A ϱ-MINTAFÜGGVÉNYEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE, HA ϱ RENDEZÉS

VÁRMONOSTORY ENDRE

1. Ebben a dolgozatban az alaphalmaz mindig egy véges, részben rendezett halmaz, amelynek van legnagyobb és legkisebb eleme. Azt vizsgáljuk, hogy az alaphalmazon értelmezett összes függvény előállítható-e bizonyos függvényekből, az identikus és konstans függvényekből.

Az előző két dolgozat is hasonló problémákkal foglalkozik. Most a lineáris rendezésre vonatkozó eredmények egy részét általánosítom rendezésre.

Az alaphalmaz legyen: $H=\{0, e_1, ..., n-1\}$, ahol $n>2$.

Egy k változós f függvényt *ϱ-mintafüggvénynek* nevezünk, ha:

a) bármely $\langle x_1, ..., x_k\rangle$ esetén $f(x_1, ..., x_k)=x_i$ $(1\leqq i\leqq k)$,

b) valahányszor $\langle x_1, ..., x_k\rangle$ és $\langle y_1, ..., y_k\rangle$ azonos mintájúak ϱ-ra nézve, (azaz minden (i, j) párra $x_i\varrho x_j \Leftrightarrow y_i \varrho y_j$) mindannyiszor $f(y_1, ..., y_k)=y_i$.

A H halmazon értelmezett f függvényt *funkcionálisan teljesnek* nevezzük, ha belőle, a projekciókból és az egyváltozós konstans függvényekből összetett függvényként a H-n értelmezett összes függvény előállítható.

Fried és Pixley [1]-ben bizonyította, hogy a H-n értelmezett

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény függvényteljes. Ezt a függvényt nevezzük *duális diszkriminátornak.*

Hasonlóan a Pixley-féle ún. *diszkriminátor* is függvényteljes a H halmazon:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x = y, \\ x, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

Az előbbi két függvény ϱ-mintafüggvény, ahol a ϱ egyenlőségreláció.

Szükségünk lesz az alábbi ún. kifejtési tételre: (Wille [4], Werner [5]).

Ha $\wedge$ és $\vee$ olyan kétváltozós műveletek H-n, hogy minden $a(\in H)$-ra teljesül $a\wedge 1=a$, $a\wedge 0=0$, $a\vee 0=a=0\vee a$, akkor a

$$\{\wedge, \vee, \chi_0, \chi_1, ..., \chi_{n-1}, c_0, c_1, ..., c_{n-1}\}$$

halmaz teljes, ahol

$$\chi_i(a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a = i, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (0 \leqq i \leqq n-1).$$

Most vizsgáljuk meg a duális diszkriminátor megfelelőjét, ha az egyenlőség reláció helyett rendezési relációt írunk.

1. Tétel. Ha adott egy $\geqq$ rendezési reláció a H halmazon, akkor az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geqq y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvényteljes.

Bizonyítás. Legyen $x \wedge y = f(0, y, x)$. Ekkor teljesül a következő: $a \wedge 0 = 0$. $a \wedge e_1 = a$ minden $a(\in H)$-ra.

Ha $x \vee y = f(x, y, y)$ akkor $0 \vee a = a = a \vee 0$ minden $a(\in H)$-ra. Az $a=0$-ra definiáljuk a $\chi_a(x)$ karakterisztikus függvényt következőképpen:

$$\chi_0(x) = f(e_1, f(0, f(0, x, e_1), n-1), 0).$$

Ha $0 < a < n-1$ akkor a $\chi_a(x)$ karakterisztikus függvény a következő lesz:

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(a, x, 0), f(f(x, a, n-1), a, n-1), 0), e_1).$$

Az $a=n-1$ esetén a $\chi_a(x)$ karakterisztikus függvény definíciója:

$$\chi_{n-1}(x) = f(0, f(f(f(x, n-1, e_1), e_1, 0), n-1, 0), e_1).$$

2. Tétel. Legyen adott a H halmazon a $\geqq$ rendezési reláció, akkor az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \geqq y, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes a H halmazon.

Bizonyítás. Ha $x \vee y = f(x, y, x)$, akkor $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ minden $a(\in H)$-ra. Legyen

$$x \wedge y = \begin{cases} f(y, f(x, 0, y), 0), & \text{ha } x = 0 \text{ és } y \text{ tetszőleges}, \\ f(x, e_1, y), & \text{ha } x = e_1 \text{ és } y \text{ tetszőleges}, \\ f(e_1, f(y, e_1, x), 0), & \text{ha } x \neq 0,\ x \neq e_1 \text{ és } y \text{ tetszőleges}. \end{cases}$$

Ekkor teljesül $a \wedge 0 = 0$, $a \wedge e_1 = a$ minden $a(\in H)$-ra.

A $\chi_a(x)$ karakterisztikus függvény definíciója:
Ha $a=0$, akkor

$$\chi_0(x) = f(f(e_1, x, 0), f(x, f(x, f(0, f(e_1, x, 0), e_1), 0), 0), 0).$$

Ha $a=e_1$, akkor:

$$\chi_{e_1}(x) = f(f(e_1, x, 0), x, 0).$$

Ha $n-1 > a > 0$ és $a \neq e_1$, akkor:

$$\chi_a(x) = f(f(a, f(e_1, \ldots, f(a-1, f(f(a, x, 0), x, n-1), n-1), \ldots, n-1), 0), e_1, 0).$$

Ha $a=n-1$, akkor:

$$\chi_{n-1}(x) = f(f(e_1, f(x, n-1, e_1), 0), e_1, 0).$$

Megjegyzés.

A H halmazon értelmezett ϱ-mintafüggvények között van olyan függvény, amely nem függvényteljes, ha ϱ rendezési reláció. Tekintsük például az

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geqq y, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt. Ez nem függvényteljes, ugyanis nem állítható elő belőle a projekciókból és a konstansokból olyan egyváltozós $g(x)$ függvény, amelyre $g(n-1)=0$.

IRODALOM

[1] E. Fried, A. F. Pixley: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math 41/1979, 83—100.
[2] Vármonostory Endre: A ϱ-mintafüggvények funkcionális teljessége, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, 1980., 171—175.
[3] E. Vármonostory: Relational pattern functions "Finite Algebra and Mary-Valued Logic" Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 28., 1981.
[4] H. Werner: Diskriminator-Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
[5] R. Wille: Allgemeine Algebra — zwischen Grundlagenforschung and Anwendbarkeit (preprint).

DIE FUNKTIONELLE VOLLSTÄNDIGKEIT VON ϱ-MUSTERFUNKTIONEN, WENN ϱ EINE ORDNUNG IST

ENDRE VÁRMONOSTORY

Eine f-Funktion mit k-Veränderlicher nenne wir eine *ϱ-Musterfunktion*, wenn

a) für jedes $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ gilt $f(x_1, \ldots, x_k)=x_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ und

b) sind $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ und $\langle y_1, \ldots, y_k \rangle$ gleichmustrig in Bezug anf ϱ (d.h. für jedes Paar (i, j) : $x_i \varrho x_j$ $(\equiv) y_i \varrho y_j$), so gilt $f(y_1, \ldots, y_k)=y_i$.

Es wird bewiesen, dass gewisse in der Arbeit definierte Funktionen in jeder endlichen teilweise geordneten Menge, die eine kleinste und eine grösste Element hat, funktionell vollständig sind.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА ϱ ТРАФАРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ ЕСЛИ ϱ ПОРЯДОК

Функцию f от k переменных мы называем ϱ– трафаретной *функцией* если:

а) три любых $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ имеет место $f(x_1, \ldots, x_k)=x_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$,

и

б) зависит от $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ таким образом что $f\langle y_1, \ldots, y_k \rangle = y_i$ тем же i каждый раз когда $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, $\langle y_1, \ldots, y_k \rangle$ одинакового тила относительно отнощения ϱ (т.е. для каждой пары $x_i \varrho x_i \langle = \rangle y_i y_i$). Автор в работе пакызывает, что на каждом конечном, частичном упорядоченном множестве некоторые определенные ϱ – трафаретные функции ябляются функциональными плными.