MÉRHETŐ FÜGGVÉNYEK TERÉNEK EGY NEVEZETES PROJEKCIÓJÁRÓL

SZEDERKÉNYI ANTAL

Legyen $(X, \sum, \mu)$ mértéktér és S mértéktartó $T:X\to X$ transzformációk egy adott félcsoportja. ARIBAUD bebizonyította, hogy ha $\mu(X)<\infty$, akkor $L^1(\mu)$-nek létezik egy P pozitív, kontraktív projekciója úgy, hogy valahányszor $f\in L^1(\mu)$, mindannyiszor $Pf\in C_1(f)$, ahol $C_1(f)$ az $\{f\circ T|T\in S\}$ halmaz $C(f)$ konvex burkának $L^1(\mu)$-beli lezártja.

N. DINCULEANU ([1]) ezt az eredményt általánosította, és bebizonyította, hogy P akkor is létezik, ha (1) $\mu(X)=\infty (p\neq 1)$, (2) $L^1(\mu)$ helyett $L^p(\mu)$-t vesszük, ahol $1\leqq \leqq p<\infty$, továbbá (3) skalárértékű függvények helyett tetszőleges Banach-térbeli értékeket felvevő függvényeket tekintünk.

Ebben a dolgozatban L. ALAOGLU, G. BIRKHOFF eredményeinek felhasználásával ([2]) bebizonyítunk egy tételt, amely (részben) magában foglalja az említett általánosításokat. A bizonyítás több segédtétel bizonyításán keresztül történik. Először említsünk meg néhány szükséges fogalmat, amelyet a továbbiakban felhasználunk.

Ha F Banach-tér és G F-beli transzformációk egy félcsoportja, akkor egy α *indexen* értjük a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\geqq 0)$ és $T_1, \ldots, T_n$ rendszert, ahol $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k=1$ és $T_1, \ldots, \ldots, T_n\in G$; továbbá, az $f(\in F)$ f^α *követőjén* értjük az $f^\alpha:=\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\cdot T_k f$ elemet.

Az indexek halmazát I-vel jelölve értelmezzük a következő, tranzitív relációt:

$$f\leqq g \Leftrightarrow \exists\alpha\in I(g=f^\alpha) \quad (f, g\in F).$$

Ez a reláció tranzitív, hiszen ha $f\leqq g$, $g\leqq h$ $(f, g, h\in F)$, akkor bizonyos α, illetve β indexre $g=f^\alpha$, illetve $h=g^\beta$. Ebből következik, hogy $h=(f^\alpha)^\beta$ és így $f\leqq h$ (Vö. [2], 6. §.). Így az f^α tagoknak értelmeztük egy $Vf=\{f^\alpha\}_{\alpha\in I}$ *általánosított sorozatát.*

Erre vonatkozik a következő fontos definíció:

Definíció. Azt mondjuk, hogy a Vf általánosított sorozat konvergál a g limeszhez,
BIRKHOFF—ALAOGLU értelmében, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz és bármely α indexhez van olyan β index, hogy $f^\alpha\leqq f^\beta$ és minden γ indexre, ha $f^\beta\leqq f^\gamma$, akkor $\|f^\gamma-g\|<\varepsilon$.

Ezt a továbbiakban a $Vf\xrightarrow{\text{B.A.}} g$ módon jelöljük. A G félcsoportra most tegyük még azt a korlátozást, hogy az elemei korlátos, lineáris transzformációk. Az F tér (G-re vonatkozó) *fix-pontján* értünk egy $f\in F$ elemet, amelyre $Tf=f$ teljesül, minden $T\in G$-re.

Most köevtkezik a másik fontos definíció:

Definíció. Az F Banach-tér egy f eleme *ergodikus* (G-re vonatkozóan), ha Vf konvergál egy (G-re vonatkozó) fix-ponthoz.

Legyen $(X, \sum, \mu)$ véges mértéktér és S mértéktartó $T: X \to X$ transzformációk egy rögzített félcsoportja, valamint E egy Banach-tér.

Definíció. Az $f: X \to E$ függvényt $\sum$*-mérhetőnek* nevezzük, ha létezik $f_n: X \to E$ lépcsősfüggvényeknek egy sorozata úgy, hogy $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \varphi_{A_i} \cdot Z_i$, ahol $A_i \in \sum$, $z_i \in E$ $(i=1, \ldots, m_n)$, bizonyos m_n-re és $f_n \to f$ μ-majdnem mindenütt.

Megjegyzés: Itt a φ_A jelöli az A karakterisztikus függvényét.

Ezután $L_E^p(\mu)$-vel jelöljük a $\sum$-mérhető f: $X \to E$ függvények halmazát; $f \in L_E^p(\mu)$ esetén f *normája*

$$\|f\| := \Big(\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < \infty).$$

Ha $a \in E$ és $f \in L^p(\mu)$, akkor $f \cdot a: X \to E$, ahol $(f \cdot a)(t) := f(t) \cdot a$ $(t \in X)$. Az $a \in E$ elemet rögzítve vezessük még be az

$$L_a^p(\mu) := \{f \cdot a \mid f \in L^p(\mu)\}$$

jelölést.

Ekkor igaz a következő lemma.

1. Lemma. Ha $a \in E$, $(a \neq 0)$ akkor az $f \in L^p(\mu)$ függvényhez hozzárendelve az $f \cdot a \in L_a^p(\mu)$ függvényt az $L^p(\mu)$ és $L_a^p(\mu)$ terek között egy izomorfiát határozunk meg, amely $\|a\| = 1$ esetében még izometrikus is.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan teljesülnek a következők:
Minden $f, g \in L^p(\mu)$, $c \in R$-re

(1) ha $f \neq g$, akkor $f \cdot a \neq g \cdot a$,

(2) $(f+g) \cdot a = f \cdot a + g \cdot a$,

(3) $cf \cdot a = c(f \cdot a) = f \cdot ca$,

(4) $\|f \cdot a\| = \|f\| \cdot \|a\|$,

végül

(5) ha $\varphi \in L_a^p(\mu)$, akkor definíció szerint van olyan $f \in L^p(\mu)$, hogy $\varphi = f \cdot a$.

2. Lemma. $L_a^p(\mu)$ az $L_E^p(\mu)$ tér zárt, lineáris altere $(a \in E)$.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $L_a^p(\mu) \subseteq L_E^p(\mu)$ és mivel $L^p(\mu)$ teljes, ezért az 1. Lemma szerint igaz az állítás.

Legyen $T \in S$. Ekkor egy X-en értelmezett f függvényhez hozzárendelve az $f \circ T$ függvényt egy transzformációt határozunk meg. Most tekintsük az S elemei által meghatározott transzformációk G félcsoportját, azaz legyen $G := \{[f \mapsto f \circ T] \mid T \in S\}$.

3. Lemma. $L^p(\mu)$ minden eleme ergodikus G-re vonatkozóan $(1 < p < \infty)$.

Bizonyítás. Legyen az F Banach-tér most $L^p(\mu)$. Ekkor [2], 12. §. 6. tétel következménye szerint elegendő azt belátni, hogy G elemeinek normái legfeljebb 1 értékűek. Ez pedig igaz, mert ha $T \in S$, akkor $\|f \circ T\| = \|f\|$.

4. Lemma. Az $\bigcup_{a \in E} L_a^p(\mu)$ konvex burkának $L_E^p(\mu)$ beli lezártja maga az $L_E^p(\mu)$ tér, azaz

$$\overline{co \bigcup_{a \in E} L_a^p(\mu)} = L_E^p(\mu).$$

Bizonyítás. A 2. Lemma miatt a baloldal nyilvánvalóan része a jobboldalnak. A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $f \in L_E^p(\mu)$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges érték. Adott M számhoz definiáljuk az f_M függvényt a következőképpen:

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } \|f(x)\| \leqq M \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nyilvánvalóan létezik olyan $M > 0$ szám, hogy

$$\left(\int_X \|f(x) - f_M(x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz $\|f - f_M\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Rögzítve M értékét megközelítjük f_M-et lépcsősfüggvényekkel. $L_E^p(\mu)$ definíciója szerint létezik g_n lépcsősfüggvényeknek egy sorozata, amely μ-majdnem mindenütt f-hez tart.

Ha

$$g_{nM}(x) := \begin{cases} g_n(x), & \text{ha } \|g_n(x)\| \leqq M \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor $g_{nM}(x) \to f_M(x)$ μ-majdnem minden x-re.

Mivel az $\|f_M(x) - g_{nM}(x)\|^p$ függvényeknek van közös integrálható majoránsa ti. $2^p M^p$, ezért a Lebesgue-tétel értelmében létezik olyan n, hogy $\|f_M - g_{nM}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Így

$$\|f - g_{nM}\| \leqq \|f - f_M\| + \|f_M - g_{nM}\| < \varepsilon.$$

A $g_{nM}: X \to E$ lépcsősfüggvény, tehát létezik olyan m_n pozitív egész szám és $A_i \in \sum$, $z_i \in E$ $(i = 1, \ldots, m_n)$, hogy

$$g_{nM} = \sum_{i=1}^{m_n} \varphi_{A_i} \cdot z_i.$$

Nyilvánvalóan $g_{nM} \in co \bigcup_{i=1}^{m_n} L_{z_i}^p \subseteq co \bigcup_{a \in E} L_a^p(\mu)$.

Tehát

$$f \in \overline{co \bigcup_{a \in E} L_a^p(\mu)},$$

amivel a bizonyítást befejeztük.

5. Lemma. $L_E^p(\mu)$ valamennyi eleme ergodikus G-re vonatkozóan.

Bizonyítás. Mivel $L^p(\mu)$ valamennyi eleme ergodikus, ezért az 1. Lemma miatt $L_a^p(\mu)$ valamennyi eleme is ergodikus $(a \in E)$. Figyelembe véve azt, hogy az ergodikus elemek egy zárt, invariáns, lineáris alteret alkotnak ([2], 8. §. 3. tétel), azt kapjuk, hogy a $co \bigcup_{a \in E} L_a^p(\mu)$ halmaz $L_E^p(\mu)$-beli lezártjához tartozó valamennyi elem ergodikus. A 4. Lemma szerint ez azt jelenti, hogy $L_E^p(\mu)$ valamennyi eleme ergodikus, amit éppen bizonyítanunk kellett.

Most már rátérhetünk a tétel megfogalmazására és bizonyítására.

Tétel. Minden E Banach-térhez létezik egy egyértelműen meghatározott $P_E: L_E^p(\mu) \to L_E^p(\mu)$ lineáris, kontraktív projekció a következő tulajdonságokkal:

(1) $P_E(f \circ T) = P_E f \circ T = P_E f \quad (T \in S)$,

(2) $P_E f$ az $\{f \circ T | T \in S\}$ halmaz konvex burka $L_E^p(\mu)$-beli lezártjának egyetlen fix-pontja.

Bizonyítás. Mivel $L_E^p(\mu)$ minden eleme ergodikus, ezért minden $f \in L_E^p(\mu)$-höz egyértelműen létezik olyan $f^* \in L_E^p(\mu)$, hogy $Vf \xrightarrow{\text{B.A.}} f^*$, ahol f^* fix-pont. Értelmezzük a $P_E: L_E^p(\mu) \to L_E^p(\mu)$ transzformációt úgy, hogy minden $f \in L_E^p(\mu)$-höz hozzárendeljük az $f^* \in L_E^p(\mu)$ elemet. Könnyen következik ([2], 5. §. (5)), hogy ha $f, g \in L_E^p(\mu)$, λ, $\mu \in R$, akkor $V(\lambda f + \mu g) \xrightarrow{\text{B.A.}} \lambda f^* + \mu g^*$, ami azt jelenti, hogy P_E lineáris.

Mivel $f \in L_E^p(\mu)$ esetén $f^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f \circ T_k)$, ahol $T_k \in S$, $(k=1, \dots, n)$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqq 0$ és $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ezért $\|f^\alpha\| \leqq \|f\|$, amiből következik, hogy $\|f^*\| \leqq \|f\|$, ami azt jelenti, hogy P_E kontraktív.

$f \circ T = f^\alpha$, ahol α speciális index és így $V(f \circ T) \xrightarrow{\text{B.A.}} f^*$, ami azt jelenti, hogy $P_E(f \circ T) = P_E f$, és mivel f^* fix-pont, ezért $f^* \circ T = f^*$, azaz $P_E f \circ T = P_E f$. Ezzel bizonyítottuk az (1) tulajdonságot.

A (2) tulajdonság [2], 7. §. 2. tételéből következik. Az egyértelműség nyilvánvaló.
Ezzel a tételt teljes egészében bizonyítottuk.

Megjegyzés. Az [1]-ben P_E-re felsorolt többi tulajdonság is hasonló módon bizonyítható. Ha az (X, Σ, μ) mértéktér nem véges, akkor a 4. Lemma bizonyítását némileg megváltoztatva kapjuk az eredményeket.

Végezetül köszönetemet fejezem ki *Szűcs József*nek és *Stachó László*nak a dolgozat megírásában nyújtott segítségükért.

IRODALOM

[1] N. Dinculeanu, Projections on Spaces of Invariant Functions, Journal of Functional Analysis, 12 (1973), 229—235.
[2] L. Alaoglu, G. Birkhoff, General ergodic theorems, Annals of Mathematics, Vol. 41 (1940), 293—309.
[3] F. Riesz, B. Sz.—Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

ÜBER EINE MERKWÜRDIGE PROJEKTION DES RAUMES VON MESSBAREN FUNKTIONEN

A. SZEDERKÉNYI

Für einen Satz von N. Dinculeanu wird ein neuer Beweis gegeben, der mit Hilfe des von L. Alaoglu und G. Birkhoff stammenden Konvergenzbegriffs durchgeführt ist.

ОБ ОДНОЙ ДОСТОПРИМЕЧАТЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМОЙ ФУНКЦИИ

А. СЕДЕРКЕНИ

Данная работа содержит новое доказательство теоремы Н. Динкулеану. Доказательство обосновано на использовании понатия конвергенции выденного математиками Л. Алаоглу, Г. Биркгоф.