ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ $\Pi_2^3(\mu,e)$

ЯБЛОНСКАЯ Н. В. (Одесса)

1. В разное время многими авторами с различных точек зрения было рассмотрено несколько обобщений теории геодезических отображений. Наиболее известными являются теории проективных пространств (В. Ф. Каган [1], П. А. Широков [2], Т. Вранчеану [3]). концинркулярная геометрия (К. Яно [4]), теория аналитически планарных отображений почти комплексных многообразий (С. Исихара [5], Я. Тасиро [6]), голоморфно-проективных отображений келеровых пространств (Г. Оцуки, Я. Тасиро [7]).

В 1963г. Н. С. Синюковым [8—10] было предложено широкое и естественное обобщение теории геодезических отображений на основе единой геометрической идеи — теория почти геодезических отображений и соответственно бесконечно малых почти геодезических преобразований аффинносвязных и римановых пространств.

Основополагающие результаты были получены им для пространств аффинной связности без кручения.

Все перечисленные выше теории содержатся в ней как частные случаи (для пространств аффинной связности без кручения).

Нами продолжается дальнейшее развитие теории почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности с кручением.

На этом пути было введено понятие почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности, доказано существование трех типов почти геодезических отображений; подробнее изучились специальные отображения $\Pi_2^2(e)$, $\Pi_2^3(e)$.

В данной статье продолжаются исследования почти геодезических отображений второго типа $\Pi_2^3(\mu, e)$ пространства аффинной связности с кручением, когда структурный аффинор μ_i^h удовлетворяет условию $\mu_i^{h3} = a\mu_i^h + e\delta_i^h$.

Найдено общее представление объектов связности пространств, допускающих эти отображения.

II. Рассмотрим два пространства аффинной связности с кручением A_n и $\bar{A}_n$, между которыми установлено почти геодезическое соответствие Π_2.

Отображение A_n на $\bar{A}_n$ называется почти геодезическим, если в результате этого отображения каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую $\bar{A}_n$ [11].

Отображения Π_2 характеризуется следующими основными уравнениями [11].

$$C_{ij}^h = \varphi_{(i}\delta_{j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^h, \tag{1}$$

$$\mu_{(i,j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^{h2} + K_{i\alpha}^k\mu_j^\alpha + K_{j\alpha}^h\mu_i^\alpha = \sigma_{(i}\delta_{j)}^h + \nu_{(i}\mu_{j)}^h. \tag{2}$$

Здесь C^h_{ij}, K^h_{ij} симметрическая и кососимметрическая составляющие тензора деформации P^h_{ij} объекта связности при отображении $\Pi_2: A_n \to \bar{A}_n$, μ^h_i — аффинор, φ_i, ψ_i, τ_i, ν_i — некоторые векторы, круглые скобки обозначают симметрирование по индексам i и j, „ " — знак ковариантной производной A_n.

Условия взаимности для почти геодезических отображений второго типа имеют вид [12].

$$\psi_{(i}\mu^{h2}_{j)} + K^h_{i\alpha}\mu^\alpha_j + K^h_{j\alpha}\mu^\alpha_i = p_{(i}\delta^h_{j)} + g_{(i}\mu^h_{j)}. \tag{3}$$

Для того, чтобы исследовать отображение Π_2 нам нужно рассмотреть условия взаимности (3), в которые входят квадраты аффинора μ^h_i. Структурный аффинор удовлетворяет своему минимальному полиному. Если он имеет вид $\tilde{\mu}^h_{i2} = a\mu^h_i + h\delta^h_i$ и, поскольку, уравнения (1), (2), (3) у нас определены с точностью до преобразования аффинора

$$\tilde{\mu}^h_i = q\mu^h_i + p\delta^h_i \tag{4}$$

2466 Туд. козл. (4) 9. 18. Ш—1900 Кне.

то, очевидно, инварианты p и q можно выбрать так, что

$$\mu^{h2}_i = e\delta^h_i, \quad (e = \pm 1{,}0) \tag{5}$$

Почти геодезические отображения $\Pi^2_2(e)$ пространства A_n на $\bar{A}_n$, при которых μ^h_{i} удовлетворяет условию (5) нами были изучены ранее [11].

Многими авторами [13], [14] рассматривались также структуры, для которых

$$\mu^{h3}_i = \pm\mu^h_i.$$

Пусть

$$\mu^{h3}_i = q\mu^{h2}_i + p\mu^h_i + c\delta^h_i.$$

Из (4) следует, что инварианты p, q, c можно выбрать так, чтобы

$$\mu^{h3}_i = p\mu^{h2}_i + e\delta^h_i, \quad (e = \pm 1) \tag{6}$$

либо

$$\mu^{h3}_i = q\mu^{h2}_i + e\delta^h_i.$$

При $p, q = 0$ приходим к отображениям $\Pi^3_2(e)$ [11]. Почти геодезические отображения Π_2 пространства A_n на $\bar{A}_n$ при которых μ^h_i удовлетворяет уравнениям (6), $(p \neq 0)$ в дальнейшем мы будем обозначать $\Pi^3_2(\mu, e)$.

III. Будем находить основные уравнения отображений. Свертывая соотношения (3) с μ^{j2}_k, просиметрировав затем результат по k и j, учитывая (3), получим

$$K^h_{\alpha\beta}\mu^{\alpha2}_j\mu^\beta_i + K^h_{\alpha\beta}\mu^{\alpha2}_i\mu^\beta_j = (p_i - \psi_\alpha\mu^{\alpha2}_i)\mu^{h2}_j + (p_j - \psi_\alpha\mu^{\alpha2}_j)\mu^{h2}_i + (g_\alpha\mu^{\alpha2}_i - e\psi_i)\mu^h_j +$$
$$+ g_\alpha\mu^{\alpha2}_j - e\psi_j)\mu^h_i + (p_\alpha\mu^{\alpha2}_j + eg_j - pp_j)\delta^h_i + (p_\alpha\mu^{\alpha2}_j + eg_i - pp_i)\delta^h_j.$$

Из этих условий и соотношений (3), следует

$$a_{(i}\mu^{h2}_{j)} + b_{(i}\mu^h_{j)} + c_{(i}\delta^h_{j)} = 0, \tag{7}$$

где

$$a_i = ep_\alpha\mu^\alpha_i - pe\psi_\alpha\mu^\alpha_i + eg_\alpha\mu^{\alpha2}_i - \psi_i,$$

$$b_i = -ep_\alpha \mu_i^{\alpha 2} + pe\psi_\alpha \mu_i^{\alpha 2} + \psi_\alpha \mu_i^\alpha - g_i,$$

$$c_i = \psi_\alpha \mu_i^{\alpha 2} - g_\alpha \mu_i^\alpha - p_i.$$

Из (7) вытекает, что $a_i=0, \ h_i=0, \ c_i=0.$ (8)

В противном случае, мы пришли бы к отображению $\Pi_2^2(e)$.

Соотношение (3) представляет собой систему неоднородных алгебраических относительно K_{ij}^h уравнений. Ее общее решение будет состоять из суммы частного решения $\underset{0}{K}{}_{ij}^h$ и ощего решения соответствующих однородных уравнений $\underset{1}{K}{}_{ij}^h$.

Из (3), (7), (8) следует, что

$$\underset{0}{K}{}_{ij}^k = e(\psi_\alpha \mu_i^{\alpha 2} - g_\alpha \mu_i^\alpha)\mu_j^{h2} - e(\psi_\alpha \mu_j^{\alpha 2} - g_\alpha \mu_j^\alpha)\mu_i^{h2} + (ep_\alpha \mu_i^\alpha + \psi_i)\mu_j^h - (ep_\alpha \mu_j^\alpha + \psi_j)\mu_i^h.$$

Поскольку в каждой точке, в некоторой системе координат матрица μ_i^h может быть приведена к каноническому виду, то нетрудно проверить, что общее решение системы однородных уравнений

$$K_{i\alpha}^h \mu_j^\alpha + K_{j\alpha}^h \mu_i^\alpha = 0$$

будет иметь вид

$$\underset{1}{K}{}_{ij}^h = T_{ij}^h + eT_{\alpha\beta}^h \mu_i^{\alpha 2}\mu_j^\beta - eT_{\alpha\beta}^h \mu_j^{\alpha 2}\mu_i^\beta.$$

Следовательно, справедлива теорема

Теорема I. Почти геодезические отображения $\Pi_2^3(\mu, e)$ характеризуются уравнениями

$$\hat{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_{(i}\delta_{j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^h + e(\psi_\alpha \mu_i^{\alpha 2} - g_\alpha \mu_i^\alpha)\mu_j^{h2} - e(\psi_\alpha \mu_j^{\alpha 2} - g_\alpha \mu_j^\alpha)\mu_i^{h2} + \\ + (ep_\alpha \mu_i^\alpha + \psi_i)\mu_j^h - (ep_\alpha \mu_j^\alpha + \psi_j)\mu_i^h + T_{ij}^h + eT_{\alpha\beta}^h \mu_i^{\alpha 2}\mu_j^\beta - eT_{\alpha\beta}^h \mu_j^{\alpha 2}\mu_i^\beta, \tag{9}$$

$$\mu_{(i,j)}^h = \tau_{(i}\delta_{j)}^h + S_{(i}\mu_{j)}^h, \tag{10}$$

где $\varphi_i, \psi_i, g_i, p_i, \tau_i, S_i$ — векторы, T_{ij}^h — *произвольный кососимметрический тензор.*

IV. Перейдем к задаче определения связности с кручением, относительно которой данная структура удовлетворяет условиям (10).

Нетрудно показать, что соотношения (10) могут быть заменены эквивалентными им условиями в разрешенной относительно ковариантной производной от аффинора μ_i^h форме.

$$\mu_{i,j}^h = \tau_i \delta_j^h + Si\mu_j^h + B_{\alpha j}^h \mu_i^\alpha - B_{\alpha i}^h \mu_j^\alpha - B_{ij}^\alpha \mu_\alpha^h - eB_{\beta\gamma}^\alpha \mu_i^\beta \mu_j^\gamma \mu_\alpha^{h2} + peB_{\alpha\beta}^h \mu_i^\alpha \mu_j^\beta,$$

где B_{ij}^h — произвольный кососимметрический тензор.

Теперь введем произвольную аффинную связность $\hat{\Gamma}_{ij}^h$ и обозначим $\hat{A}_n$ пространство с этой связностью

$$\hat{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + A_{ij}^h \tag{11}$$

Здесь A_{ij}^h — некоторый тензор. Вследствие (11) для ковариантной производной μ_i^h в пространстве A_n, получаем

$$\mu_{i\cdot j}^h = \mu_{i,j}^h + A_{\alpha j}^h \mu_i^\alpha - A_{ij}^\alpha \mu_\alpha^h \tag{12}$$

($\hat{}$ — символ ковариантного дифференцирования в пространстве $\hat{A}_n$) и уравнения (10) представляются в виде

$$A^h_{\alpha j}\mu^\alpha_i - A^\alpha_{ij}\mu^h_\alpha = \mu^h_{i\hat{}j} - H^h_{ij}, \tag{13}$$

где

$$H^h_{ij} = \tau_i\delta^h_j + Si\mu^h_j + B^h_{\alpha j}\mu^\alpha_i - B^h_{\alpha j}\mu^\alpha_j - B^\alpha_{ij}\mu^h_\alpha - eB^\alpha_{\beta\gamma}\mu^\beta_i\mu^\gamma_j\mu^{h2}_\alpha + peB^h_{\alpha\beta}\mu^\alpha_i\mu^\beta_j \tag{14}$$

Общее решение системы (13) неоднородных алгебраических относительно A^h_{ij} уравлений состоит из суммы частного решения

$$\underset{0}{A}{}^h_{ij} = \frac{1}{2p^3-9}4p^2(H^h_{\alpha j} - \mu^h_{\alpha\hat{}j})\mu^\alpha_i - 2p^3e(\mu^\alpha_{\beta\hat{}j} - H^\alpha_{\beta j})\mu^\beta_i\mu^h_\alpha + 9e(\mu^h_{\alpha\hat{}j} + \\ - H^h_{\alpha j})\mu^{\alpha 2}_i + 3p(\mu^\alpha_{\beta\hat{}j} - H^\alpha_{\beta j})\mu^{\beta 2}_i\mu^h_\alpha + 6p(\mu^\alpha_{\beta\hat{}j} - H^\alpha_{\beta j})\mu^h_\alpha\mu^\beta_i \tag{15}$$

и общего решения соответствующей системы однородных уравнений.

$$\underset{1}{A}{}^h_{ij} = B^h_{ij} + eB^\alpha_{\beta j}\mu^h_\alpha\mu^{\beta 2}_i + eB^\alpha_{\beta j}\mu^{h2}_\alpha\mu^\beta_i, \tag{16}$$

где B^h_{ij} — произвольный тензор.

Следовательно, получили теорему

Теорема 2. Совокупность всех объектов связности пространств A_n, допускающих отображение $\Pi^3_2(\mu, e)$ определяются по формуле

$$\Gamma^h_{ij} = \hat{\Gamma}^h_{ij} + \underset{0}{A}{}^h_{ij} + \underset{1}{A}{}^h_{ij},$$

где $\hat{\Gamma}^h_{ij}$ — произвольная связность с кручением, а $\underset{0}{A}{}^h_{ij}$ и $\underset{1}{A}{}^h_{ij}$ имеют вид (15) *и* (16) *соответственно.*

Аналогично можно получить основные уравнения отображеня $\Pi^4_2(\mu, e)$, т.е. при условии

$$\mu^{h4}_i = p\mu^{h3}_i + g\mu^h_i + e\delta^h_i$$

и более высокого порядка, а также найти общее представление объектов связности пространств, соответственно допускающих эти отображения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Каган В. Ф.: Субпроективные пространства, М., физматгиз, 1961, 220 с.

[2] Широков П. А.: Избранные работы по геометрии, Казань, Казанский ун-т, 1966, 432 с.

[3] Vranceanu G.: Lecons de géometrie différentielle, V. II. — Acad. RPR, 1957.

[4] Yano K.: Concirculor geometry I—IV. — Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16, p. 195—200, 354—360; 442—448; 505—511.

[5] Ishihaza S.: Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. J., 1957, 9, № 3, p. 273—297.

[6] Tashiro Y.: On holomorphically projective correspondences in an almost complex space. — Math. J. Okayama Univ., 1957, 6, № 2, p. 147—152.

[7] Otsuki T., Tashiro Y.: On curves in Kählezian spaces. — Math. I. Okayama Univ., 1954, 4, 1, p. 57—78.

[8] Синюков Н. С.: Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. ДАН СССР, 1963, 151 №4, с. 781—782.

[9] Синюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств, М., Наука, 1979 225 с.

10] Синюков Н. С.: Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Итоги науки и техники., Серия: Проблемы геометрии, т. 13, М., 1982, 3—25 с.
[11] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Одесский ун-т, Одесса, 1979, 17 с. библ. 4 назв. Рукопись деп. в ВИНИТИ 19 уюня 1979 г., №2190—79 ДНД.
[12] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения второго типа для пространств аффинной связности на е-структурах. XII Всесоюзная конф. по соврем. пробл. геометрии. Тезисы докл. Минск, Белор. ун-т, 1979, 234 с.
[13] Tong-van-Dúc: Sur les structures définies par une 1-forme vectorielle F telle gue $F^3 = \pm F$. — Kodai Math. Semin. Repts, 1973, 25, № 3, 367—376 p.
[14] Singh K. D., Szivastava Nilima: On some f-structure manifolds with tozsion. — Demonstr. math., 1974, 7, №2, p. 183—196.

$\Pi_2^3(u, e)$ TÍPUSÚ MAJDNEM GEODETIKUS LEKÉPEZÉSEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

N. V. JABLONSZKAJA

1963-ban N. Sz. Szinjukov kezdeményezte az affinösszefüggő terek geodetikustartó leképezéseinek vizsgálatára kiépített elmélet kiterjesztését a geodetikus 2-sikállást megőrző, másszóval majdnem geodetikus leképezések tanulmányozására. A szerző jelen dolgozatában folytatja azokat a korábbi vizsgálatait, amelyek a nemeltünő torziójú affinösszefüggő terekre vonatkoznak. Szükséges és elegendő feltételt igazol a $\Pi_2^3(u, e)$ típusú, majdnem geodetikus leképezés létezésére abban az esetben, amikor a teret jellemző u_i^k tenzor eleget tesz a harmadfokú

$$(u_i^k)^3 = pu_i^k + e\delta_i^k \qquad (e = \pm 1)$$

egyenletnek.

ÜBER EINE KLASSE DER FAST-GEODETISCHEN ABBILDUNGEN VON TYP $\Pi_2^3(u, e)$

N. V. JABLONSKAJA

Im Jahre 1963 hat N. S. Sinjukov die Untersuchungen für fast-geodetische Abbildungen ausgedehnt. In dieser Arbeit setzt die Verfasserin ihre Untersuchungen bezüglich des affinzusammenhängenden Räumen mit nichtverschwindender Torsion fort. Eine notwendige und hinreichende Bedingung wird für die Existenz von fast-geodetischer Abbildung mit Typ $\Pi_2^3(u, e)$ bewiesen, falls die für den Raum charakteristische Tensor die Gleichung

$$(u_i^k)^3 = pu_i^k + e\delta_i^k \qquad (e = \pm 1)$$

erfüllt.