*Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis, 1987—1988.*
*Series Physica, Chemica, Mathematica, pp. 51—56.*

# AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT DISZKRIMINÁTOR ÉS A DUÁLIS DISZKRIMINÁTOR-FÜGGVÉNY FÜGGVÉNYTELJESSÉGÉRŐL

VÁRMONOSTORY ENDRE

Az $f$ függvényt *funkcionálisan teljesnek* vagy *függvényteljesnek* nevezzük a $H=\{0, 1, \dots, n-1\}$ $(n \geqq 2)$ halmazon, ha a $H$-n értelmezett összes függvény előáll összetett függvényként az $f$ függvényből, az egyváltozós konstans függvényekből és a projekciókból.

Ebben a dolgozatban folytatjuk annak vizsgálatát, hogy bizonyos $\varrho$-mintafüggvények függvényteljesek-e a $H$-n. Az előző dolgozatokban ([4], [5], [6]) megállapítottuk, hogyha $\varrho$ ekvivalenciareláció, illetve részhalmaz reláció, akkor a $\varrho$-mintafüggvények nem függvényteljesek, ha pedig $\varrho$ permutáció, illetve rendezés, akkor a $\varrho$-mintafüggvények között találtunk függvényteljeseket, illetve nem függvényteljeseket.

Akkor mondjuk, hogy a $H$ halmazon értelmezett $k$-változós $f$ függvény *tiszteli* a $H$-n értelmezett kétváltozós $\varrho$ relációt, ha valahányszor $a_1 \varrho\, b_1, \dots, a_k \varrho\, b_k$ mindannyiszor $f(a_1, \dots, a_k) \varrho\, f(b_1, \dots, b_k)$. Ez a fogalom többváltozós relációkra hasonlóan definiálható.

Egy $H$ véges halmazon értelmezett $f$ függvény függvényteljességének eldöntésére Rosenberg tételének [3] az alábbi következményét mint segédtételt fogjuk használni:

*Segédtétel. Az f függvény akkor és csak akkor függvényteljes, ha nem tiszteli:*

a) *a H-n értelmezett korlátos (azaz legkisebb és legnagyobb elemmel bíró) parciális rendezéseket,*

b) *az* $\{\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle \in H^4 | a_0+a_1=a_2+a_3\}$ *alakú négyváltozós relációkat, ahol* $\langle H, +\rangle$ *egy kommunatív elemi p csoport* (p prím),

c) *a nem triviális ekvivalenciareláció*kat $H-n$,

d) *a legalább kétváltozós centrális relációkat* $H-n$,

e) *a* $H-n$ *értelmezett, h-reguláris T ekvivalencia-család által meghatározott* $\lambda_T$ *relációkat.*

*Definíció.* A $H$ halmazon értelmezzük az alábbi $k$-változós $(k \geqq 3)$ függvényeket, ahol $\varrho$ tetszőleges permutáció *H-n:*

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_1 \varrho x_2 \dots \varrho x_{k-1}, \\ x_1 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(2) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \varrho x_2 \dots \varrho x_{k-1}, \\ x_k & \text{különben.} \end{cases}$$

*1. Tétel. Ha* $\varrho$ *a H halmaz egy tetszőleges permutációja, ekkor az* (1), (2) *alatt definiált f, g* $\varrho$*-mintafüggvények függvényteljesek H-n.*

*Megjegyzés.* A tétel Werner [7] és Fried—Pixley [2] függvényteljességi eredményének általánosítása. Ha $\varrho$ identikus permutáció és $k=3$, akkor az $f$ függvény az ún. *ternáris diszkriminátor,* a $g$ függvény az ún. *duális diszkriminátor.*

*Bizonyítás.* A segédtétel alapján azt kell belátnunk, hogy az $f$, illetve a $g$ függvény nem tiszteli az a)—e) relációkat.

a) Legyen $s(\in H)$ és $s\neq n-1$, $\varrho(s)\neq n-1$. Ekkor

$$\begin{array}{rcl} s & \leqq & s \\ \varrho(s) & \leqq & n-1 \\ \varrho^2(s) & \leqq & n-1 \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho^{k-2}(s) & \leqq & n-1 \\ n-1 & \leqq & n-1 \\ \hline n-1 & \nleqq & s. \end{array}$$

Tehát $f$ nem tiszteli a $H$-n értelmezett korlátos parciális rendezéseket. Hasonlóan igaz a $g$ függvényre is. Ha ugyanis az $s\neq n-1$ helyett $s\neq 0$-t, a táblázat utolsó két sorába $n-1\leqq n-1$ helyett $0\leqq 0$-t, $n-1\nleqq s$ helyett $s\nleqq 0$-t írunk, akkor kapjuk a $g$-re vonatkozó állítást.

b) A következőkből látható, hogy az $f$ nem tiszteli a b)-beli relációkat:

$$\begin{array}{cccc} \langle 1, & 1, & 1, & 1\rangle \\ \langle \varrho(1), & \varrho(1), & a, & b\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(1), & \varrho^{k-2}(1), & \varrho^{k-2}(1), & \varrho^{k-2}(1)\rangle \\ \langle 0, & 1, & 0, & 1\rangle \\ \hline \langle 0, & 1, & 1, & 1\rangle. \end{array}$$

Hasonlóan bizonyítható ez a $g$ függvényre is. Ha ugyanis a táblázat utolsó előtti sorába $\langle 1, 0, 1, 0\rangle$, utolsó sorába $\langle 1, 1, 1, 0\rangle$ kerül, akkor kapjuk a $g$-re vonatkozó állítást.

c) Legyen $\sigma$ tetszőleges nem triviális ekvivalenciareláció. Van olyan $a, b, c$ $(\in H)$, hogy $a\neq b$, $a\sigma b$ és $b\bar{\sigma}c$. Ekkor az alábbi sémából következik az állítás:

$$\begin{array}{ccc} a & \sigma & b \\ \varrho(a) & \sigma & \varrho(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho^{k-2}(a) & \sigma & \varrho^{k-2}(a) \\ c & \sigma & c \\ \hline c & \bar{\sigma} & b. \end{array}$$

Hasonlóan igaz a $g$ függvényre is, ami az alábbi táblázatból látszik:

$$\begin{array}{ccc} a & \sigma & b \\ \varrho(a) & \sigma & \varrho(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho^{k-2}(a) & \sigma & \varrho^{k-2}(a) \\ c & \sigma & c \\ \hline a & \bar{\sigma} & c. \end{array}$$

d) Ha $\varrho$ centrális reláció, akkor van olyan $\langle b_0, b_1, \dots, b_{k-1}\rangle \notin \sigma$. Legyen $a_0$ a centrumban, ekkor a

$$\begin{array}{llll}
\langle a_0, & b_1, & \dots, & b_{k-1}\rangle \in \sigma \\
\langle \varrho(a_0), & \varrho(a_0), & \dots, & \varrho(a_0)\rangle \in \sigma \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\langle \varrho^{k-2}(a_0), & \varrho^{k-2}(a_0), & \dots, & \varrho^{k-2}(a_0)\rangle \in \sigma \\
\langle b_0, & b_0, & \dots, & b_0\rangle \in \sigma \\
\hline
\langle b_0, & b_1, & \dots, & b_{k-1}\rangle \notin \sigma
\end{array}$$

táblázatból látszik az állítás.
A $g$ függvényre ugyanez az állítás így látható be:

$$\begin{array}{lllll}
\langle b_0, & a_0, & b_2, & \dots, & b_{k-1}\rangle \in \sigma \\
\langle \varrho(b_0), & \varrho(b_0), & \varrho(b_0), & \dots, & \varrho(b_0)\rangle \in \sigma \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\langle \varrho^{k-2}(b_0), & \varrho^{k-2}(b_0), & \varrho^{k-2}(b_0) & \dots, & \varrho^{k-2}(b_0)\rangle \in \sigma \\
\langle a_0, & b_1, & b_2, & \dots, & b_{k-1}\rangle \in \sigma \\
\hline
\langle b_0, & b_1, & b_2, & \dots, & b_{k-1}\rangle \notin \sigma
\end{array}$$

e) Legyen $\lambda_T$ a $H$ halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk: egy $h$-reguláris $T$ családjához tartozó reláció. Könnyen látható, hogy létezik olyan $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, \dots, a_{h-1}\rangle \in H^h$, amely nincs $\lambda_T$-ben. Mivel $\lambda_T$ minden olyan elem —$h$-ast tartalmaz, amelynél vannak megegyező komponensei, az $a_0, \dots, a_{h-1}$ elemek páronként különbözők, s az alábbi táblázat mutatja, hogy $f$ nem tiszteli $\lambda_T$-t.

$$\begin{array}{lllll}
\langle a_0, & a_0, & a_2, & \dots, & a_{h-1}\rangle \in \lambda_T \\
\langle \varrho(a_1), & \varrho(a_0), & \varrho(a_0), & \dots, & \varrho(a_0)\rangle \in \lambda_T \\
\vdots & & & & \vdots \\
\langle \varrho^{k-2}(a_1), & \varrho^{k-2}(a_0), & \varrho^{k-2}(a_0), & \dots, & \varrho^{k-2}(a_0)\rangle \in \lambda_T \\
\langle a_1, & a_1, & a_1, & \dots, & a_1\rangle \in \lambda_T \\
\hline
\langle a_0, & a_1, & a_2, & \dots, & a_{h-1}\rangle \notin \lambda_T
\end{array}$$

Az $f$ függvényhez hasonlóan $g$ sem tiszteli $\lambda_T$-t.

$$\begin{array}{llll}
\langle a_0, & a_0, & \dots, & a_0\rangle \in \lambda_T \\
\langle \varrho(a_0), & \varrho(a_1), & \dots, & \varrho(a_1)\rangle \in \lambda_T \\
\vdots & & & \vdots \\
\langle \varrho^{k-2}(a_0), & \varrho^{k-2}(a_1), & \dots, & \varrho^{k-2}(a_1)\rangle \in \lambda_T \\
\langle a_1, & a_1, & \dots, & a_{h-1}\rangle \in \lambda_T \\
\hline
\langle a_0, & a_1, & \dots, & a_{h-1}\rangle \notin \lambda_T.
\end{array}$$

*Definíció.* Legyen $K = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ $a \leqq$ reláció szerint parciálisan rendezett halmaz, ahol minden $i$-re $e_0 \leqq e_i \leqq e_{n-1}$ $(n \geqq 2)$. Értelmezzük a $K$ halmazon az alábbi $k$ változós $(k \geqq 3)$ függvényeket:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_{k-1}, \\ x_k & \text{különben,} \end{cases} \tag{3}$$

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_{k-1}, \\ x_1 & \text{különben.} \end{cases} \tag{4}$$

*2. Tétel. Ha a $\leqq$ az előbb definiált parciális rendezése a K-nak, akkor a h és a p függvények függvényteljesek K-n.*

*Megjegyzés.* A 2. tétel a *ternáris* és a *duális diszkriminátorra* ([7], [2]) vonatkozó függvényteljességi eredményeket tetszőleges ($k \geqq 3$) változós függvényre és a $K$ halmaz tetszőleges parciális rendezésére viszi át.

*Bizonyítás.* Ha $k>3$, akkor a $h(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ és a $p(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvényekből a változók azonosításával kapjuk az

$$s(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \leqq x_2, \\ x_3 & \text{különben,} \end{cases}$$

és a

$$z(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{ha } x_1 \leqq x_2 \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt. A tétel bizonyításához az $s$ és $z$ függvény függvényteljességét kell belátnunk. A $z$ függvény függvényteljességét az előző dolgozatban [6] bebizonyítottuk. Az $s$ függvény függvényteljességének bizonyításához a segédtételt használjuk fel.

a) $e_0 < a < e_{n-1}$, ekkor:

$$\begin{array}{c} a \leqq a \\ e_0 \leqq e_{n-1} \\ \underline{e_{n-1} \leqq e_{n-1}} \\ e_{n-1} \nleqq a. \end{array}$$

b) Ez az alábbiakból leolvasható:

$$\begin{array}{c} \langle e_1, \ e_1, \ e_1, \ e_1 \rangle \\ \langle e_0, \ e_{n-1}, \ e_{n-1}, \ e_0 \rangle \\ \underline{\langle e_1, \ e_0, \ e_1, \ e_0 \rangle} \\ \langle e_1, \ e_1, \ e_1, \ e_0 \rangle. \end{array}$$

c) Legyen $a, b, c \in K$, $a<b$, $a\sigma b$ és $a\bar{\sigma}c$. Ekkor

$$\begin{array}{c} b \ \sigma \ b \\ b \ \sigma \ a \\ \underline{c \ \sigma \ c} \\ b \ \bar{\sigma} \ c. \end{array}$$

Ha $a$ és $b$ nem összehasonlíthatók, akkor az állítás hasonlóan bizonyítható.

d) Az $s$ függvény nem tiszteli a legalább kétváltozós centrális relációkat.

1) Legyen $\sigma$ legalább kétváltozós centrális reláció $K$-n, $\langle b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle \notin \sigma$, $c_0$ centrum elem és $c_0 < b_0$ vagy nem összehasonlíthatók. Ekkor

$$\begin{array}{c} \langle b_0, \ b_0, \ b_2, \ \ldots, \ b_{k-1}\rangle \in \sigma \\ \langle c_0, \ b_0, \ b_2, \ \ldots, \ b_{k-1}\rangle \in \sigma \\ \underline{\langle b_1, \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_{k-1}\rangle \in \sigma} \\ \langle b_1, \ b_0, \ b_2, \ \ldots, \ b_{k-1}\rangle \notin \sigma. \end{array}$$

Ha $c_0 > b_0$ hasonlóan bizonyítható.

e) Legyen $\lambda_T$ a $K$ halmazon értelmezett ekivalenciarelációk: egy $h$-reguláris $T$ családjához tartozó reláció. Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in (K)$, ahol $a_i < a_j$ vagy nem összehasonlíthatók, $0 \geqq i < j \leqq h-1$ esetén $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{h-1} \rangle \notin \lambda_T$. Ekkor

$$\frac{\begin{array}{l} \langle a_0, a_1, a_1, \ldots, a_1 \rangle \in \lambda_T \\ \langle a_0, a_0, a_0, \ldots, a_0 \rangle \in \lambda_T \\ \langle a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1} \rangle \in \lambda_T \end{array}}{\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1} \rangle \notin \lambda_T.}$$

**Közelprojekció kiterjesztése lineáris rendezésre**

*3. Tétel. Legyen $H = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ lineárisan rendezett halmaz a 0 és $n-1$ legkisebb ,illetve legnagyobb elemekkel. A*

$$(5) \qquad t_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_i \leqq x_j, \quad (1 \leqq i < j \leqq k) \text{ valamely } (i, j) \text{ párra,} \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

*függvény nem függvényteljes a H halmazon.*

*Megjegyzés.* A $t_k$ függvény a közelprojekció kiterjesztése lineáris rendezésre. A $k$-változós közelprojekció függvényteljes, ha $k \geqq 3$ [1].

*Bizonyítás.* Definiáljuk a $\sigma$ kétváltozós centrális relációt: $\sigma = H^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ és $\{3, \ldots, n-1\}$ a centrum. Közvetlenül belátható, hogy $t_k$ tiszteli a $\sigma$ relációt. A projekciók, a konstans függvények is tisztelik $\sigma$-t. Így ezekből csak a $\sigma$-t tisztelő függvények állnak elő összetett függvényként.

IRODALOM


[1] B. Csákány: Homogeneus algebras are functionally complete, Algebra Universalis, 11/1980. 149—158.;

[2] E. Fried, A. F. Pixley: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math. 41/1979., 83—100.;

[3] I. G. Rosenberg: Completeness properties of multiple-valued logic algebra, in Computer Science and Multiple Logic, Theory and Applications, North Holland, 1977.;

[4] E. Vármonostory: Relational pattern functions, „Finite Algebra and Many-valued Logic", Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 28., 1981.;

[5] Vármonostory Endre: A $\varrho$-mintafüggvények funkcionális teljessége, A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, Szeged, 1980.;

[6] Vármonostory Endre: A $\varrho$-mintafüggvények funkcionális teljessége, ha $\varrho$ rendezés, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, Szeged, 1985.;

[7] H. Werner: Diskriminator-Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1980.


## ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGKEIT DES VERALLGEMEINERTEN DISKRIMINATORS BZW. DES DUALEN DISKRIMINATORS


E. VÁRMONOSTORY



Es wird bewiesen, dass gewisse $\varrho$ — Musterfunktionen funktional vollständig sind, wenn $\varrho$ eine Permutation oder eine teilweise Ordnung bedeutet. Es handelt sich ferner um eine Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses von Werner und Pixley.

# О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ ОБОБЩЕННОЙ ДИСКРИМИНАТОРНОЙ И ДУАЛЬНО-ДИСКРИМИНАТОРНОЙ ФУНКЦИИ

ВАРМОНОШТОРИ, ЭНДРЕ

**Доказывается функциональная полнота некоторых $\varrho$ — трафаретных функций если подстановка или частичное упорядочение. Обобщаются известные результаты Вернера и Фрида — Пиксли.**