Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis, 1987—1988.
Series Physica, Chemica, Mathematica, pp. 35—37.

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ $\Pi_2^2(\xi, \mu)$

И. Н. КУРБАТОВА—Н. В. ЯБЛОНСКАЯ,
(Одесса)

1. Пусть имеется пространство аффинной связности с кручением $\bar{A}_n$.

Нами ранее [1], [2] была показана возможность существования трех типов бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности и исследованы группы преобразований $\Pi_2^2(\xi, \mu)$, $\Pi_2^3(\xi, \mu)$.

Рассмотрим в A_n — пространстве аффинной связности без кручения, ассоциированном с $\bar{A}_n$ кривые, удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = a\lambda^h + b\mu^h_\alpha\lambda^\alpha$$

при некоторых функциях $a(t)$, $b(t)$.

Такие кривые названы F-кривыми [3]. Если A_n допускает бесконечно малое преобразование $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ сохраняющее структуру, то F-кривые переходят в F-кривые. Верно и обратное: если F-кривая пространства A_n переходит в F-кривую, то A_n допускает бесконечно малое преобразование $\Pi_2^2(\xi, \mu)$.

Пусть G — однопараметрическая группа преобразований $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ пространства аффинной связности A_n. Если каждое преобразование группы G любую F-кривую пространства A_n переводит в F-кривую, то G мы назвали группой $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ преобразований пространства A_n. Очевидно, что каждая однопараметрическая группа определяет $\Pi_2^2(\xi, \mu)$-преобразования и наоборот.

Максимальный порядок r [1] группы G преобразований $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ зависит от $n^2+2n-m(n-m)$ параметров, в случае структуры почти произведения и $2m(m+2)$ для почти комплексной структуры.

2. Выясним, какие пространства могут иметь максимальной порядок группы $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ — преобразований.

Как известно [1] основные уравнения $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ преобразований характеризуются следующими основными уравнениями:

$$\xi^h_{,i} = v^h_i, \tag{1}$$

$$v^h_{i,j} = -R^h_{i\alpha j}\xi^\alpha + P^h_{ij}, \tag{2}$$

$$P^h_{ij} = \varphi_i\delta^h_j + \varphi_j\delta^h_i + \psi_i\mu^h_j + \psi_j\mu^h_i, \tag{3}$$

$$\mu^h_{i,j} = \sigma_i\delta^h_j + v_i\mu^h_j + \tilde{N}^h_{ij}, \tag{4}$$

$$\mu^h_\alpha\mu^\alpha_i = l\delta^h_i, \quad (l = \pm 1), \tag{5}$$

$$L_\xi\mu^h_i = 0. \tag{6}$$

Условие интегрируемости (2) представляется в виде:

$$T^h_{ijk} = (\varphi_{i,j}-\psi_i\sigma_j-\psi_j\sigma_i)\delta^h_k-(\varphi_{i,k}-\psi_i\sigma_k-\psi_k\sigma_i)\delta^h_j+\varphi_{[j,k]}\delta^h_i+$$
$$+(\psi_{i,j}-\psi_i\nu_j-\psi_j\nu_i)\mu^h_k+(\psi_{i,k}-\psi_i\nu_k-\psi_k\nu_i)\mu^h_j-\psi_{[j,k]}\mu^h_i+A^h_{ijk}, \tag{7}$$

$$A^h_{ijk} = \psi_i\hat{N}^h_{kj}-\frac{1}{2}\psi_j\hat{N}^h_{ki}+\frac{1}{2}\psi_k\hat{N}^h_{ij},$$

$$\varphi_{i,j} = \psi_i\sigma_j+\psi_j\sigma_i+n_1(T^\alpha_{\beta j\gamma}-A^\alpha_{\beta j\gamma})\mu^\gamma_\alpha\mu^\beta_i+n_2(T^\alpha_{j\gamma\beta}-A^\alpha_{j\gamma\beta})\mu^\gamma_i\mu^\beta_\alpha+$$
$$+n_3(T^\alpha_{\alpha\gamma\beta}-A^\alpha_{\beta\gamma\alpha})\mu^\beta_i\mu^\gamma_j+n_4(T^\alpha_{\beta\gamma\alpha}-A^\alpha_{\beta\gamma\alpha})\mu^\beta_j\mu^\gamma_i, \tag{8}$$

$$\psi_{i,j} = \psi_i\nu_j+\psi_j\nu_i+n_5(T^\alpha_{ij\beta}-A^\alpha_{ij\beta})\mu^\beta_\alpha+n_6(T^\alpha_{ji\beta}-A^\alpha_{ji\beta})\mu^\beta_\alpha+n_7(T^\alpha_{\gamma\delta\beta}-A^\alpha_{\gamma\delta\beta})\mu^\gamma_i\mu^\delta_j\mu^\beta_\alpha+$$
$$+n_8(T^\alpha_{j\beta\alpha}-A^\alpha_{j\beta\alpha})\mu^\beta_i+n_9(T^\alpha_{i\beta\alpha}-A^\alpha_{i\beta\alpha})\mu^\beta_j+n_{10}(T^\alpha_{\beta j\alpha}-A^\alpha_{\beta j\alpha})\mu^\beta_i+n_{11}(T^\alpha_{\beta i\alpha}-A^\alpha_{\beta i\alpha})\mu^\beta_j. \tag{9}$$

Здесь

$$T^h_{ijk} = L_\xi R^h_{ijk},$$

$n_1, n_2, \ldots, n_{11}$ — некоторые инварианты, зависящие от следа матрицы μ^h_i.

Из соотношений (4) вытекает

$$L_\xi(\mu^h_{i,j}) = \delta^h_j L_\xi\sigma_i+\mu^h_j L_\xi\nu_i.$$

Отсюда следует

$$L_\xi\nu_i = \varphi_\alpha\mu^\alpha_i-\psi_i, \tag{10}$$

так как в противном случае мы пришли бы к бесконечно малым проективным преобразованиям.

Условие же (6) на основании (4) принимает вид

$$\sigma_i\xi^h+\nu_i\mu^h_\alpha\xi^\alpha+\frac{1}{2}\hat{N}^h_{i\alpha}\xi^\alpha+\mu^h_\alpha v^\alpha_i-\mu^\alpha_i v^h_\alpha = 0. \tag{11}$$

Пространства A_n могут иметь максимальный порядок группы r преобразований $\Pi^2_2(\xi, \mu)$ если система (1), (2), (8), (9) имеет решение для любых значений ξ^h, v^h_i, φ_i, ψ_i, удовлетворяющих уравнениям (10), (11).

В частности, они должны иметь решение и при

$$\xi^h = 0, \quad v^h_i = \delta^h_i.$$

Тогда условия (11) выполнены, а соотношения (7) и (10) принимают вид

$$\tilde{R}^h_{ijk} = \tilde{A}_{ij}\delta^h_k-\tilde{A}_{ik}\delta^h_j-\tilde{B}_{jk}\delta^h_i+\tilde{C}_{ij}\mu^h_k-\tilde{C}_{ik}\mu^h_j-\tilde{D}_{jk}\mu^h_i+\tilde{A}^h_{ijk}, \tag{12}$$

$$\nu_i = \tilde{\varphi}_\alpha\mu^\alpha_i-\tilde{\psi}_i. \tag{13}$$

Здесь

$$A^h_{ijk} = \hat{\psi}_i\hat{N}^h_{jk}-\frac{1}{2}\hat{\psi}_j\hat{N}^h_{ik}+\frac{1}{2}\hat{\psi}_i\hat{N}^h_{ij},$$

$$\tilde{A}_{ij} = n_1(\tilde{R}^\alpha_{\beta j\gamma}-\tilde{A}^\alpha_{\beta j\gamma})\mu^\gamma_\alpha\mu^\beta_i+n_2(\tilde{R}^\alpha_{j\gamma\beta}-\tilde{A}^\alpha_{j\sigma\beta})\mu^\sigma_i\mu^\beta_\alpha+n_3(\tilde{R}^\alpha_{\alpha\gamma\beta}-\tilde{A}^\alpha_{\alpha\gamma\beta})\mu^\beta_i\mu^\sigma_j+$$
$$+n_4(\tilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{\beta\gamma\alpha})\mu^\beta_j\mu^\sigma_i,$$

$$\tilde{B}_{jk} = \tilde{A}_{[jk]},$$

$$\tilde{C}_{ij} = n_5(\tilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{\beta\gamma\alpha})\mu^\beta_j\mu^\sigma_i+n_6(\tilde{R}^\alpha_{ji\beta}-\tilde{A}^\alpha_{ji\beta})\mu^\beta_\alpha+n_7(\tilde{R}^\alpha_{\gamma\delta\beta}-\tilde{A}^\alpha_{\gamma\delta\beta})\mu^\gamma_i\mu^\delta_j\mu^\beta_\alpha+$$
$$+n_8(\tilde{R}^\alpha_{j\beta\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{j\beta\alpha})\mu^\beta_i+n_9(\tilde{R}^\alpha_{i\beta\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{i\beta\alpha})\mu^\beta_j+n_{10}(\tilde{R}^\alpha_{\beta j\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{\beta j\alpha})\mu^\beta_i+$$
$$+n_{11}(\tilde{R}^\alpha_{\beta i\alpha}-\tilde{A}^\alpha_{\beta i\alpha})\mu^\beta_j,$$

$$\tilde{D}_{jk} = \tilde{C}_{[jk]}.$$

Таким образом, для того, чтобы пространство A_n было максимально подвижным, необходимо, чтобы тензор кривизны имел вид (12). Для голоморфно-плоских почти комплексных многообразий с интегрируемой структурой тензор Римана имеет вид (12), а так как

$$\mu^h_{i,j} = 0, \quad \nu_i = 0$$

соотношения (13) выполняются. Известно, что максимальный порядок r группы Ли голоморфно-проективных преобразований равен $2m(m+2)$ 4, т. е. согласован с проядком группы бесконечно малых преобразований $\Pi^2_2(\xi, \mu)$ с почти комплексной структурой. Следовательно, голоморфно-плоские почти комплексные многообразия с интегрируемой структурой являетюся максимально подвижными пространствами относительно преобразований $\Pi^2_2(\xi, \mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Синюков Н. С., Яблонская Н. В.: Группы Ли обобщенных симметрий пространств аффинной связности. — Всесоюзный симпозиум по теории симметрии и ее обобщениям. Кишинев, 1980, с. 99—100.

[2] Яблонская Н. В.: О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности. Известия высших учебных заведений. Математика, Казань, т. I, 1986 г., с. 78—80.

[3] Синюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств, Москва, 1979, с. 255.

[4] Ishiharas: Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. I., 1957. 9, No 3, p. 273—297.

MAXIMÁLISAN MOZGATHATÓ TEREK A $\Pi^2_2(\xi, \mu)$ TRANSZFORMÁCIÓKRA VONATKOZÓAN

I. N. KURBATOVA, N. V. JABLONSZKAJA

Ebben a dolgozatban a szerzők a $\Pi^2_2(\xi,\mu)$ affinösszefüggő, általános terek speciális, infinitezimális, majdnem geodetikus transzformációt, és transzformációcsoportjait vizsgálják, továbbá meghatározzák az ezen transzformációkra vonatkozóan maximálisan mozgatható tereket.

ÜBER MAXIMAL BEWEGLICHE RÄUME BEZÜGLICH DER TRANSFORMATIONEN $\Pi^2_2(\xi, \mu)$

I. N. KURBATOWA, N. V. JABLONSKAJA

In dieser Arbeit werden spezielle, infinitesimale, fastgeodätische Transformationen von $\Pi^2_2(\xi,\mu)$ allgemeinen affinzusammenhängenden Räumen und die Gruppen dieser Transformationen untersucht. Bezüglich dieser Transformationen werden maximal bewegliche Räume gegeben.