Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis, 1987—1988.
Series Physica, Chemica, Mathematica, pp. 45—50.

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ АФФИННО-СВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

ПОКАСЬ С. М.—ЯБЛОНСКАЯ Н. В.
(Одесса)

Теория почти геодезических отображений аффинно-связных и римановых пространств является естественным и в то же время широким обобщением теории геодезических отображений. Она впервые была предложена Н. С. Синюковым ([1]). Им были изучены почти геодезические отображения пространств аффинной связности без кручения.

В настоящей работе рассматриваются почти геодезические отображения общих пространств аффинной связности с кручением, удовлетворяющие условию взаимности, а также ассоциированных римановых пространств второго порядка:

1. Сначала остановимся на рассмотрении почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности с кручением. По определению ([1]) отображение $\mathbf{A}_n$ на $\bar{\mathbf{A}}_n$ называется почти геодезическим, если в результате этого отображения каждая геодезическая линия переходит в почти геодезическую. Отображения Π_3 характеризуются следующими основными уравнениями ([2])

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}+\varphi_i\delta^h_j+\varphi_j\delta^h_i+K^h_{ij}, \tag{1}$$

$$\mu^h_{,i}+K^h_{i\alpha}\mu^\alpha = \mu^h\nu_i+\varrho\delta^h_i. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma^h_{ij}, \bar{\Gamma}^h_{ij}$ — компоненты объектов связности $\mathbf{A}_n$ и $\bar{\mathbf{A}}_n$ соответственно, ψ_i, μ^h, ν_i — некоторые векторы, ϱ — инвариант, ψ_{ij} — симметрический тензор, K^h_{ij} — некоторый кососимметрический по i, j тензор, «,» обозначает ковариантную производную в $\mathbf{A}_n$, δ^h_i — символ Кронекера.

Отображение $\Pi_3\colon \mathbf{A}_n\to\bar{\mathbf{A}}_n$ будем называть удовлетворяющим условию взаимности, если обратное ему отображение также является почти геодезическим третьего типа и соответствует тому же вектору μ^h.

Поскольку для отображения $\bar{\mathbf{A}}_n$ на $\mathbf{A}_n$ обратного отображению Π_3 тензор деформации связности равен

$$\bar{P}^h_{ij} = -P^h_{ij}$$

в соответствии с (1) и (2) мы можем не нарушая общности рассуждений, предполагать

$$\bar{\varphi}_i = -\varphi_i, \quad \bar{\psi}_{ij} = -\psi_{ij}, \quad \bar{\mu}^h = \mu^h,$$

$$\bar{K}^h_{ij} = -K^h_{ij}, \quad \bar{\nu}_i = -\nu_i, \quad \bar{\varrho} = \varrho.$$

Взаимность отображения будет иметь место тогда и только тогда, когда для вектора μ^h в пространстве A_n будут выполняться уравнения (2), т. е.

$$\mu^h_{/i}-K^h_{i\alpha}\mu^\alpha=\bar{\nu}_i\mu^h+\bar{\varrho}\delta^h_i, \tag{3}$$

где «/» — знак ковариантного дифференцирования в $\bar{\mathrm{A}}_n$. Переходя здесь от ковариантной производной в A_n на основании (1) и принимая во внимание (2), получаем

$$K^h_{i\alpha}\mu^\alpha=(\varphi_\alpha\mu^\alpha+2\varrho)\delta^h_i+(2\nu_i+\varphi_i+\psi_{i\alpha}\mu^\alpha)\mu^h. \tag{4}$$

Следовательно, условий (4) необходимо для взаимности отображений $\Pi_3:\mathrm{A}_n\to\bar{\mathrm{A}}_n$. Очевидна и достаточность этих условий.

Рассмотрим в A_n кривые, координаты текущей точки которых удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\lambda^h}{dt}+\Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta=a\lambda^h+b\mu^h \tag{5}$$

при некоторых произвольных $a(t), b(t)$. Эти кривые называют F-кривыми пространства A_n [1]. Вследствие (2) и (3) мы видим, что

$$\mu^h_{,\alpha}\lambda^\alpha=p_i\lambda^h+g_i\mu^h.$$

Вместе с (5) это означает, что F-кривые являются в A_n почти геодезическими с полем $E_2\{\lambda^h,\mu^h\}$ компланарных вдоль них плоскостей.

В результате отображения $\Pi_3:\mathrm{A}_n\to\bar{\mathrm{A}}_n$ удовлетворяющее условию взаимности каждая F-кривая пространства $\bar{\mathrm{A}}_n$ представляет собой F-кривые пространства A_n. Следовательно, относительно отображения Π_3, удовлетворяющим свойству взаимности F-кривые пространства A_n инварианты.

Если $\bar{\mathrm{A}}_n$ отнести к аффинной системе координат, относительно которой компоненты объекта его связности $\bar{\Gamma}^h_{ij}=0$, то

$$\Gamma^h_{ij}=-\varphi_i\delta^h_j-\varphi_j\delta^h_i-\psi_{ij}\mu^h-K^h_{ij} \tag{6}$$

Из (2), вследствие (6), получим

$$\frac{\partial\mu^h}{\partial x^i}=(\nu_i+\varphi_i+\psi_{i\alpha}\mu^\alpha)\mu^h+(\varrho+\varphi_\alpha\mu^\alpha)\delta^h_i \tag{7}$$

Если

$$\nu_i=-\varphi_i-\psi_{i\alpha}\mu^\alpha,\quad \varrho=-\varphi_\alpha\mu^\alpha,$$

то $\mu^h=const.$

Очевидно и обратное утверждение: если в пространстве A_n найдется такая система координат относительно которой компоненты Γ^h_{ij} его объекта связности имеют выше указанные значения, при заданных функциях $\nu_i(x)$ и $\varrho(x)$, определяемые формулами (7) и постоянном векторе μ^h, то A_n допускает отображение Π_3.

2. Обратимся теперь к ассоциированным римановым пространствам второго порядка.

Пусть V_n — риманово пространство, отнесенное к произвольной системе координат $\{x^h\}$. В окрестности любой его фиксированной точки $M_0(x^h_0)$ построим так называемое ассоциированное пространство второго порядка $\tilde{V}^2_n$, определив его метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ следующим образом ([3])

$$\tilde{g}_{ij}(y)=\mathring{g}_{ij}+\frac{1}{3}R_{il_1l_2j}y^{l_1}y^{l_2}, \tag{8}$$

где $\underset{\circ}{g}_{ij}$, $\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j}$ — значения компонент метрического тензора и тензора Римана пространства V в точке M_0. Если в V_n перейти к римановой системе координат $\{y^h\}$ с началом в точке M_0 и разложить метрический тензор $g_{ij}(y)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки, то можно убедиться в том, что пространство $\tilde{V}_n^2$ реализует приближение второго порядка для V_n и поэтому отражает геометрические свойства с определенной степенью точности.

Имеет место предложение.

Теорема 1. *Если риманово пространство V_n подвергается изометрическому преобразованию, то ассоциированное с ним в окрестности данной точки M_0 пространство $\tilde{V}_n^2$ также подвергается лишь изометрическому преобразованию.*

Действительно, из (8) видно, что

$$d\tilde{s}^2 = \left[\underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} y^{l_1} y^{l_2}\right] dy^i dy^j. \tag{9}$$

В пространстве V_n от координат $\{x^h\}$ перейдем к новым координатам $\{x'^h\}$. Известно, что при этом ([1], [4])

$$d\tilde{s}'^2 = \left[\underset{\circ}{g}'_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} y'^{l_1} y'^{l_2}\right] dy'^i dy'^j, \tag{9}$$

где

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial r'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j},$$

$$R'_{il_1l_2j} = R_{\alpha\delta\lambda\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial r'^i} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^{l_1}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{l_2}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

Подставляя значения последних двух соотношений, вычисленных в точке M_0, в правую часть (9), получим

$$d\tilde{s}'^2 = \left[g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\left(R_{\alpha\lambda\gamma\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{l_1}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{l_2}}\right)\Big|_0 y'^{l_1} y'^{l_2}\right] \cdot$$

$$\cdot\, y'^{l_1} y'^{l_2} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\right)\Big|_0 dy'^i dy'^j.$$

Полагая

$$y^h = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\alpha}\Big|_0 y'^\alpha,$$

получим

$$d\tilde{s}'^2 = \left[\underset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \underset{\circ}{R}_{\alpha l_1 l_2 \beta} y^{l_1} y^{l_2}\right] dy^\alpha dy^\beta$$

т. е.

$$d\tilde{s}'^2 = ds^2.$$

Таким образом, мы убедились, что пространство $\tilde{V}_n^2$ инвариантно связано с исходным пространством V_n относительно выбора системы координат в V_n. Построим теперь для двух римановых пространств $\mathrm{V}_n(x, g)$ и $\bar{\mathrm{V}}_n(x, \bar{g})$, где V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на $\bar{\mathrm{V}}_n$ ([1]), инвариантно связанные с ними ассоциированные римановы пространства второго порядка

$\tilde{V}_n^2(y,\tilde{g})$ и $\tilde{\tilde{V}}_n^2(y,\tilde{\tilde{g}})$. Здесь

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j}y^{l_1}y^{l_2} \qquad (10)$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}(y) = \underset{\circ}{\bar{g}}_{ij} + \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j}y^{l_1}y^{l_2}. \qquad (11)$$

Исследуем специфику отображения $\tilde{\gamma}$ пространства $\tilde{V}_n^2$ на пространство $\tilde{\tilde{V}}_n$, которое индуцируется геодезическим отображением γ исходных пространств.

Для этого найдем тензор деформации

$$\tilde{P}_{ij}^h = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h$$

отображения γ.

Так как пространство $\mathbf{V}_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение на $\bar{\mathbf{V}}_n$, то между компонентами тензора Римана имеется зависимость ([1], [5])

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \psi_{ik}\delta_j^h - \psi_{ij}\delta_k^h. \qquad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{3}\underset{\circ}{R}_{l_1l_2j}^i y^{l_1}y^{l_2} = t_j^i, \qquad (13)$$

$$t_j^{(p+1)i} = t_\alpha^{(p)i}t_j^\alpha, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

$$\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} = A, \quad A^P = \underbrace{A\cdot A\ldots\cdot A}_{P} \qquad (14)$$

Из (12)—(14) методом полной индукции вытекает

Лемма. Для любого натурального n справедливо соотношение

$$\bar{t}_p^h = t_p^h + \sum_{s=1}^{m-1} c_s^m A^s t_n^{(m-s)h} - \psi_{l,\alpha}y^{l_1}y^{l_2}\times$$

$$\times\Big[t_k^{(m-1)\alpha} + \sum_{s=1}^{m-2} c_s^{m-1}A^s t_k^{(m-s)\alpha}\Big] + A^m\delta_k^h - A^{m-1}\psi_{kl}y^l y^h,$$

где C_s^m-биномиальные коэффициенты.

Используя лемму, нетрудно получить следующее утверждение

Теорема 2. *Если риманово пространство* $\mathbf{V}_n$ *допускает нетривиальное геодезическое отображение* γ *на* $\bar{\mathbf{V}}_n$, *то тензор деформации* P_{ij}^h *индуцированного пространства второго порядка* $\tilde{\tilde{V}}_n^2$ *на* $\tilde{V}_n^2$ *имеет следующее строение:*

$$\tilde{P}_{ij}^h = \left(1 - \frac{\beta}{1-\beta}\right)\varphi_{/i}\delta_{j/}^h - \left\{\frac{2}{3}\psi_{\cdot j} + \varphi_\alpha\mu_{ij}^\alpha - 2\varphi_i\varphi_j + \right.$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big[(-1)^{m+1}\Big(\varphi_\alpha t_\beta^{(m-1)\alpha}\mu_{ij}^\beta + \sum_{s=1}^{m-2} c_s^{m-1}\beta^s\varphi_\alpha t_\beta^{(m-s)\alpha}\mu_{ij}^\beta + \beta^{m-1}\varphi_\alpha\mu_{ij}^\alpha\Big) -$$

$$\left. - \varphi_k t_{/i}^{(m-1)\alpha}\varphi_{j/} - \sum c_s^{m-1}\beta^s\varphi_\alpha t_{/i}^{(m-s)\alpha}\varphi_{j/} - 2\beta^{m-1}\varphi_i\varphi_j\Big]\right\}y^h + \qquad (15)$$

$$+ \beta\mu_{ij}^h - \varphi_{/i}t_{j/}^h + \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{(-1)^{m+1}\Big[\sum_{s=1}^{m-1} c_s^m\beta^s t_\alpha^{(m-s)h}\mu_{ij}^\alpha + \beta^m\mu_{ij}^h\Big] - \varphi_{/i}t_{j/}^{(m)h} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} c_s^m\beta^s\varphi_{/i}t_{j/}^{(m-s)h}\Big\},$$

$$\mu^h_{ij}=\frac{1}{3}\underset{\circ}{R}{}^h_{/ij/l}y^h,\quad \varphi_i=\frac{1}{3}\psi_{il}y^l,$$

$$\beta=\frac{1}{3}\underset{\circ}{\psi}_{ij}y^iy^j,\quad \beta^p=\underbrace{\beta\cdot\beta\cdot\ldots\cdot\beta}_{p} \tag{16}$$

Здесь ряды (15) *сходятся абсолютно и равномерно на множестве*

$$\left|\frac{1}{3}\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2}\right|<1-\delta_1,\quad \left|\frac{1}{3}\underset{\circ}{R}{}^{\alpha}_{l_1l_2\beta}y^{l_1}y^{l_2}\right|<1-\delta_2\quad (\delta_i>0).$$

Очевидно, что требование, чтобы отображение $\tilde{y}$ пространства $\tilde{V}^2_n$ на V^2_n было геодезическим, приводит к условию $\underset{\circ}{\psi}_{ij}=0$ вследствие чего $P^h_{ij}=0$, т. е. отображение будет аффинным.

Предположим, что исходные пространства $\mathbf{V}_n$ и $\overline{\mathbf{V}}_n$ являются пространствами ненулевой постоянной кривизны K и $\bar{K}$ соответственно Известно, что данные пространства допускают нетривиальное геодезическое отображение друг на друга ([1], [4]).

В этом случае тензор деформации (15) принимает вид:

$$\tilde{P}^h_{ij}=\tilde{\lambda}_i\delta^h_j+\tilde{\lambda}_j\delta^h_i+\tilde{\mu}_{ij}y^h \tag{17}$$

где

$$\tilde{\lambda}_i=\frac{-\left\{\frac{2k}{3}\underset{\circ}{g}_{il}\left[1+\frac{1}{3}(K\underset{\circ}{g}_{m_1m_2}+\underset{\circ}{\psi}_{m_1m_2})y^{m_1}y^{m_2}\right]-\right.}{\left[1+\frac{1}{3}(K\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}+\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2})y^{l_1}y^{l_2}\right]\left(1+\frac{K}{3}g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right)}-$$

$$-\frac{\left.\underset{\circ}{\psi}_{il}\left(1+\frac{K}{3}\underset{\circ}{g}_{m_1m_2}y^{m_1}y^{m_2}\right)\right\}y^l}{\left[1+\frac{1}{3}(K\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}+\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2})y^{l_1}y^{l_2}\right]\left(1+\frac{K}{3}g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right)}$$

$$\tilde{\mu}_{ij}=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{3}(K\underset{\circ}{g}_{m_1m_2}+\underset{\circ}{\psi}_{m_1m_2})y^{m_1}y^{m_2}\left(1+\frac{K}{3}g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right)\right.}$$

$$\left\{\left(\frac{2K}{3}\right)^2(\underset{\circ}{g}_{ij}\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}-\underset{\circ}{g}_{il_1}\underset{\circ}{g}_{jl_2})\left[1+\frac{1}{3}(K\underset{\circ}{g}_{m_1m_2}+\underset{\circ}{\psi}_{m_1m_2})y^{m_1}y^{m_2}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{K}{3}(\underset{\circ}{g}_{ij}\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2}+\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\underset{\circ}{\psi}_{ij}-\underset{\circ}{g}_{il_1}\underset{\circ}{\psi}_{jl_2}-\underset{\circ}{g}_{jl_1}\underset{\circ}{\psi}_{il_2})+\underset{\circ}{\psi}_{ij}\underset{\circ}{\psi}_{l_1l_2}-\underset{\circ}{\psi}_{il_1}\underset{\circ}{\psi}_{jl_2}\right]\times$$

$$\left.\times\left(1+\frac{K}{3}g_{m_1m_2}\right)y^{m_1}y^{m_2}\right\}y^{l_1}y^{l_2}.$$

Вычисление ковариантной производной для y^h в пространстве $\overline{V}^2_n$ дает

$$y^h_{3k}=\varrho\delta^h_k+\sigma_ky^h,$$

где

$$\varrho = 1 + \frac{\frac{K}{3} \overset{\circ}{g}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}}{1 + \frac{K}{3} \overset{\circ}{g}_{m_1 m_2} y^{m_1} y^{m_2}}, \tag{18}$$

$$\sigma_k = -\frac{K \overset{\circ}{g}_{k\alpha} y^{\alpha}}{3\left(1 + \frac{K}{3} g_{m_1 m_2} y^{m_1} y^{m_2}\right)}.$$

Но условиями (17), (18) характеризуются почти геодезические отображения третьего типа Π_3. Таким образом, справедлива Теорема. 3 Нетривиальное геодезическое отображение γ риманова пространства постоянной кривизны $\mathbf{V}_n$ на пространство $\overline{\mathbf{V}}_n$ индуцирует почти геодезическое отображение третьего типа Π_3 ассоциированного пространства второго порядка $\tilde{V}_n^2$ на пространство $\bar{\tilde{V}}_n^2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Синюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств. М., Наука, 1979, 225с.
[2] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Одесский университет, Одесса, 1979, 17 с., рукопись деп. в ВИНИТИ 19 июня 1979 г., № 2190 — ДЕП.
[3] Покась С. М.: Изометрические и конформные преобразования в ассоцированных риманoвка пространствах второго порядка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Одесса, 1984.
[4] Эйзенхарт Л. П.: Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948.
[5] Петров А. З.: Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966.

AFFINÖSSZEFÜGGŐ ÉS RIEMANN-TEREK SPECIÁLIS, MAJDNEM GEODETIKUS LEKÉPEZÉSEIRŐL

SZ. M. POKASZ, N. V. JABLONSZKAJA

Jelen dolgozatban a szerzők a torzióval rendelkező általános affinösszefüggő terek, valamint a másodrendben asszociált Riemann-terek kölcsönösségi feltételnek eleget tevő, majdnem geodetikus leképezéseit vizsgálják.

ÜBER SPEZIELLE FASTGEODÄTISCHE ABBILDUNGEN VON AFFINZUSAMMENHÄNGENDEN UND RIEMANNSCHEN RÄUMEN

S. M. POKAS, N. V. JABLONSKAJA

In der vorliegenden Arbeit werden fastgeodätische Abbildungen von allgemeinen affinzusammenhängenden Räumen mit Torsion und in zweiter Ordnung assoziierten Riemannschen Räumen, die die Bedingungen der Gegenseitigkeit erfüllen.