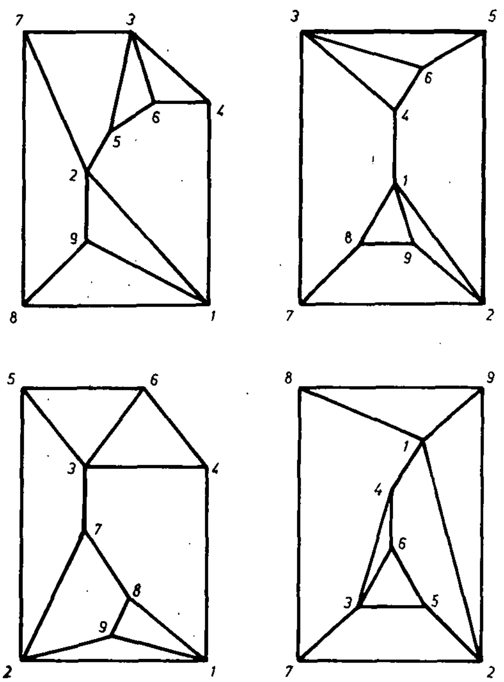
és $C_k \geqq 0$, $L_k \geqq 0$. A (2) összefüggés lényegében abból adódik, hogy összeszámoljuk az egyes csúcsokra, ill. lapokra illeszkedő éleket, miközben minden élt kétszer számolunk meg. Az (1), (2) és (3) összefüggésekből több, igen hasznos összefüggés levezethető, pl.

(4) $$\frac{L}{2}+2 \leqq C \leqq 2L-4,$$

amely behatárolja, hogy egy L lapú poliédernek legalább és legfeljebb hány csúcsa (és éle) lehet. Ezek az összefüggések adnak lehetőséget arra, hogy az azonos lapszámú polédereket különböző kisebb osztályokba soroljuk, és ezek számát külön-külön meghatározzuk.

A gráfok konstruálásánál nagy segítséget nyújt még az absztakt poliéderek 1/a.—4/b. tulajdonsága, valamint az ezekből adódó néhány további összefüggés, pl. az, hogy az egy csúcsra, ill. lapra illeszkedő élek ciklikus sorrendbe rendezhetők.

A poliédert előállítva nyilvánvalóan egyik lapnak sincs kitüntetett szerepe, viszont a gráfját megrajzolva egyik lap „körülveszi" az összes többit. Nevezzük ezt külső lapnak! Különböző lapokat külső lapnak véve, a legtöbbször alaposan megváltozik a gráf képe, ezért nehéz ránézésre felismerni, hogy két gráf izomorf-e. Pl. az 1. (és 2.) ábrán ugyanannak a poliédernek (a melléklet első poliéderének) a gráfját rajzoltuk le, különböző lapokat tekintve külső lapnak. Általában a legnagyobb fokszámú lapok egyikét szokás külső lapnak rajzolni.



1. ábra

2. Látható, hogy Steiner feladata két alapvető problémát vet fel: egyrészt azt, hogy vegyük figyelembe az összes szóba jöhető esetet, másrészt pedig, hogy ne tekintsünk különbözőnek izomorf gráfokat. Mindkét kérdés alaposabb vizsgálata határozottan túlmutat az eredeti probléma jelentőségén. Így nem véletlen, hogy a múlt században sok matematikus (többek között Legendre, Staudt, Cauchy, Möbius, Klein, őket megelőzően Euler, Descartes) foglalkozott a problémával, vagy hozzájárult a vizsgálatához szükséges összefüggések kidolgozásához [4].

A problémáról O. Hermes [3] készítette az első igen alapos, mai szemmel nézve hihetetlenül aprólékos, sok munkát feltételező monográfiát. Eredményei közül

1. Táblázat

Az eddig ismert konvex poliéderek száma

Lapok száma:	Csúcsok száma:													Összesen:	Önduális:
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
4	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
5	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1
6	—	1	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	7	2
7	—	—	2	8	11	8	5	—	—	—	—	—	—	34	6
8	—	—	2	11	42	74	76	38	14	—	—	—	—	257	16
9	—	—	—	8	74	*296*	*633*	*768*	*558*	219	50	—	—	*2 606*	50
10	—	—	—	5	76	*633*	*2635*	*6 134*	**8 822**	**7 916**	**4 442**	**1 404**	233	**32 300**	*165*
11	—	—	—	—	38	*768*	*6134*	**25 626**	**64 439**	**104 213**					**554**
12	—	—	—	—	14	*558*	**8822**	**64 439**	**268 393**						**1 907**
13	—	—	—	—	—	219	**7916**	**104 213**							
14	—	—	—	—	—	50	**4442**								
15	—	—	—	—	—	—	**1404**								
16	—	—	—	—	—	—	233								

a máig is helytállókat az 1. sz. táblázatban a normál betűtípussal szedett számok jelzik. Eszerint 1900-ban ismert volt az összes 7- és 8 lapú poliéder, és a 9 lapúak egy része is. Az 1. táblázat (amely a dualitás miatt nyilvánvalóan szimmetrikus a főátlójára) a máig ismert eredményeket tartalmazza. A táblázatból kitűnik, hogy a század elején igen nehéz lett volna az akkori eszközökkel megadni az összes, legfeljebb 9 lapú poliédert.

A táblázatban szereplő adatokon kívül Hermes megadta az összes, legfeljebb 12 lapú ún. egyszerű gráfot, melynek minden csúcsa 3 fokszámú. Szerinte 1250 db 11 lapú, és 7533 db 12 lapú ilyen gráf létezik. Ugyanezt az értéket Brückner [4] 7616-ra módosította. Jóval később, számítógép felhasználásával Bowen és Fisk 1249 db 11 lapú és 7595 db 12 lapú egyszerű gráfot talált [5]. Hermes (valamint Brückner is) aszerint osztotta az L lapú gráfokat kisebb alosztályokba, hogy hány olyan lapja van a gráfnak, amely a külső lappal nem szomszédos. Ez a vizsgálati módszer nyújtott lehetőséget arra is, hogy a gráfokat egymásból származtassa. 1968-ban E. J. Federico foglalta össze az addig ismert eredményeket [5], amelyben már számítógéppel kapott adatok is szerepelnek. Az általa közölt eredményeket a táblázat dőlt betűvel szedett számai jelzik.

Federico korrigálta a Hermes munkájában talált hibákat. Pl. Hermes 293 db 9 lapú és 9 csúcsú poliédert talált, de ezek között voltak izomorfak is. (Hermes szerint 51 ön-duális 9 lapú poliéder létezik.) A hibák felderítéséhez és a táblázat összeállításához Federico felhasználta Duijvestijn addig még nem publikált, számítógéppel kapott eredményeit. Ismertetett egy „kézi" módszert is, amelynek segítségével pl. az 50 db 9 lapú (14 csúcsú) gráfból könnyen elő lehet állítani az egyetlen 4 fokszámú csúcsot tartalmazó 9 lapú, 13 csúcsú eseteket. Ennek lényege, hogy össze kell húzni (élük hosszát 0-ra csökkentve) két olyan szomszédos (3 fokszámú) csúcsot, melyek közötti él mindkét partján 3-nál nagyobb fokszámú lap van. Ügyelve az izomorf esetek kiküszöbölésére, így a 9 lapú és 13 csúcsú poliéderek száma 219-nek adódott. Ugyanezt az eredményt kapta Duijvestijn is, más úton, számítógép segítségével.

Egy — számítógépre könnyen alkalmazható — eljárás, melyet A. J. W. Duijvestijn dolgozott ki, és sikerrel alkalmazott a legfeljebb 10 lapú poliéderek előállítására [6], Tutte tételén alapszik [7], amely a következőket mondja ki: Az összes n élű (háromszorosan összefüggő, síkbeli) gráf — az n élű gúla gráfját kivéve — előállítható az összes $(n-1)$ élű gráfból oly módon, hogy az $(n-1)$ élű gráfok mindegyikébe behúzunk egy új élt az összes lehetséges módon, majd az így kapott n élű gráfoknak képezzük a duálisait is.

Egy új él behúzásával lényegében az absztrakt poliéder valamelyik lapját osztottuk ketté egy átlóval, így a lapok számát is növeltük eggyel. Ily módon pl. a már említett 9 lapú, 13 csúcsú gráfok helyett előbb ezek duálisait kell előállítanunk — mivel 8 lapú és 13 csúcsú gráf nincs — az összes (558 db) 12 lapú és 9 csúcsú gráf átlóinak behúzásával. Természetesen több $(n-1)$ élű gráfból is előáll ugyanaz az n élű, így az előállított gráfok között igen sok izomorf lesz.

Duijvestijn egy igen praktikus jelölést vezetett be az „átló behúzás" műveletének számítástechnikai megvalósítására. Megszámozta a gráf csúcsait, és minden laphoz hozzárendelte a rá illeszkedő csúcsok számait a megfelelő ciklikus sorrendben. A könnyebb kezelhetőség érdekében a ciklus elsőnek leírt elemét a végén megismételte. Így pl. az 1. ábrán (többször is) lerajzolt gráf a következőképpen írható le: — 1 4 6 5 2 1—1 8 7 3 4 1—2 5 3 7 2—2 7 8 9 2—1 2 9 1—1 9 8 1—3 6 4 3—3 5 6 3 —. Ebből a jelsorozatból a gráfot lerajzolva a külső lapot ellentétes irányban kell számoznunk, mint a többit. Az „átló behúzás" művelete azt jelenti, hogy valamelyik lap jelét a megfelelő módon szét kell vágnunk. Pl. ha itt az első lap 1—6 átlóját akarjuk meghúzni, akkor az eredeti helyett — 1 4 6 1—1 6 5 2 1 — jellel kezdődik az új poliéder leírása.

Ennél a módszernél a problémát inkább az izomorf gráfok kiszűrése jelenti. Létezik ugyan több algoritmus is a síkbeli gráfok izomorfiájának az eldöntésére [8], [9], most azonban ezt igen sokszor kell alkalmazni.

Ezzel az eljárással Duijvestijn előállította az összes, legfeljebb 24 élű gráfot, így meg tudta adni az összes 10 lapú gráfot is [6]. Táblázatunkban ezeket az 1979-ben publikált eredményeket vastag betűvel jelöltük. (Duijvestijn megállapította az egyes gráfok automorfizmus csoportjainak a rendjét is.) Duijvestijn módszere nehezen alkalmazható 24-nél magasabb élszámú poliéderek meghatározására, mivel már legalább $4 \cdot 10^6$ adatot kellene egyszerre kezelnie a számítógépnek.

Az L lapú poliéderek számára vonatkozóan R. C. Mullin és P. J. Schellenberg adott egy becslést 1968-ban [10]. Eszerint a 10 lapú poliéderek számának 31 000 és 33 000 közé kell esnie. Duijvestijn 32 300-at állított elő. E becslés szerint a 11 lapú poliéderek száma legalább 425 000, a 12 lapúaké legalább 5 000 000. Így semmiképpen nem remélhető, hogy ezek mindegyikét elő tudjuk állítani, még számítógép segítségével sem.

3. Az itt vázolt eljárások mindegyikének az a lényege, hogy egy új gráfot egy már meglévő, nála valamilyen szempontból egyszerűbb gráfból állít elő. Ez a rekurzív út csak addig járható, amíg az előállítandó esetek száma nem túl nagy. Ugyancsak nehézkesen alkalmazható, ha csak egy bizonyos tulajdonságú (pl. ön-duális) poliédereket keresünk. Mivel meg kell elégednünk azzal, hogy a bonyolultabb (pl. a több, mint 24 élű) gráfoknak csak egy-egy szűkebb — további részfeltételeknek eleget tevő — osztályát kísérelhetjük meg előállítani, olyan algoritmust kellett keresnünk, amely egy új gráf konstruálása során nem valamelyik már meglevőből indul ki.

A háromszorosan összefüggő síkbeli gráfoknak egy kézenfekvő osztályozását kapjuk, ha egy osztályba soroljuk azokat a gráfokat, amelyeknek ugyanannyi 3, 4, ... fokszámú lapjuk van, és ugyanígy az egyező fokszámú csúcsok száma is rendre megegyezik. Pl. a 8 lapú és 9 csúcsú (így 15 élű) gráfok lapjainak, ill. csúcsainak fokszámok szerinti felosztását a 2. táblázat mutatja. Eszerint az ilyen gráfokat $9 \cdot 3 = 27$

2. Táblázat

$L=8$	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1.	6	0	1	0	1
2.	6	0	0	2	0
3.	5	2	0	0	1
4.	5	1	1	1	0
5.	5	0	3	0	0
6.	4	3	0	1	0
7.	4	2	2	0	0
8.	3	4	1	0	0
9.	2	5	0	0	0

$C=9$	C_3	C_4	C_5	C_6
1.	8	0	0	1
2.	7	1	1	0
3.	6	3	0	0

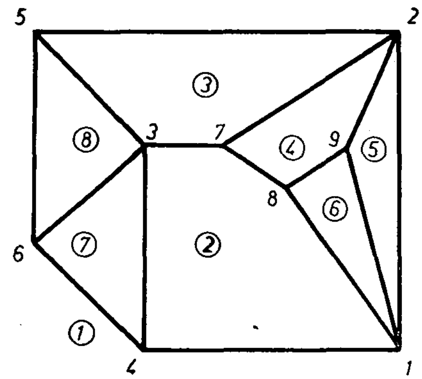
osztályba sorolhatjuk. Ilyen osztályozást bevezetve a 7 lapú poliédereket (ill. gráfjaikat) 40, a 8 lapúakat 144, a 9 lapúakat 404, a 10 lapúakat 1149 osztályba sorolhatjuk, így ugyanennyi kisebb részfeladattá bonthatjuk az eredeti feladatot. Ezeket az osztályokat lényegében az (1), (2) és (3) összefüggések alapján adhatjuk meg. A gráfoknak ezt az osztályozását végrehajtva az azonos osztályba tartozó poliéderek meghatározásához „bemenő adatként" kezelhetjük az osztályt megadó adatokat, tehát a 3, 4, ... fokszámú lapok, ill. csúcsok számát.

Duijvestijn jelöléséhez hasonlóan számozzuk meg a gráf csúcsait, valamint lapjait is. Minden ilyen módon megszámozott gráfhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy R-reláció-mátrixot, ahol $R(i, j) = 1$, ha az i sorszámú lap és a j sorszámú csúcs illeszkedik egymásra, különben 0. (A könnyebb áttekinthetőség kedvéért használjuk az „X" és „$\cdot$" jeleket az 1 és 0 számok helyett.)

R		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
		4	4	4	3	3	3	3	3	3
1.	5	X	X	·	X	X	X	·	·	·
2.	5	X	·	X	X	·	·	X	X	·
3.	4	·	X	X	·	X	·	X	·	·
4.	4	·	X	·	·	·	·	X	X	X
5.	3	X	X	·	·	·	·	·	·	X
6.	3	X	·	·	·	·	·	·	X	X
7.	3	·	·	X	X	·	X	·	·	·
8.	3	·	·	X	·	X	X	·	·	·

L		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
		5	5	4	4	3	3	3	3
1.	5	—	2	2	1	2	1	2	2
2.	5	2	—	2	2	1	2	2	1
3.	4	2	2	—	2	1	0	1	2
4.	4	1	2	2	—	2	2	0	0
5.	3	2	1	1	2	—	2	0	0
6.	3	1	2	0	2	2	—	0	0
7.	3	2	2	1	0	0	0	—	2
8.	3	2	1	2	0	0	0	2	—

C		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
		4	4	4	3	3	3	3	3	3
1.	4	—	2	1	2	1	1	1	2	2
2.	4	2	—	1	1	2	1	2	1	2
3.	4	1	1	—	2	2	2	2	1	0
4.	3	2	1	2	—	1	2	1	1	0
5.	3	1	2	2	1	—	2	1	0	0
6.	3	1	1	2	2	2	—	0	0	0
7.	3	1	2	2	1	1	0	—	2	1
8.	3	2	1	1	1	0	0	2	—	2
9.	3	2	2	0	0	0	0	1	2	—



2. ábra

A 2. ábrán a melléklet első poliéderének gráfját (melyet már az 1. ábrán is bemutattunk), és a neki megfelelő egyik lehetséges (a megadott számozáshoz tartozó) R mátrixot ábrázoltuk. A mátrix egy-egy sora egy-egy lapot, egy-egy oszlopa pedig egy-egy csúcsot reprezentál. A sor ill. oszlop sorszáma mellé odaírtuk a lap, ill. csúcs fokszámát is. Az előállítandó gráf helyett az őt reprezentáló R mátrixot fogjuk előállítani. Mielőtt tovább mennénk, először vizsgáljuk meg az R mátrix néhány tulajdonságát!

Minden sorban és oszlopban a fokszámnak megfelelő számú „X" jel van. A gráf egy absztrakt poliéder gráfja, így a 2/a. és 2/b. tulajdonságok miatt az R mátrix bármely két sorában legfeljebb két helyen lehet egymás alatt „X„ jel, és ugyanez 1/a. és 1/b. miatt érvényes az oszlopokra is. Abból a kapcsolatból, hogy valamely két sornak 0, 1 vagy 2 egymás alatti „X" jele van, készíthetünk egy újabb L mátrixot, hasonlóan az oszlopok — tehát a csúcsok — közötti kapcsolatok leírására egy C mátrixot is, amely azt mutatja, hogy valamely két lapnak hány közös csúcsa, (ill. a csúcsnak hány közös lapja) van. Mivel a gráf minden élére pontosan két csúcs és két lap illeszkedik, az R mátrixban minden élhez tartozik egy téglalap, amelynek mind a négy csúcsában egy „X" jel van. Minden téglalapnak egyúttal megfelel két-két 2 értékű elem az L és C mátrixban is. A — nyilvánvalóan szimmetrikus — L és C mátrixok minden sorában és oszlopában az illető sorhoz tartozó fokszámmal megegyező számú kettesnek kell lennie. Ha az L és C mátrixban csak azokat az elemeket tekintjük különbözőknek, melyek értéke 2, ill. nem 2, akkor a C mátrixot nevezhetjük a gráf *adjacenciamátrixának* ([11], 73. old.), amely önmagában is egyértelműen megadja a gráfot. Az ugyanígy módosított L mátrix a gráf duálisának az adjacenciamátrixa.

Nyilvánvaló, hogy az R mátrix bármely két sorát, vagy oszlopát felcserélve ugyanazt a gráfot írja le, csak a sorszámozás változik. Így szorítkozhatunk arra, hogy a fokszámok csökkenő sorrendjében számozzuk a sorokat és oszlopokat. Két gráf pontosan akkor izomorf, ha ugyanaz az R mátrix tartozik mindkettőhöz, vagy a két mátrix egyikét alkalmas sor- és oszlopcserékkel átalakíthatjuk a másikká. (Meg lehetne vizsgálni, hogy egy mátrixon sor- és oszlopcseréket végrehajtva átvihető-e önmagába. Így a gráf automorfizmus csoportjának a rendjét állapíthatnánk meg, de ezzel a kérdéssel most nem foglalkozunk.) A gráf síkbeli voltából következik még az is, hogy az egy lapra, ill. csúcsra illeszkedő élek ciklikus sorrendbe rendezhetők. Ezekből a mátrixokból leolvasható, hogy teljesül-e ez a feltétel is, ezzel később fogunk foglalkozni.

A feladatunk lényegében abból áll, hogy — a megfelelő osztályt reprezentáló adatok előállítása után — írjuk le az összes olyan mátrixot, amely a fenti feltételeknek eleget tesz, majd állapítsuk meg, hogy e mátrixok által meghatározott gráfok közül melyek izomorfak egymással.

A megfelelő feltételeknek eleget tevő mátrixok megkeresésére az ún. „backtrack" (visszalépő) módszert választottuk. Rendre (sorfolytonosan) leraktuk az „X" jelet az R mátrixba (közben jegyezve a megfelelő jeleket az L és C mátrixokban is) mindaddig, míg a következő jel lerakása a feltételekből adódó akadályba nem ütközött. Ha ez bekövetkezett, akkor az előtte levő jelet áthelyeztük a következő megfelelő helyre. Amennyiben ilyen nem volt, akkor visszatértünk az ezt megelőzőre, és így tovább. Közben természetesen az új helyzetnek megfelelően az L és C mátrixok állapotát is a pillanatnyi helyzetnek megfelelően változtattuk. Ha az összes „X" jelet le tudtuk tenni úgy, hogy az összes feltétel teljesült, akkor ezzel létrehoztuk az adott osztályba tartozó gráfok egyikének R mátrixát. Ezután az utolsó jelet eggyel tovább téve folytattuk az eljárást mindaddig, míg az R mátrix (és vele együtt L és C is) a visszalépések miatt ki nem ürült.

A gyakorlati megvalósítás során három szempontot vettünk figyelembe:

1. Vizsgálja a program az összes szóbajöhető esetet, tehát ne maradjon ki egyetlen létező gráf sem.
2. Lehetőleg ne állítsunk elő izomorf gráfokat.
3. Mielőbb „vegye észre" a gép, hogy olyan úton jár, amely nem fejezhető be, ezzel növelje a keresés sebességét.

A 2. és 3. szempontot szolgáló feltételrendszer kidolgozása jelentősen megnövelte a program terjedelmét, egy-egy „X" jel lerakásának az idejét, ugyanakkor ez segítette elő, hogy a program minél több zsákutcát kerüljön ki. (A backtrack módszert alkalmazva általában érvényes, hogy a feltételeket alaposabb vizsgálatnak alávetve megnő egy-egy lépés ideje, de csökken a lépések száma. Így nehéz megtalálni az optimális futási idejű algoritmusokat.) A 2. feltételt szem előtt tartva sikerült elérni, hogy a program ne állítson elő két olyan mátrixot, amely kizárólag sor-, vagy oszlopcserével egymásba átvihető.

Ha valamelyik „X" jelet az R mátrixban tovább kellett tenni, akkor azt nem a sor következő helyére próbáltuk letenni, hanem az első olyan helyre, amelyben a régi hely oszlopának a felette levő része (beleértve a fokszámot jelző részt is) különbözik az új helytől. Az itt bemutatott mátrixban például ha a 2. sor 1. helyén levő jel továbbhelyezésére kerül sor, akkor ezt azonnal a 3. helyre próbáljuk meg letenni. Ugyanígy az 1. sor 6. helyén álló X jel továbbtevésére már nincs lehetőség. Ezt alkalmazva két oszlop nem lesz felcserélhető. Ugyanígy, ha egy sor fokszáma megegyezett a felette levővel, akkor a program abban az oszlopban kezdte lerakni az „X" jeleket, ahol a felette levőben. Példánkban a 8. sor első „X" jele nem kerülhetett az 1. vagy 2. helyre. Így valamely két sor felcserélésével sem juthatunk egy előzőleg előállított mátrixhoz. Ugyancsak a nem megfelelő utak mielőbbi kiszűrését segítette pl. az a vizsgálat, amely számon tartotta, hogy valamely sorban és oszlopban van-e még annyi potenciálisan szabad hely, amennyi jelet még le kell tennünk. Ha példánkban tovább kellene tenni az 5. sor 1. jelét, akkor az előzőek miatt már nem lenne mód arra, hogy az 1. oszlopba letegyük 4 jelet. Így ekkor még hátrább kell nenni, egészen a 4. sor 1. jeléig.

A fenti vizsgálatok gyakorlati kivitelezéséhez szükség volt még két mátrixra, melyekben jegyeztük az R mátrix egy sorában, ill. oszlopában levő jelek helyét. Ezek segítségével könnyen meg lehetett találni a már letett jeleket.

Az eddig vizsgált feltételek nem biztosították, hogy a kapott mátrix síkbeli gráfot írjon le. Mivel a keresett gráf síkbeli, az egy lapra illeszkedő csúcsok (ill. az egy csúcsra illeszkedő lapok) elrendezhetők egy ciklikus sorrendbe úgy, hogy a szomszédos — azaz közös éllel rendelkező csúcsok (ill. lapok) egymás után következzenek.

Az R mátrix konstruálása közben nyomon lehetett követni, hogy egy új jel letevésével hány új él keletkezett egy-egy lapon, ill. egy-egy csúcson. Ha pl. az L mátrix valamely sorában egy „X" jel letevésének hatására 2-vel növekedett a 2 értékű elemek száma, akkor ez azt jelentette, hogy az illető lapra utoljára illesztett csúcs egyszerre szomszédos lett a lap másik két csúcsával. Ilyenkor meg kellett vizsgálni, hogy a kérdéses lapra illeszkedő élek — ha számuk kevesebb a lap fokszámánál — nem alkotnak-e zárt töröttvonalat, mert ha igen, akkor a letett „X" jel nem jó helyre került. Ugyanezt a vizsgálatot a C mátrixra is ugyanígy el kellett végezni.

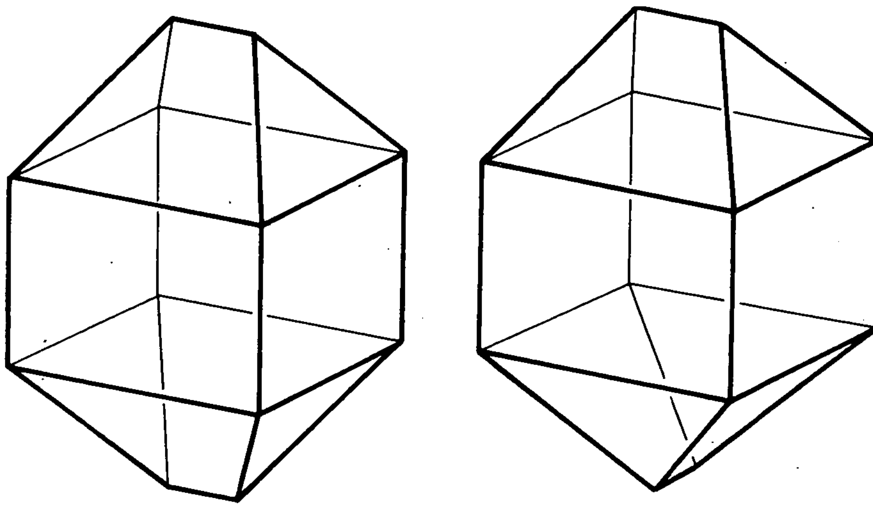
Ezt a „ciklus-vizsgáló" szubrutint, amely a szomszédosakat egymás mellé téve rendezte az egy adott lapra, ill. csúcsra illeszkedő éleket, jól lehetett alkalmazni arra is, hogy a kész megoldást áttekinthető formában írassuk ki. Pl. az itt bemutatott mátrixnak megfelelő gráfot a program így írta ki:

1. lap: 1—4—6—5—2—1	1. csúcs: 1—2—6—5—1
2. lap: 1—8—7—3—4—1	2. csúcs: 1—3—4—5—1
3. lap: 2—5—3—7—2	3. csúcs: 2—3—8—7—2
4. lap: 2—7—8—9—2	4. csúcs: 1—7—2—1
5. lap: 1—2—9—1	5. csúcs: 1—8—3—1
6. lap: 1—9—8—1	6. csúcs: 1—7—8—1
7. lap: 3—6—4—3	7. csúcs: 2—4—3—2
8. lap: 3—5—6—3	8. csúcs: 2—6—4—2
	9. csúcs: 4—6—5—4

Ebben a kiíratási formában lényegében megadtuk a gráf duálisát is, csak a „lap" és „csúcs" szavakat kell felcserélnünk.

A fenti eljárással nem sikerült elérni, hogy különböző mátrixok mindig különböző gráfokat reprezentáljanak. Ezért szükségessé vált egy olyan programrészlet elkészítése, amely eldönti, hogy valamely két, megoldásként talált mátrix ugyanazt a gráfot írja-e le. Ha két gráf izomorf, akkor a nekik megfelelő mátrixok egyikén alkalmas sor- és oszlopcseréket végrehajtva elő tudjuk állítani a másik mátrixot. Ha ez — az összes lehetséges permutációt kipróbálva — nem sikerül, akkor a két gráf különböző. A már megtalált nem izomorf gráfok mátrixát a számítógép háttérmemóriájában (mágnesszalagon) tároltuk, és minden újonnan kapott megoldást ebből a szempontból összehasonlítottunk az összes addig kapott esettel. Ez kétség kívül hosszadalmas eljárás — mint minden izomorfiát eldöntő program — azonban nem kell túl gyakran alkalmazni. Pl. a mellékletben közölt egy osztályba tartozó 18 különböző poléder helyett a program az izomorfakkal együtt 35 megoldást talált.

Két gráf közötti izomorfia kizárására kínálkozik egy egyszerűbb módszer is. Jellemezzünk minden csúcsot a csúcsba befutó (ciklikus sorrendbe rakott) lapok fokszámával. Pl. a 2. ábra 1. csúcsát jellemeznék az (5—5—3—3), a 2. csúcsot az (5—4—4—3) számok. Ugyanezt a lapokra is felírhatnánk. Ha legalább egy csúcsnak (ill. lapnak) nem találnánk a másik gráfon az ugyanígy jellemzett megfelelőjét, akkor a két gráf biztosan nem izomorf. Ez az eljárás azonban nem bizonyítja a két gráf izomorf voltát. Pl. a 3. ábrán bemutatott két poliéder nem izomorf, de ez ezzel a módszerrel nem dönthető el. (Felvethető a kérdés, hogy az itt bemutatott 12 lapú ellenpéldánál van-e egyszerűbb, tehát kevesebb lapú.) A 3. ábra példa arra is, hogy egy poliéder nem feltétlenül ön-duális, ha az azonos fokszámú lapjainak és csúcsainak a száma megegyezik. A duális poliéderek felrajzolását az olvasóra bízzuk.



3. ábra

Az itt vázolt algoritmust a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola WANG 2200/C típusú, 16 K kapacitású, BASIC programozási nyelven programozható kisszámítógépen valósítottuk meg. A számítógép interaktív üzemmódja lehetővé teszi, hogy a program segítségével „beállítsuk" a gép által készített osztályok közül a keresettet, és ezen belül megkeressük az osztályba tartozó összes gráfot. Lehetőség van arra is, hogy az R mátrixot is valamilyen feltételnek elegettevő állapotra állítsuk be, vagy menetközben ugorjunk át megvizsgálandó eseteket. Erre akkor lehet szükség, ha az osztályba tartozó gráfoknak csak egy még szűkebb részhalmazát keressük. (A számítógép képernyőjén állandóan nyomon követhetjük az R mátrix pillanatnyi állapotát.)

A program sebességét mérhetjük pl. a lépések számával, ahol egy lépésnek egy „X" jel letevését tekinthetjük. Ez a lépésszám osztályonként igen nagy eltérést mutat. Meg lehetne vizsgálni, hogy a lépésszám — így a program sebessége — hogyan függ a lapok, ill. csúcsok fokszámok szerinti eloszlásától, a fokszámoknak a sorok és oszlopok szerinti csökkenő, vagy növekvő elrendezésétől. Ugyancsak nyitott kérdés, hogy újabb feltételek megfogalmazásával sikerül-e lényegesen növelni az algoritmus sebességét, vagy azt elérni, hogy egyáltalán ne állítsunk elő izomorf gráfokat adó mátrixokat.

Nem kevésbé érdekes a program alkalmazásával kapott eredmények vizsgálata. Pl. vannak olyan osztályok, amelyekbe egyetlen poliéder sem tartozik, bár ezt elemi úton igazolni nem könnyű feladat. Ilyen pl. az

$$L_3 = 3, \quad L_4 = 4, \quad L_5 = 1; \qquad C_3 = 8, \quad C_6 = 1$$

adatokkal megadott osztály. Egy poliéder tartozik az

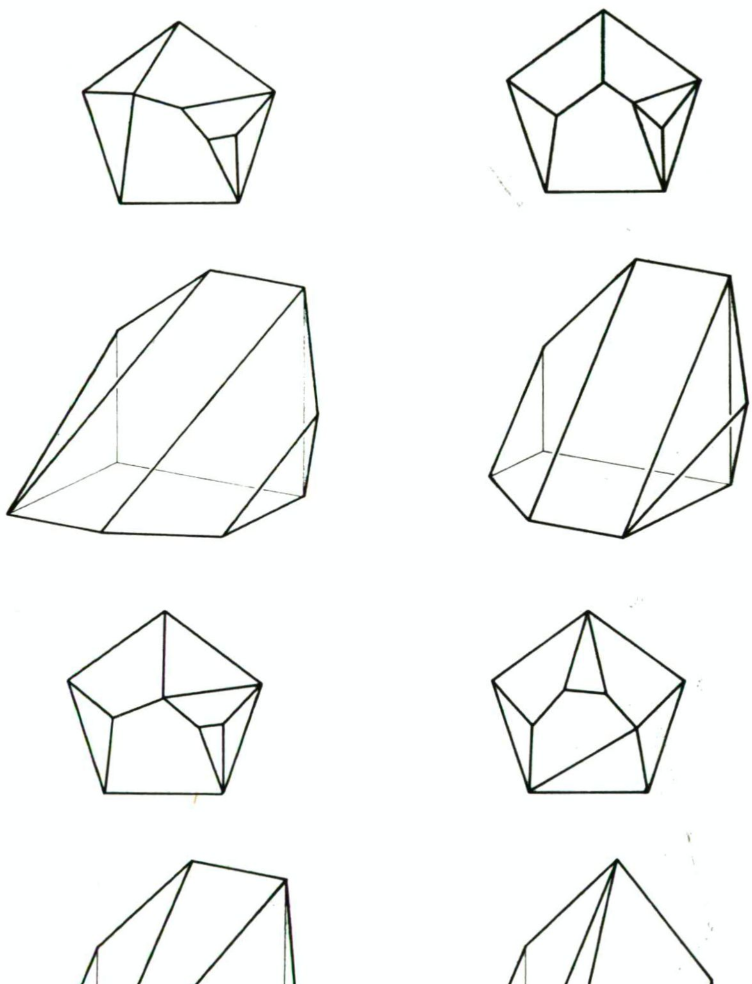
$$L_3 = 4, \quad L_4 = 2, \quad L_5 = 2; \qquad C_3 = 8, \quad C_6 = 1$$

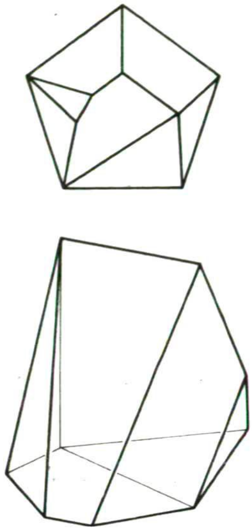
adatokkal jellemezhető osztályba, amelyet az algoritmus igen gyorsan megtalált. Megkeresését az olvasóra bízzuk. A 8 lapú poliéderek legnépesebb, 18 nem izomorf poliédert tartalmazó osztálya a már említett

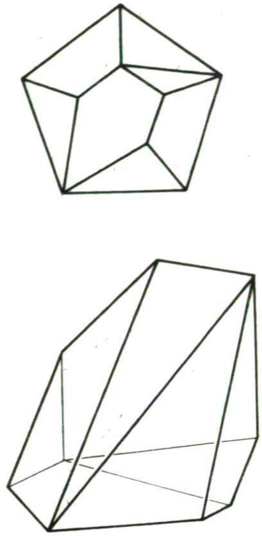
$$L_3 = 4, \quad L_4 = 2, \quad L_5 = 2; \qquad C_3 = 6, \quad C_4 = 3$$

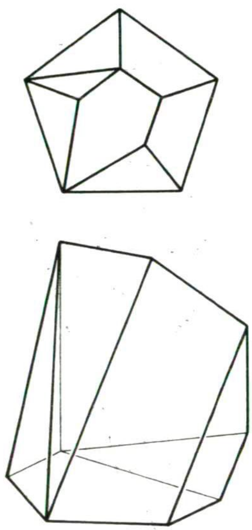
osztály. Mellékletként bemutatjuk ezt a 18 absztrakt, valamint a nekik megfelelő egy-egy konvex poliédert abban sorrendben, ahogy az algoritmus előállította.

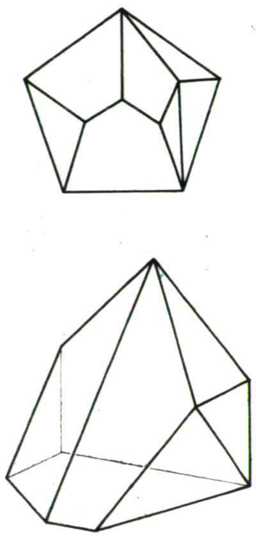
MELLÉKLET

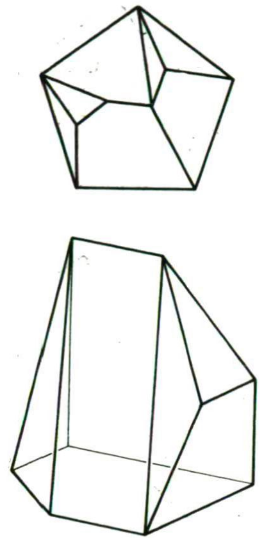


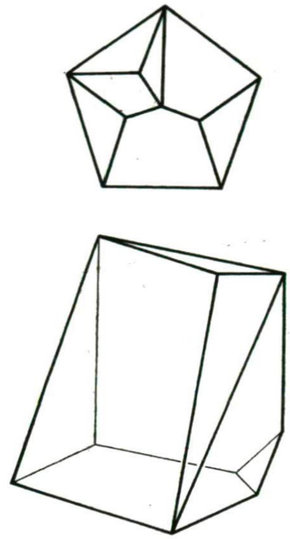


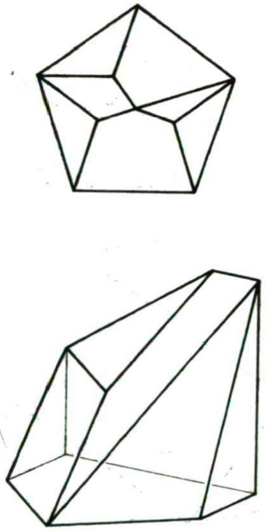


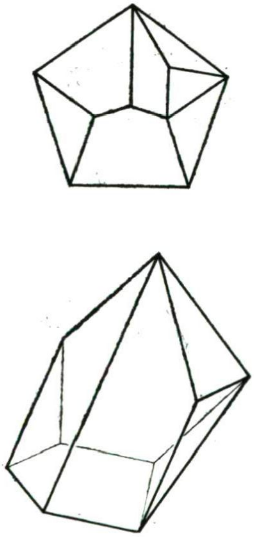


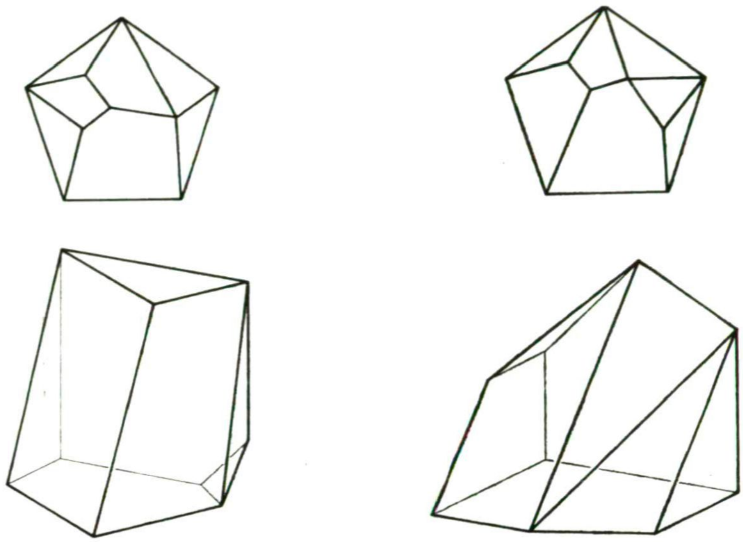


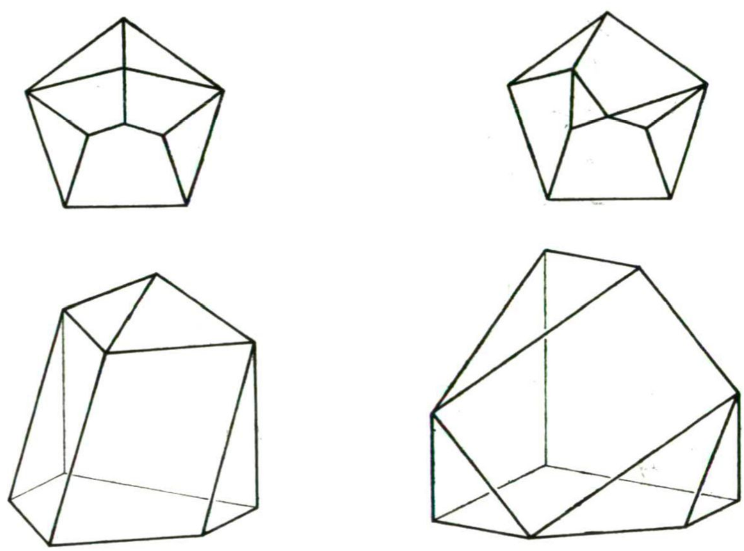


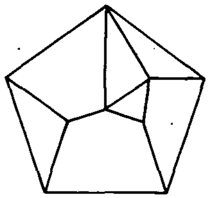


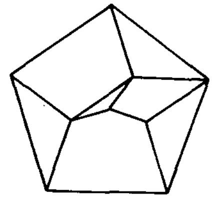


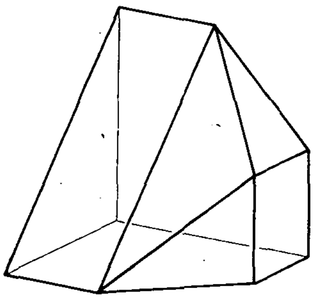


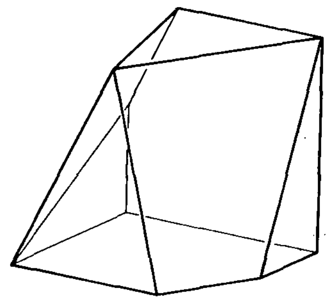












IRODALOM

[1] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Kiadó, Bp., 1973.

[2] E. Steinitz—H. Rademacher: Vorlesungen .über die Theorie der Polieder, Reprint Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York, (1976);

[3] O. Hermes: Die Formen der Vielflache, Journal Reine Angew. Math.
120. köt. (1899) 27—59. old.
120. köt. (1899) 305—353. old.
122. köt. (1900) 124—154. old.
123. köt. (1901) 312—342. old.

[4] M. Brückner: Vielecke und Vielflache, Leipzig, 1900;

[5] P. J. Federico: Numeration of Polyhedra: The Number of 9-Hedra, Journal of Combinatorial Theory 7, (1969) (155—161. old.);

[6] A. J. Duijvestijn: Tables of 3-Connected Planar Graphs, Memorandum 270, Twente University of Technology, Enschede, The Netherlands, 1979;

[7] W. T. Tutte: A Theory of 3-Connented Graphs Nedel. Akad. Wetensch., Proc. Ser. A 64, 1961., 441—455. old;

[8] A. J. W. Duijvestijn: Algorithmic calculation of the order of the automorphism group of a graph, Memorandum 221, Twente University of Technology, Enschende, The Netherlands (1978);

[9] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan: Isomorphism of Planar Graphs Complexity of Computer Computations, Cornell Univesity, Ithaca, New York;

[10] R. C. Mullin and P. J. Schellenberg: The enumeration of c-nets via quadrangulations, Journal of Combinatorial Theory 4, (1968), (259—276. old.);

[11] I. Nivergelt—J. C. Farrar—E. M. Reingold: Matematikai problémák megoldásainak számítógépes módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1977.

EIN ALGORHYTMUS ZUR HERSTELLUNG DER DREIFACH ZUSAMMENHÄNGENDEN PLANAREN GRAPHEN

LAJOS SZILASSI—GÁBOR SOÓS

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Herstellung von die konvexen Polyeder repräsentierenden, dreifach zusammenhängenden planaren Graphen.

Die zur Herstellung solcher Graphen bisher benutzten Algorhythmen sind sämtlich rekursiv, d.h. ein neuer Graph wird aus einem schon vorhandenen Graphen abgeleitet.

Tabelle 1 gibt die Zahl der bisher bekannten dreifach zusammenhängenden planaren, nicht isomorphen Graphe, nach der Anzahl der Flächen und Spitzen klassifiziert, bei Unterscheidung der 1900, 1968 und 1979 bekanntgewordenen Ergebnisse an. Hieraus erhellt, dass der rekursive Weg zur Herstellung von weiteren Graphen (mit mehr als 24 Kanten) — wegen der grossen Zahl der Fälle — praktisch nicht brauchbar ist, und zwar auch bei Benutzung eines Rechners nicht.

In der Arbeit wird ein nicht rekursiver, auf Rechenautomaten angewandter Algorithmus vorgestellt, welcher zur Herstellung einzelner engerer Klassen solcher Graphe geeignet ist. In der Beilage wird eine solche Klasse vorgestellt.

АЛГОРИТМ, СЛУЖАЩИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ТРЁХКРАТНО СВЯЗАННЫХ КОМПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

ЛАЙОШ СИЛАШИ—ГАБОР ШОШ

В работе даётся описание создание трёхкратно связанных компланарных графов, репрезентирующих выпуклых полиэдров.

Каждый из алгоритмов, применяемых до сих пор для создания таких графов, является рекурсивным, т. е. новый граф производится от уже существующего графа.

На таблице №1 изображается число уже известных до сих пор трёхкратно связанных компланарных неизморфных графов, классифицируя их по числу граней и вершин, и различая результаты, достигнутые в 1900-ом, 1968-ом и 1979-ом годах. Стало очевидным, что рекурсивный способ создания дальнейших (имеющих больше 24 граней) графов, -из-за большого количества возможных случаев, — неприемлем, даже с использованием счётно-вычислительных машин.

В настоящей работе нами описывается не рекурсивный, применяемый для счётно-вычислительных машин алгоритм, который приемлем для создания определённого более узкого класса таких графов. В приложении изображено именно такой класс графов.