LINEARIZÁLT FÜGGVÉNYKAPCSOLATOK KIÉRTÉKELÉSE AZ APRÍTÁS ÉS SZŰRÉS MŰVELETEKRE VONATKOZÓAN

RAJKÓ RÓBERT és SZABÓ GÁBOR

Élelmiszeripari Műveletek és Berendezések Tanszék

ÖSSZEFOGLALÓ

Az aprítás során keletkező őrlemények szemcsemegoszlásának jellemzésére a gyakorlatban legelterjedtebben a Rosin-Rammler-Bennett-(RRB)-féle diagramhálót alkalmazzák, melynek segítségével az n egyenletességi tényező és az x_0 *közepes szemcseméret, ill. az* A_f *fajlagos felület is meghatározható. Az RRB-eloszlás matematikai alakja könnyen linearizálható, így a lineáris legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó számítógépes program segítségével is számíthatók az n, ill.* x_0 *paraméterek. A dolgozat elsőként az RRB-egyenlet linearizálása során felmerülő matematikai statisztikai kezelés szükségszerűségét mutatja be a megfelelő súlyozás alkalmazásának hangsúlyozásaként.*

A szűrés műveletét az esetek többségében a Carman-féle szűrőegyenlet segítségével lehet leírni. Bizonyos esetekben (pl. gyümölcs- és zöldséglényeréssel kapcsolatban, ill. tömény szuszpenziók, zagyok, iszapok szétválasztása során) a Carman-féle egyenlet nem érvényes. Ekkor a Horváth Imre által javasolt telítési jellegű matematikai modell alkalmazható. A dolgozat különböző linearizálási lehetőséget mutat be, ezeket összehasonlítja egzakt matematikai statisztikai kritériumok alapján.

Két példán keresztül jól érzékelhető, hogy a mérések jellegéből fakadó bizonytalanság korrekt matematikai statisztikai kezelése feltétlenül szükséges, még az egyszerű, jól kezelhető matematikai modellek esetében is.

1. Linearizált függvénykapcsolat alkalmazása az aprítás műveleténél

Az aprítással nyert őrlemény szitaanalízissel történő vizsgálata kb. 60 μm legkisebb szemnagyságig ad statisztikailag megbízható eredményeket.

Az élelmiszeriparban sok esetben e méret feletti őrleményeket kapunk, ezért a Rosin-Rammler-Bennett-(RRB)-féle diagramháló alkalmazása igen elterjedt

Lektor: Dr.Horváth István egyetemi docens, BME

az ilyen őrlemények jellemző paramétereinek meghatározásához (Beke 1963, Véha 1994). Az RRB-egyenlet szokásos alakja:

$$R(\%) = 100e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}, \qquad (1)$$

ahol R(%) a kumulált szitamaradék, x az aktuális szemcseméret, x_0 a közepes szemcseméret, n az egyenletességi tényező. Ezt az egyenletet átalakíthatjuk, ha a reciprok képzés után mindkét oldal természetes alapú logaritmusát vesszük kétszer:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{R(\%)}\right)\right) = n\ln(x) - n\ln(x_0). \qquad (2)$$

Az RRB-diagramháló az abszcisszán a szemnagyság logaritmusát és az ordinátán a szitamaradék reciprok értékének kétszeres logaritmusát alkalmazó skálabeosztás mellett a szemcseeloszlás egyenessel való gyors ábrázolhatóságát teszi lehetővé.

Amennyiben pontosabb eredményre van szükség, a lineáris legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó számítógépes program segítségével számíthatók az n, ill. x_0 paraméterek. Ekkor azonban szükséges bizonyos matematikai statisztikai elveken alapuló korrekció, azaz a megfelelő súlyozás alkalmazása (Kemény és Deák 1990, Rajkó 1994).

A nemlineáris legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása során a

$$QF_{nl} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_p)\right)^2 \qquad (3)$$

célfüggvény minimalizálása általában nemlineáris egyenletrendszerhez vezet, de alkalmasan választott F(.) transzformációval paraméterekben lineárissá tehető az eredeti f(.) függvénykapcsolat. Mivel a lienarizált formával általában torzított becsléseket kapunk - az eredeti mérési hibák is transzformálódnak -, alkalmasan választott súlyok segítségével kell a torzítást elhanyagolhatóvá tenni:

$$QF_{nl} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\right)^2 \approx QF_{sl} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(F(y_i) - F(f(x_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p))\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2_{y_i}} \qquad (4)$$

Esetünkben az F(.) transzformáció: a reciprokképzés és az azt követő kétszeres logaritmus alkalmazása. A súlyokat is egyszerűen számíthatjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial R}\ln\left(\ln\left(\frac{100}{R}\right)\right)\Bigg|_{R_i}=-\frac{1}{R_i\left(\ln(100)+\ln\left(\frac{1}{R_i}\right)\right)}$$

$$w_i=\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}=\left(R_i\left(\ln(100)+\ln\left(\frac{1}{R_i}\right)\right)\right)^2 \qquad (5)$$

A transzformált Y és X változókkal felírt $Y = a_1 X + a_0$ összefüggésben a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével az a_1 meredekség és az a_0 tengelymetszet becsülhető:

$$Y=\ln\ln\left(\frac{100}{R}\right)$$

$$X=\ln(x)$$

$$\hat{a}_1=\frac{\sum w_i\sum w_i\cdot X_i\cdot Y_i-\sum w_i\cdot X_i\sum w_i\cdot Y_i}{\sum w_i\sum w_i\cdot X_i^2-\left(\sum w_i\cdot X_i\right)^2} \qquad (6)$$

$$\hat{a}_0=\frac{\sum w_i\cdot X_i^2\sum w_i\cdot Y_i-\sum w_i\cdot X_i\sum w_i\cdot X_i\cdot Y_i}{\sum w_i\sum w_i\cdot X_i^2-\left(\sum w_i\cdot X_i\right)^2}$$

Az $\hat{a}_1$ meredekség és az a_0 tengelymetszet segítségével megadható az n egyenletességi tényező és az x_0 közepes szemcseméret is:

$$n=\hat{a}_1$$

$$x_0=\exp\left(-\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_1}\right). \qquad (7)$$

Most egy gyakorlati példán keresztül nézzük meg, hogy milyen számszerű eredménnyel jár a megfelelő súlyok alkalmazása.

Laboratóriumi körülmények között 400 g szójababot aprítottunk 0,2 cm-es rostával rendelkező verőcsapos diszmembrátorral 25 s-ig történő beadagolással.

1. táblázat

x [mm]	frakció [g]	frakció [%]	R(%) mért	R(LS) számított	$(R(\%)-R(LS))^2$	R(WLS) számított	$(R(\%)-R(WLS))^2$
1,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,25	0,21	0,06	0,06	0,006	0,0028	0,0007	0,0035
1,00	0,66	0,19	0,25	2,81	6,59	1,58	1,78
0,80	81,86	23,20	23,45	26,81	11,30	23,59	0,019
0,63	140,41	39,80	63,25	63,62	0,14	62,68	0,33
0,50	74,56	21,14	84,39	85,14	0,56	85,50	1,22
0,40	42,92	12,17	96,56	94,24	5,35	94,69	3,49
0,315	7,29	2,07	98,62	97,98	0,41	98,25	0,14
0,25	2,41	0,68	99,31	99,28	0,0008	99,41	0,011
0,20	0,85	0,24	99,55	99,73	0,035	99,79	0,061
0,00	1,6	0,45	100,00	100,00	0,00	100,00	0,00
					$\Sigma=24,38$		$\Sigma=7,06$
			n(LS) =	4,472		n(WLS)=	4,726
			$x_0(LS)=$	0,752		$x_0(WLS=$	0,740

Mint ahogy az az 1. táblázatból kitűnik, a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével kapott n egyenletességi tényező és x_0 közepes szemcseméret behelyettesítésével kisebb hibanégyzetösszeget (Σ=7,06) kapunk, mint a súlyozatlan esetben (Σ=24,38). Ezen értékekkel számított korrelációs indexek (I_{LS}=0,774 ill. I_{WLS}= 0,940) összevetése is a súlyozás használatát támasztja alá.

Ez azt jelenti, hogy az illeszkedés a súlyozás alkalmazásával javult, a paraméterek torzítása csökkent, megbízhatósága nőtt.

2. Linearizált függvénykapcsolat alkalmazása a szűrés műveleténél

A Carman-féle szűrőegyenlet összenyomhatatlan szűrőlepények esetén (Szabó et al 1987, Hodúr 1988):

$$w = \frac{1}{A}\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p}{\eta(R_1 l_1 + R_2 l_2)}, \tag{8}$$

ahol w *a szűrőteljesítmény,*

- A *a szűrőfelület*
- Δp *a szűrőberendezésben létrehozott nyomásesés*
- V *a szűrletmennyiség*
- t *a szűrési idő*
- η *a szuszpenzió dinamikai viszkozitása*
- R_1 *ill.* R_2 *a szűrőlepény ill. szűrőközeg ellenállása*
- l_1 *ill.* l_2 *a szűrőlepény ill. szűrőközeg vastagsága.*

Az R ellenállásokat ki tudjuk fejezni a szuszpenzió koncentrációjának felhasználásával:

$$R_1 = \frac{rcV}{Al_1} \quad \text{ill.} \quad R_2 = \frac{rcV'}{Al_2}, \tag{9}$$

ahol r *a fajlagos lepényellenállás*

- c *a szuszpenzió koncentrációja*
- V' *az egyenértékű szűrlettérfogat.*

Algebrai átalakítás után a kapott szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása:

$$\frac{t}{V} = \frac{\eta rc}{2\Delta p A^2}V + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2}V'. \tag{10}$$

Amennyiben az előzőekben levezetett Carman-féle szűrőegyenlet nem illeszkedik a mérési adatokra a teljes intervallumban, a következő modellt alkalmazhatjuk (Horváth 1974, Horváth 1980):

$$V = V_{\max}\frac{t}{t_{sz}+t}, \qquad (11)$$

ahol V *szűrlettérfogat*
V_{max} *maximális szűrlettérfogat*
t *szűrés ideje*
t_{sz} *szűrőállandó, felezési idő, mivel ha* $t = t_{sz}$, *akkor* $V = V_{max}$.

Ez a matematikai modell alakját tekintve rendkívül hasonlít a gázok adszorpcióját leíró Langmuir–izoterma egyenletéhez (Berecz 1988):

$$a = a_{\infty}\frac{p}{b+p}, \qquad (12)$$

ahol a *az adszorbeált anyag relatív mennyisége*
a_{∞} *a telítettségi nyomás mellett maximálisan adszorbeálódó anyagmennyiség*
p *a nyomás*
b *az adszorbeált anyagra jellemző állandó,*

illetve Michaelis és Menten klasszikus egyenletéhez (Keleti 1991), mely az egy szubsztrátos enzimreakciók leírását adja a kezdeti sebesség és a szubsztrát koncentráció alapján:

$$v_0 = v_{\max}\frac{[S]}{K_M+[S]}, \qquad (13)$$

ahol v_0 *kezdeti reakciósebesség*
v_{max} *az elvileg elérhető maximális kezdeti reakciósebesség*
$[S]$ *szubsztrát koncentráció*
K_M *Michaelis állandó.*

Térjünk vissza a szűrést leíró (11) egyenlethez és annak különböző linearizálási lehetőségeihez:

A. $$\frac{1}{V} = \frac{t_{sz}+t}{V_{\max}t} = \frac{1}{V_{\max}} + \frac{t_{sz}}{V_{\max}}\frac{1}{t} \qquad (14)$$

B. $$\frac{t}{V} = \frac{t_{sz}}{V_{\max}} + \frac{1}{V_{\max}}t \qquad (15)$$

C. $$V = V_{\max} - t_{sz}\frac{V}{t} \qquad (16)$$

D. $$\frac{V}{t} = \frac{V_{\max}}{t_{sz}} + \frac{1}{t_{sz}}V \qquad (17)$$

A Michaelis-Menten egyenlettel való analógia alapján A. Lineweaver-Burk típusú, B. Hanes típusú, C. Eadie-Hofstee típusú és D. Scatchard típusú linearizálási eljárás (Keleti 1991).

A szűrés műveletére is nézzünk egy gyakorlati példát és hasonlítsuk össze a különböző linearizált összefüggésekkel számított paramétereket. A 2. táblázat a szennyvíziszap modellezéséhez használt szuszpenzió szűrésekor nyert adatokat és a belőlük nyerhető paramétereket, valamint statisztikai jellemzőket tartalmazza.

2. táblázat

t [s]	V [dm^3]	A	A(w)	B	B(w)	C	D
16,2	6	5,78	5,23	5,22	5,00	5,57	5,47
27,6	8	8,37	7,82	7,81	7,55	8,20	8,09
43,0	10	10,84	10,46	10,44	10,19	10,77	10,69
58,8	12	12,64	12,49	12,47	12,26	12,68	12,65
79,1	14	14,29	14,45	14,42	14,29	14,48	14,51
102,4	16	15,64	16,11	16,08	16,03	15,98	16,07
135,0	18	16,95	17,79	17,76	17,81	17,45	17,62
161,5	19	17,71	18,80	18,77	18,90	18,33	18,54
200,0	20	18,54	19,90	19,87	20,10	19,27	19,54
	V_{max}	23,01	26,44	26,40	27,38	24,59	25,26
	t_{sz}	48,26	65,64	65,10	72,50	55,22	58,60
	R^2	0,9820	0,9801	0,9929	0,9980	0,9339	0,9339
	I	0,9838	0,9965	0,9966	0,9964	0,9930	0,9949

FELHASZNÁLT IRODALOM

Beke B.(1963): Aprításelmélet. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Berecz E.(1988): Fizikai kémia. Tankönyvkiadó, Budapest.

Hodúr C.(1988): Borok tisztaságának jellemzése szűrési index–szel. Egyetemi Doktori Értekezés, KÉE, Budapest.

Horváth, I. (1974): Some hydraulic problems of ultra-high rate filtration. First World Filtration Congress, Paris.

Horváth,I (1980): Az iszapvíztelenítés újszerű hidraulikai megközelítése. Kutatási jelentés. KÉE, Budapest.

Keleti T.(1991): Enzimkinetika. Tankönyvkiadó, Budapest.

Kemény S. és Deák A. (1990): Mérések tervezése és eredményeik kiértékelése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Rajkó R (1994): Lineáris és linearizált függvénykapcsolatok kiértékelése. Élelmiszeripari Főiskola, Tudományos Közlemények, 17, pp.44-52.

Szabó Z., Csury I. és Hidegkuti Gy. (1987): Élelmiszeripari műveletek és gépek. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest.

Véha A.(1994): Mezőgazdasági termények aprítása kalapácsos darálóval. Kandidátusi értekezés, Szeged.

ON THE EVALUATION OF LINEARIZED FUNCTIONAL RELATIONSHIPS ACCORDING TO OPERATIONS OF COMMINUTION AND FILTRATION

R. RAJKÓ and G. SZABÓ

University of Horticulture and Food Industry
College of Food Industry
H–6701 Szeged, P.O. Box 433

ABSTRACT

The Rosin-Rammler-Bennett (RRB) diagram is the most frequently used in practice for characterizing the grain distribution of grist occured during comminution. The uniformity coefficient n, the average grain-size x_0 and the specific surface A_f can be calculated using it. The mathematical form of the RRB-distribution can be linearized invery easy way, thus the parameters n and x_0 can be estimated by a computer program using the linear least squares method. First in the paper, we show the necessity of the appropriate weighing for the adequate statistical treatment of the linearized RRB-distribution.

The operation of filtration can be described by the Carman-type filtering equation in most cases. It will be, however, not valid for sweeting from fruits and vegetables and for separating thick suspensions, sludges or slurries. In these cases, we must use the mathematical model of saturation type suggested by I. Horváth. We we show some possibilities for linearization and compare them using exact mathematical statistical criteria.

The paper proves through two examples, that the statistical treatment of uncertainty derived from measurements is very important, even for simple and well-manageable mathematical models, too.