

## A MIKROHULLÁMÚ MELEGÍTÉS HŐTRANSPORT MODELLJÉNEK KIDOLGOZÁSA DIMENZIÓANALÍZISSEL

SZABÓ GÁBOR

*Élelmiszeripari Műveletek és Berendezések Tanszék*

### ÖSSZEFOGLALÓ

*A közlemény a melegítés, mint élelmiszeripari művelet problémaköréből kiindulva ismerteti a mikrohullámú melegítés elvét, fizikai alapjait, a mikrohullámú melegítést befolyásoló tényezőket.*

*A hőtransport folyamat, a mikrohullámú termikus műveletekben lényegében a hagyományos hőátvitel differenciálegyenleteivel írható le. A különbség az, hogy dielektromos melegítéskor egy öngerjesztő automatizmus révén az anyagban belső (hő)energiaforrás működik, - hasonlóan a hőtermeléssel járó exotermikus kémiai reakciókhoz - és ezt a transzportegyenlet felírásakor figyelembe kell venni.*

*A szerző a dimenzióanalízist a matematikai modell fontosabb dimenzió nélküli komplexeinek meghatározására alkalmazta, amellyel a mikrohullámú melegítési folyamatot írta le.*

### 1. A MIKROHULLÁMÚ HŐKÖZLÉS SAJÁTOSSÁGAI

*A mikrohullámú hőközlés a tömegegységnyi anyagokba bevihető energiaáram lehetséges mennyisége, valamint a hőközlés hatására az anyagban kialakuló egyenletes hőmérsékleteloszlás következtében a hagyományos egyéb hőközlési módokkal szemben komoly előnyöket nyújt.*

*A hagyományosnak tekinthető hőközlési módok többségét (a kontakt-, a konvekciós-, az infravörös sugárzással történő hőközlést) az jellemzi, hogy a hőáram az anyag felületén keresztül jut az anyagba. Az anyag belső rétegeibe tehát vezetés útján jut a hő. A kezelt anyagok többsége azonban rossz hővezető, ezért ezek csak igen intenzív hőközléssel kezelhetők. A nagy hőáram viszont minőségrontó helyi túlmelegedést okozhat.*

A mikrohullámú termikus kezelésre az jellemző, hogy a hőközlés nem az anyag felületén keresztül, hanem az anyag belsejében zajlik le. Ez esetben úgy tekinthetjük, hogy az anyagban belső energiaforrás működik, amelynek disszipált hőárama az anyagban egyenletesen oszlik el. Ez a sajátosság megnehezíti a matematikai-fizikai modellalkotást.

## 2. A HŐTRANSPORT DIFFERENCIÁL EGYENLETEI

Általánosságban a transzportfolyamatokban az impulzus-, hő- és anyagnennyiség lokális és konvektív változását vezetés, (átadás), valamint magában a rendszerben keletkező transzport források okozzák.

$$\text{lokális változás} + \text{konvekció} = \text{vezetés} + \text{forrás}$$

A mikrohullámot alkalmazó termikus műveletekben a hőtranszport - instacioner hővezetés esetén - lényegében a hagyományos hőátvitel (Fourier-törvény) differenciálegyenleteivel írható le. A különbség az, hogy dielektromos melegítéskor egy öngerjesztő automatizmus révén az anyagban belső (hő)energiaforrás működik ( $\varphi_v$ ), - hasonlóan a hőtermeléssel járó exotermikus kémiai reakciókhoz - és ezt a transzportegyenlet felírásakor figyelembe kell venni.

A legtöbb mérnöki probléma kapcsán - így a mikrohullámú kezelésre is érvényesen - a Fourier-egyenlet egy- vagy kétdimenziós esetre redukált alakját alkalmazhatjuk azzal, hogy a sugárzásos hőtranszportot a mikrohullámú melegítés során keletkező felületi hőmérsékleti szinten elhanyagolhatjuk.

A lemez-, henger- és gömbalak egydimenziós vezetési instacioner hőátvitelére az alábbi egyenletek alkalmazhatók:

$$\text{Lemmezre:} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\varphi_v}{\lambda} \right) \text{ (derékszögű koordinátákkal)} \quad (1)$$

$$\text{Hengerre:} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varphi_v}{\lambda} \right) \text{ (hengerkoordinátákkal)} \quad (2)$$

$$\text{Gömbre:} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varphi_v}{\lambda} \right) \text{ (gömbkoordinátákkal)} \quad (3)$$

Fourier fundamentális egyenleteiből levezethető kétdimenziós ( $z, x, z, r$  ( $r, \varphi$ ) koordináta rendszerben) vezetési hőátvitel transzportegyenletei az alábbiak szerint alakulnak:

$$\text{Lemezre} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\varphi_V}{\lambda} \right) \quad (4)$$

$$\text{Hengerre:} \quad x = r \cdot \cos \phi, \quad y = r \cdot \sin \phi, \quad \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\varphi_V}{\lambda} \right) \quad (5)$$

$$\text{Gömbre:} \quad x = r \cdot \cos \phi \cdot \sin \varphi, \quad y = r \cdot \sin \phi \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \varphi, \quad \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\varphi_V}{\lambda} \right) \quad (6)$$

A fenti egyenletek alkalmazhatóságának feltétele a kezelt termék homogenitása, illetve hengerforma esetén a tengelyszimmetrikusság.

Az általánosan felírt parciális differenciálegyenletek analitikus megoldása igen nehéz, mivel a gerjesztett belső energiaforrás ( a térfogat egységben keletkező hő ( $\varphi$ ) a dielektrikumra jellemző nemlineáris változó, amely függvénye az időnek és a hőmérsékletnek.

Az idő - hőmérséklet profil eloszlásra közelítő numerikus megoldást a véges differencia módszer alkalmazásával kaphatunk úgy, hogy az anyag termikus jellemzőit konstansnak vesszük, (vagy korrektebb megoldás esetén figyelembe vesszük a hőmérsékletfüggést), a gerjesztett belső energiaforrás tagot pedig diszkrét időintervallumokra vonatkoztatva az anyag elektrofizikai tulajdonságaival (relatív dielektromos állandó, veszteségi szög) adjuk meg.

Kétségtelen, hogy a mikrohullámú termikus kezelés során lejátszódó vezetéssel hőtranszportot fent megadott matematikai modellje meglehetősen pontosan írja le a jelenséget, a numerikus megoldás azonban számtalan körülmény miatt pontatlan. Többek között a klasszikus geometriai alakzatokkal kell modellezni a kezelt anyagot, ami önmagában is jelentős mértékű közelítést jelent. Említhetjük továbbá azt is, hogy egyes anyagok esetében (pl. hüvelyes magvak) a viszonylag tömör pórusos héjszerkezet jelentősen befolyásolja a hő- (és nedvesség) transzportot.

A fentiekből is kitűnik, hogy célszerű kísérleti úton eljutni a megoldáshoz oly módon, amely lehetővé teszi a kísérleti eredmények általánosítását és a gyakorlatban jól alkalmazható matematikai-fizikai modell megalkotását.

### 3. MODELLALKOTÁS DIMENZIÓANALÍZISSEL

*A mikrohullámú termikus kezelést befolyásoló nagyszámú paraméterek közötti összefüggés megkeresésére és végeredményben számítási egyenlet megtalálására a dimenzióanalízis módszerét alkalmaztuk.*

*A szójabab mikrohullámú kezelésével kapcsolatos kutatásaink során (Szabó, et al., 1994) bizonyítottuk, hogy a művelet számtalan eljárásparamétertől és anyagi jellemzőitől (lásd 1. táblázat) függ. Az adott mennyiségek közötti összefüggés implicit alakja az alábbiak szerint írható fel:*

$$\varphi(\tau, t_0, t - t_0, c_p, \lambda, \rho, w, \kappa, f, P, R, y, x, H, p - p_0) = 0 \quad (7)$$

*A gyakorlati modellalkotás követelményei, valamint a hőtranszportot leíró egyenlet alapján, célszerű az eredményváltozónak a kezelési időt ( $\tau$ ) venni. Így a (7) egyenlet explicit alakja:*

$$\tau = F(t_0, t - t_0, c_p, \lambda, \rho, w, \kappa, f, P, R, y, x, H, p - p_0) \quad (8)$$

*A fenti általános függvény bizonyos intervallumban legyen közelíthető a benne szereplő mennyiségek következő alakú hatványfüggvényeként:*

$$\tau = C \cdot t_0^{n_1} \cdot (t - t_0)^{n_2} \cdot c_p^{n_3} \cdot \dots \cdot (p - p_0)^{n_5} \quad (9)$$

*ahol  $n_1$  és a  $C$  konstans kísérletileg meghatározandó számértékek.*

*Alkalmazva Buckingham - féle  $\pi$ -tételt megállapíthatjuk, hogy a függvény 15 fizikai mennyiséget tartalmaz és ezek a mennyiségek 4 alapegység (tömeg, dimenziója  $M$ , hosszúság, dimenziója  $L$ , idő, dimenziója  $T$ , hőmérséklet, dimenziója  $\theta$ ) fejezhető ki.*

*Következésképpen, a függvényösszefüggés 11 (15-4) dimenzió nélküli komplex,  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{11}$  közötti függvényként írható fel. A dimenzió nélküli komplexeket a 2. táblázatban definiáltuk.*

1. táblázat: A matematikai-fizikai modell vonatkozó paraméterei

<i>Menyiség</i>	<i>Jelölés</i>	<i>Mértékegység</i>	<i>Dimenzió</i>
Kezelési idő	$\tau$	s	T
Lokális hőmérséklet	$t$	C	
Kezdeti hőmérséklet	$t_0$	C	
Fajhő	$c_p$	$\text{kJkg}^{-1}\text{C}^{-1}$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Hővezetési tényező	$\lambda$	$\text{kJ s}^{-1}\text{m}^{-1}\text{C}^{-1}$	$MLT^{-2}\theta^{-1}$
Sűrűség	$\rho$	$\text{kgm}^{-3}$	$ML^{-3}$
Újranedvesítés mértéke	$w$	$\text{kgkg}^{-1}$	$MM^{-1}$
Veszteségi tényező	$\kappa''$	dimenzió nélk.	1
Mikrohullámú frekvencia	$f$	Hz	$T^{-1}$
Mikrohullámú teljesítmény	$P$	kW	$ML^2T^{-3}$
Sugár	$R$	m	L
Felülettől mért távolság	$y$	m	L
Sugár irányú távolság	$x$	m	L
A minta jellemző mérete	$H$	m	L
Vákuum értéke	$p_0$	Pa	$MT^{-2}L^{-1}$

A (8) összefüggés a következő alakban írható fel:

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{11}) \quad (10)$$

illetve általános formában

$$\pi_1 = C \cdot \pi_2^{c_2} \cdot \pi_3^{c_3} \cdot \dots \cdot \pi_{11}^{c_{11}} \quad (11)$$

A (11) összefüggést linearizálhatjuk az alábbi formában:

$$\ln \pi_1 = \ln C + c_2 \cdot \ln \pi_2 + c_3 \cdot \ln \pi_3 + \dots + c_{11} \cdot \ln \pi_{11} \quad (12)$$

2. táblázat: Független dimenzió nélküli komplexek

$\pi$ érték	Összefüggés	Értelmezés
$\pi_1$	$f \cdot \tau$	A frekvencia és a kezelési idő szorzata
$\pi_2$	$\frac{t - t_0}{t_0}$	A hőmérsékletnövekedés és a kezdeti hőmérséklet aránya
$\pi_3$	$\frac{\rho \cdot y^5 \cdot f^3}{P}$	y távolságon az energiatranszport és a közölt mikrohullámú energia aránya
$\pi_4$	$\frac{\rho \cdot c_p \cdot f \cdot y^3 \cdot (t - t_0)}{P}$	Az abszorbeált energia és a közölt mikrohullámú energia aránya
$\pi_5$	$\frac{x}{R}$	A sugár irányú távolság és a sugár aránya
$\pi_6$	$\frac{(t - t_0) \cdot \lambda}{f^3 \cdot \rho \cdot y^4}$	A vezetési hőáram osztva az anyag egységnyi tömegével
$\pi_7$	$\kappa''$	Veszteségi tényező
$\pi_8$	$\frac{x}{H}$	A tennékvastagság és a felülettől mért távolság aránya
$\pi_9$	$\frac{y}{x}$	A felülettől mért távolság és a sugár irányú távolság aránya
$\pi_{10}$	$\frac{p - p_0}{p}$	A vákuum és az abszolút nyomás aránya
$\pi_{11}$	$\nu$	Az újranedvesítés mértéke

Az együtthatók és a konstans értéke stepwise változó szelekcióval határozható meg megfelelő számú kísérleti adat birtokában. Megjegyezzük, hogy a (12) linearizált egyenlet az eljárásparaméterek meghatározott, diszkrét tartományaira érvényes.

Kutatásaink következő lépése a korrekt kísérlettervezési módszer alkalmazásával a (12) egyenlet megoldásához szükséges mérések elvégzése, az eredmények matematikai statisztikai módszerrel történő kiértékelése, az érvényességi kísérleti tartományok meghatározása. Előzetesen ezzel a problémával foglalkozik Rajkó (1994) közleménye.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

Decareau, R.V. (1985): *Microwaves in the Food Processing Industry*. Academic Press, Orland, Flor.

Olson, T., Bengtsson, N.E. (1971): *Microwave heating profiles in foods*. *Microwave Energy Appl. Newsl.* 4 (6),3.

Rajkó, R. (1994): *Lineáris és linearizált függvénykapcsolatok kiértékelése*. *Élelmiszeripari Főiskola, Tudományos Közlemények*, 17.

Szabó, G., Dörnyei, J., Szilágyi, J. (1987): *A mikrohullámú energia hatása vérplazma és színtelenített teljes vérpor diszperz szerkezetének alakulására az agglomerálási-szárítási folyamat során*. *Élelmiszeripari Főiskola, Tudományos Közlemények*, 14, 81-87.

Szabó, G., Dörnyei, J. (1988): *Development of an Equipment for Combinational Microwave and Hot Air Agglomerating-Drying for Food Powders*. 6th International Drying Symposium. IDS'88. *Keynote Lectures, Versailles*. Vol. 1 209-215.

Szabó, G. (1990): *Gyorsfagyasztott baromfiipari termékek mikrohullámú felengedtetése üregezonátoros kezelő térben*. *Hűtőipar*, 1, 14-20.

Szabó, G. (1990) *Élelmiszer- és biotechnológiai műveletek intenzifikálása mikrohullámú energiával*. IV. Vegyipari Gépészeti Konferencia, Budapest. 2, 405-419.

Szabó, G. (1991): *A mikrohullámú technika alkalmazása az élelmiszeripari és biotechnológiai gyakorlatban*. *Szeszipar*, 4, 124-127.

Szabó, G. (1989): *Possibility of Using Microwave Techniques in Some Operations of Food and Biotechnology*. *Proceedings of the Vth Scientific Symposium of Socialist Countries on Biotechnology*. Hungary. Vol. 2, 45-48.

Szabó, G. (1990): *A mikrohullámú technika alkalmazása élelmiszerporok agglomeráló-szárító eljárásának intenzifikálására*. *Lippay János tudományos ülészak, Budapest*. pp. 151-153.

Szabó, G. (1992): *Élelmiszer-és Biotechnológiai műveletek intenzifikálása mikrohullámú energiával*. *Lippay János tudományos ülészak, Budapest*. pp. 358-361.

Szabó, G., Rajkó, R., Kovács, E., Papp, G.-né., Hotya, L.-né. (1994): *A mikrohullámú kezelés hatása a szójabab minőségére*. *Élelmiszeripari Főiskola, Tudományos Közlemények*, 17.

Wong, H.Y. (1983): *Hőátadási zsebkönyv*. Műszaki könyvkiadó, Budapest. pp. 46-61.

*DEVELOPMENT OF HEAT TRANSFER MODEL FOR  
MICROWAVE HEATING BY DIMENSIONAL ANALYSIS*

*G. SZABÓ*

*University of Horticulture and Food Industry  
College of Food Industry  
H-6701 Szeged, P.O. Box 433.*

*ABSTRACT*

*Starting from the problem of heating process as food industrial unit operation, this paper introduces the principal, the physical basis of microwave heating and the factors influencing it.*

*Heat transfer in microwave heating process may be represented by the same equations as those in conventional heating except that, in addition, the coupling of electrical energy from the field introduces an internal heat generation term similar to that required in the analysis of exothermic chemical reactions.*

*Dimensional analysis was used by the author to develop meaningful dimensionless terms for mathematical model to describe the microwave heating process.*