

Mitteilung aus dem Institut für Experimentalphysik der Kgl. Ung.
 Franz-Josef Universität in Szeged.
 Direktor: Prof. Dr. P. FRÖHLICH.

Gravitationsuntersuchungen mit einer neuen Torsionswaage.

Von M. KEDVES in Szeged, Ungarn.

Mit 10 Abbildungen.

Eine Übersicht über die Untersuchungen betreffs der Schwerkraft und der Gravitation kann man in einem jeden grösseren Handbuch der Physik finden.¹

Die ersten Gravitations-Versuche führte ich mit dem Gravitations-Multiplikator von Baron L. von Eötvös aus. Bei diesem Apparat sind die grossen Bleikugeln unterhalb des Torsions-Pendels. Durch die mehrmalige Drehung der grossen Kugeln nach rechts und links kann der Ausschlag des Pendels gesteigert und die Gravitation bewiesen werden. Nach den Erfahrungen mit diesem Apparat begann ich einen Gravitations-Apparat zu verfertigen, mit Hilfe dessen Versuche über die Gravitation *statisch* ausgeführt werden können.

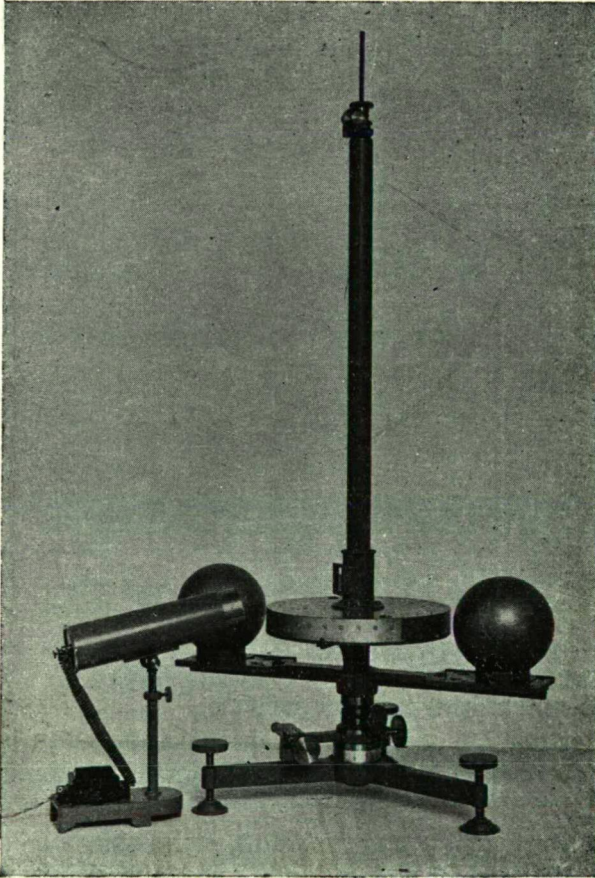
Durch Versuche und Verbesserungen, die mit Unterbrechungen mehr als zehn Jahre lang dauerten, erhielt die Torsionswaage ihre in Figur 1 sichtbare Gestalt und ihre in der Beschreibung besprochene Konstruktion. Mit diesem Apparat können in Bezug auf das Newton'sche Gesetz die folgenden Versuche ausgeführt werden (1):

1. a) Es kann die gegenseitige Anziehung der festen und flüssigen Körper bewiesen werden.
- b) Die Gravitation ist der Masse proportional.

¹ Wien—Harms: Handbuch der Experimentalphysik Bd. II. S. 124—147.

Schnippenkötter—Weyres: Physik S. 312—333.

- c) Die Gravitation steht in umgekehrter Proportion mit dem Quadrat der Entfernung zwischen den anziehenden Körpern.
- d) Es kann die Konstante der Gravitation bestimmt werden. (f)



Figur 1.

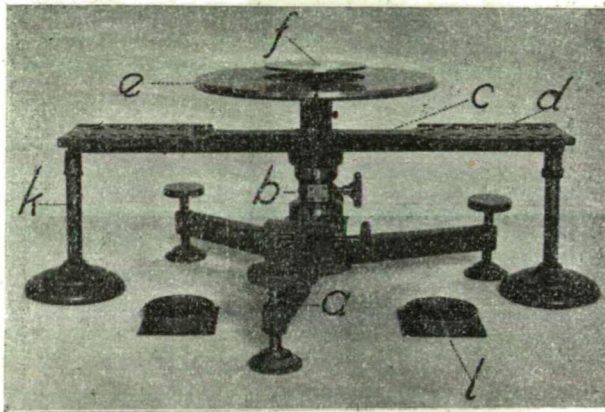
2. Man kann an dem Orte des Versuches die Änderung bzw. die relative Grösse der horizontalen Komponente der Schwerkraft bestimmen.

Die angeführten Versuche können alle mit der Torsions-Waage *statisch* ausgeführt werden.

I. Beschreibung des Apparates.

Die zusammengestellte Torsions-Waage zeigt Figur 1. Vor ihr steht die beleuchtende Lampe. Die Waage kann in zwei Teile geteilt werden, in einen unteren und oberen Teil. Den unteren Teil s. Figur 2., den oberen Figur 3.

Der ganze Apparat ist auf einen tragbaren und durch Schrauben regulierbaren Dreifuss (a) aufgebaut. Aus der Mitte des Fusses erhebt sich ein fester Zylinder (b), der im Kreis bewegbar und mit einer Schraube fixierbar ist. Der fixierte Zylinder kann fein eingestellt werden. Auf dem oberen Teile



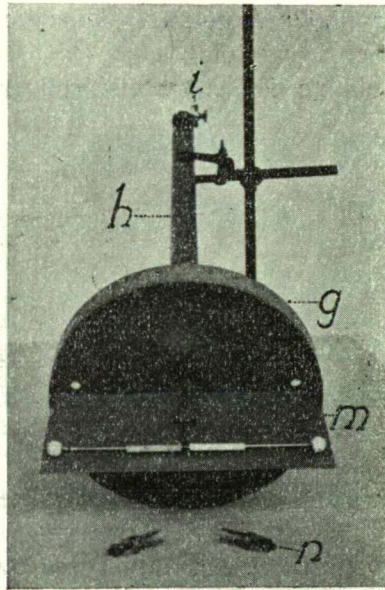
Figur 2.

des Fusses unter dem Zylinder ist eine Skala, auf welcher die Drehung der am Zylinder befestigten Teile abzulesen ist.

Der obere Teil des Zylinders hat einen kleineren Durchmesser, dieser Teil geht durch die Mitte des drehbaren Armes hindurch. Der *Dreharm* (c) stützt sich auf den mittleren breiteren Teil des Zylinders und kann auf dem unter ihm angebrachten Kugellager ohne Erschütterung im Kreise gedreht werden. An beiden Enden des Armes sind mit Rändern versehene *Tischchen* (d). Darauf werden die Körper des Experimentes gelegt. An der Mitte des Armes ist senkrecht ein Zeiger angebracht, dessen Ende sich vor der Skala der Trommel bewegt und die Verdrehung des Armes anzeigt. Dem Zeiger gegenüber ist am Arme eine Befestigungsschraube.

Auf den oberen Teil des Zylinders, über dem Arm ist ein starker *Metallteller* (e) befestigt (Figur 2.). Darauf wird der obere Teil des Apparates gestellt, der auf der hervorragenden Kante des Tellers ruht. Aus der Mitte des Tellers erhebt sich die *Metallscheibe* (f) des Arretierers; die Regulierschraube desselben ist am mittleren Teil des Zylinders zu sehen.

Figur 3. zeigt den oberen Teil des Apparates in der Lage, in welcher der Torsionsfaden und der *Waagenarm* hineingestellt werden. Der obere Teil besteht aus der kreisförmigen *Trommel* (g), aus dem den Faden haltenden doppelwandigen *Kupferrohr* (h) und aus dem *Torsionskopf* (i). In der Trommel ist der horizontale Arm der Waage. Auf dem oberen Teile der Trommel sind zwei verdeckbare kreisförmige Löcher. An den oberen Teil dieser Trommel sind 4 kurze Metallstangen befestigt, die zur Verhinderung der Schwingung des Waagenarmes und zur Befestigung, der auf der Figur sichtbaren Platte dienen. An dem äusseren Mantel der Trommel ist eine in Grade eingeteilte Skala. An den oberen Teil der Trommel ist das



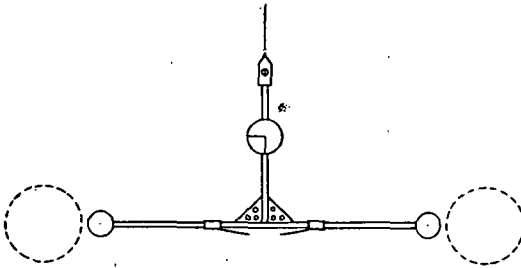
Figur 3.

den Torsionsfaden enthaltende Rohr befestigt; der untere kürzere Teil des letzteren ist breiter, als der obere, der doppelwandig ist. Auf dem unteren Teil ist ein parallelogrammförmiges Fenster, dessen oberer Teil ein Spiegel ist. In der Mitte des Fensters ist eine horizontale und eine vertikale Linie; diese dienen zur Einstellung der Höhe des Waagenarmes.

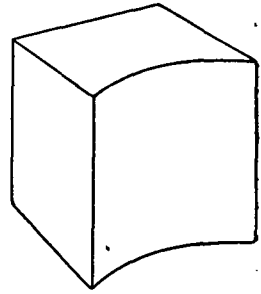
An das obere Ende des den Torsionsfaden haltenden Rohres ist der Torsionskopf befestigt. An das untere Ende der aus der Mitte desselben hervorragenden Schraubenspindel wird das obere Ende des Torsionsfadens befestigt. Die Schraubenspindel kann mit Hilfe der Schraubenmutter gehoben und

gesenkt werden, sie kann mit einer unendlichen Schraube auch im Kreise bewegt werden. An das Ende der unendlichen Schraube ist eine eingeteilte Scheibe angebracht; einem Einteilungsgrad entspricht eine Verdrehung von $3'$.

Figur 4 zeigt den Waagenarm von der Form eines umgekehrten T's, der aus dünnen Metallrohren gefertigt ist. An das Ende des horizontalen Armes sind zwei kleine Metallkugeln angebracht, die leicht zu entfernen und zu vertauschen sind. In der Nähe der Drehungsachse sind auf dem horizontalen Arm zwei kleine Federn befestigt, diese erzeugen bei dem Arretieren eine elastische Berührung. Auf die vertikale Stange ist ein kreisförmiger Spiegel befestigt, auf welchem



Figur 4.



Figur 5.

eine horizontale und eine vertikale Linie zur Einstellung der Höhe des Waagenarmes ist.

Die Seele der Torsionswaage ist der Torsionsfaden, der aus einer Platin-Iridium-Legierung gefertigt wird. Sein Iridiumgehalt ist 25 %, seine Länge 470—480 mm, seine Dicke 0,02 mm. An beiden Enden des Fadens sind durchlöcherne Platten angelötet; mit Hilfe dieser wird das eine Ende an den Torsionskopf, das andere an den Waagenarm befestigt, vermittels entsprechender Schrauben. Der Torsionsfaden wird ausser Gebrauch in einen zu diesem Zweck gefertigten Kistchen befestigt aufbewahrt.

Ergänzungs—Bestandteile und Hilfsmittel. Auf Figur 2 sind unter dem Dreharm zwei, durch Schrauben einstellbare *Stützen* (k) zu sehen. Durch diese werden die beiden Enden des Armes unterstützt, wenn die schweren Versuchskörper auf die Tischchen gestellt werden. Vor dem Fuss sind zwei

Kugelhalter (l), diese werden auf die Tischchen gestellt und auf diese die kugelförmigen Körper. Die Grundfläche der Kugelhalter sind viereckig, die zwischen die Kanten der Tischchen passen und dort verschoben werden können. Sie garantieren, dass die vertikale Projektion des Mittelpunktes der kugelförmigen Körper auf die Mittellinie des Armes fällt.

Auf Figur 3 sehen wir eine an die Trommel befestigte *Platte* (m), die zum Einlegen des Waagenarmes dient. Auf ihr ist der Waagenarm. Vor ihr sind zwei *Schraubenzungen* (n), womit der eingelegte Waagenarm an die Trommel befestigt werden kann.

Fig. 5 zeigt die Form, der auf einer Seite konkaven prismatischen Gefässe, die bei Versuchen mit flüssigen und körnigen Körpern benutzt werden. Die geraden Kanten ihrer Basis sind 13 cm, ihre Höhe ist 14 cm. Mit diesen Gefässen erhält man einen um 4·7 % grösseren maximalen Ausschlag als mit den Gefässen in Würfelform, und einen um 19 % grösseren als mit zylindrischen Gefässen. Der Unterschied ist nur von der Form der Gefässe abhängig.

Zur Waage gehören noch zwei Entfernungsmesser zur Einstellung des Spiegels am Waagenarm, zwei Metallzylinder zur Bestimmung des Torsionsmomentes des Torsionsfadens und zwei Kugeln von 120 mm Durchmesser.

In der Beleuchtungslampe der Fig. 1 benutzte ich kleine Glühbirnen (2—6 W) zwecks Verhinderung der Störungen durch Erwärmung.

Das Einlegen des Torsionsfadens und des Waagenarmes: Wir stellen den Apparat auf eine feste Grundlage, stellen ihn durch Libelle ein, beleuchten den Spiegel am oberen Teile des Fensters durch die Beleuchtungslampe. Das vom Spiegel reflektierte Strahlenbündel zeigt die sog. Null-Lage des Apparates an.

Dann nehmen wir den oberen Teil herab und nehmen nach Auflockern einer Schraube am Torsionskopf die Schraubenspindel heraus. Wir befestigen das eine Ende des Torsionsfadens in horizontaler Lage an die Schraubenspindel. An die Trommel befestigen wir die Platte (m), die zum Einlegen des Waagenarmes dient (Fig. 3.). Dann halten wir das Rohr in vertikaler Lage und lassen den Torsionsfaden vorsichtig

hinein; die Schraubenspindel wird auf ihre Stelle zurückgesetzt und fixiert. Die Schraubenspindel wird soweit herabgelassen, dass die an den Torsionsfaden angelötete Platte um 1—2 cm aus dem Rohre reiche.

Der obere Teil wird, wie Fig. 3 zeigt, auf ein Bunsen-Gestell gebracht und zwar so, dass das Rohr eine horizontale Lage einnehme. Wir stellen den Waagenarm auf die Platte (m) und befestigen die Platte am unteren Teil des Torsionsfadens mit einer Schraube an die vertikale Stange des Armes. Nach dem Befestigen des Waagenarmes ziehen wir durch Drehen der an der Schraubenspindel befindlichen Schraubenmutter den Waagenarm *vorsichtig* in die Trommel hinein. Dann ziehen wir den Waagenarm solange einwärts, bis die beiden Kugeln zur Hälfte in die Trommel hineinlangen. Jetzt wird der Waagenarm in die Trommel geschoben; die beiden Schraubenzangen (n) werden durch die Öffnungen auf der oberen Fläche der Trommel hindurchgezogen und durch sie der Waagenarm an die Trommel befestigt; der Faden hängt im Rohr lose, ohne Belastung. Wir entfernen die beim Einlegen benützte Platte und stellen den oberen Teil des Apparates auf den unteren.

Die Einstellung der Waage. Nachdem wir den oberen Teil zurückgestellt haben, entfernen wir vorsichtig die beiden Schraubenzangen, verdecken die beiden Öffnungen und beleuchten das Fenster. Dann ziehen wir mit Hilfe der Schraubenspindel des Torsionskopfes den Faden langsam aufwärts und beobachten das vom Spiegel am Waagenarm reflektierte Strahlenbündel. Nach dem Aufheben schwingt der Waagenarm gewöhnlich sehr stark nach rechts und links zwischen den vier Puffern. Man lässt ihn ein- bis zweimal schwingen, um zu überzeugen, ob die Waage gut eingestellt ist und ob der Waagenarm die Wand der Trommel nicht berührt. Durchs Fenster schauend heben wir den Waagenarm solange, *bis die horizontale Linie auf dem Fenster, deren Bild im Spiegel am Waagenarm und die horizontale Linie auf diesem Spiegel in eine horizontale Ebene fallen*. Diese Lage muss sich nach der Aufhebung des Arretierens einstellen. Die *Höhe* des Waagenarmes ist in dieser Lage eingestellt. Die kleinen Kugeln sind in gleicher Entfernung vom Teller und von der oberen Fläche der Trommel.

Nachdem wir die Arretierung vorsichtig gelöst haben, beobachten wir in welche Richtung der Arm sich wendet; jetzt drehen wir mit Hilfe der unendlichen Schraube des Torsionskopfes den Faden in entgegengesetzter Richtung. *Dann drehen wir den Faden so lange in den entsprechenden Richtung, bis in der Ruhelage des Waagenarmes die beiden Strahlenbündel in eine vertikale Ebene fallen.* Der neue eingelegte Faden verändert seine Gleichgewichtslage gewöhnlich noch tagelang, sein Elastizitäts-Zustand verändert sich. In diesem Falle stellen wir ihn wiederholt in seine vorherige Lage ein.

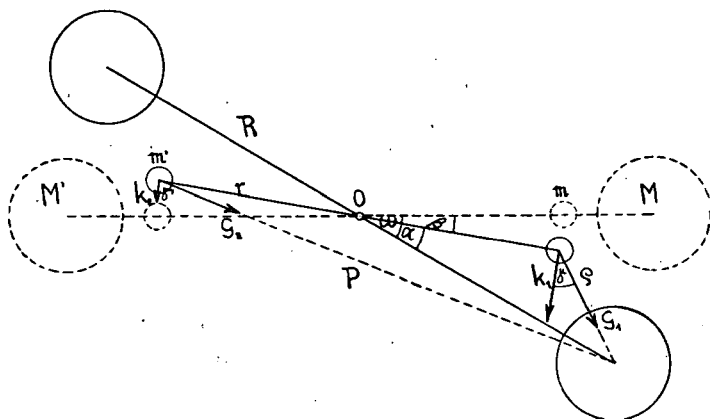
Bleibt der Faden schon ständig in der eingestellten Lage, so unterstützen wir die beiden Enden des Dreharmes, legen die zwei Kugelbehälter auf die Tischchen und auf diese die beiden Bleikugeln. Die Kugeln sollen in gleicher Entfernung von der Trommel sein. Dann entfernen wir die beiden Stützen, stellen den Zeiger auf den Nullpunkt und fixieren den Dreharm. Auf diese Weise ist die Torsionswaage in die Null-Lage eingestellt.

Die Null-Lage bedeutet, dass die Mittelpunkte der beiden kleinen und der beiden grossen Kugeln in eine horizontale Linie fallen, die durch die zwei 90° Teilungen des Mantels hindurchgeht; die Drehungsmomente der zwischen ihnen wirkenden Anziehungskräfte also Null sind (Fig. 4.). Dann steht der Zeiger auf dem Nullpunkt und die beiden Strahlenbündel fallen in eine vertikale Ebene. Bei allen Versuchen gehen wir von dieser Lage aus.

II. Die Theorie der Torsionswaage.

Auf Fig. 6. sehen wir mit Strichellinien gezeichnet den horizontalen Schnitt der in der Null-Lage eingestellten Waage. Die Mittelpunkte der kleinen und grossen Kugeln liegen in einer Geraden. Der Schnittpunkt der vertikalen Geraden durch den Torsionsfaden ist O ; um diesen als gemeinsamen Mittelpunkt bewegen sich die kleinen und grossen Kugeln auf einer kreisförmigen Bahn. Wir bezeichnen die Massen der kleinen Kugeln mit m, m' und die der grossen mit M, M' ; $m = m'$ und $M = M'$; die Entfernung von O bis zum Mittelpunkt der kleinen Kugeln ist r , die der grossen Kugeln R . Diese sind innerhalb eines Versuches konstant.

Verdrehen wir die grossen Kugeln um einen beliebigen Winkel ω , so bewegt sich der Arm der Waage unter dem Einfluss der Anziehungskräfte aus seiner ursprünglichen Lage heraus und kommt nach einer gewissen Zeit in einer neuen Lage zur Ruhe. Auf Fig. 6. ist diese Lage mit einer kontinuierlichen Linie gezeichnet. In dieser Lage ist das Drehungsmoment der zwischen den vier Kugeln wirkenden Anziehungskräfte in Gleichgewicht mit dem Drehungsmoment der Torsionskraft des Fadens. Bezeichnen wir die Verdrehung des Waagenarmes aus der Null-Lage mit β , den durch r und R gebildeten Winkel mit α ; $\omega = \alpha + \beta$.



Figur 6.

Bezeichnen wir die Entfernung zwischen den Mittelpunkten von M und m mit q die zwischen M und m' mit p . Es sei die Anziehungskraft zwischen M und m G_1 , zwischen M und m' G_2 . Die senkrechte Komponente von G_1 , auf r sei k_1 ; die von G_2 sei k_2 . Die Anziehungskräfte von M auf m und m' sind:

$$G_1 = f \frac{M m}{q^2}$$

$$G_2 = f \frac{M m'}{p^2} \dots \dots \dots 1$$

Die beiden Drehungskomponente:

$$k_1 = G_1 \cos \gamma$$

$$k_2 = G_2 \cos \gamma'$$

Nach Fig. 6.:

$$\cos \gamma = \frac{R \sin \alpha}{\varrho}$$

$$\cos \gamma' = \frac{R \sin \alpha}{P}$$

Nach diesen:

$$k_1 = f \frac{M m R \sin \alpha}{\varrho^3}$$

$$k_2 = f \frac{M m R \sin \alpha}{P^3} \dots \dots \dots 2$$

Durch Dividieren der beiden Gleichungen:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{P^3}{\varrho^3} \dots \dots \dots 3$$

Auf Grund der Gleichung 3 können die beiden Komponenten mit einander gegenseitig ausgedrückt werden.

In der abgelenkten Lage des Waagenarmes ist das Drehmoment der Torsionskraft des Drahtes dem Drehmoment der Kräfte an den beiden Enden des Armes gleich. Es sei die Direktionskraft des Torsionsfadens τ .

$$\tau \operatorname{arc} \beta = 2r (k_1 - k_2) \dots \dots \dots 4$$

Aus den Gleichungen 3 und 4;

$$k_1 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P^3}{2r(P^3 - \varrho^3)}$$

$$k_2 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta \varrho^3}{2r(P^3 - \varrho^3)} \dots \dots \dots 5$$

In diesen zwei Gleichungen sind k_1 und k_2 durch die Elastizitätskraft des Torsionsfadens ausgedrückt, in der Gleichung 2, aber mit der Anziehungskraft. Aus den Gleichungen 2 und 5:

$$\frac{f M m R \sin \alpha}{\varrho^3} = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P^3}{2r(P^3 - \varrho^3)}$$

Daraus erhalten wir zur Ausrechnung von f die folgende Gleichung:

$$f = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P^3 \varrho^3}{2 R r M m \sin \alpha (P^3 - \varrho^3)} \dots \dots \dots 6$$

Wenn wir die Veränderlichen ϱ und P mit den Konstanten R und r , und mit dem Veränderlichen α ausdrücken, so ist:

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha$$

$$P^2 = R^2 + r^2 + 2 R r \cos \alpha$$

Für unsere Rechnungen müssen wir noch die Werte von G_1 und G_2 durch Versuchsangaben ausdrücken. Aus den obigen bekommen wir Gleichungen:

$$G_1 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P^3 \rho}{2 R r \sin \alpha (P^3 - \rho^3)}$$

$$G_2 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P \rho^3}{2 R r \sin \alpha (P^3 - \rho^3)} \quad \dots \quad 7$$

Wegen der Leistungsfähigkeit und Erauchbarkeit der Torsionswaage müssen wir die Änderung der Grössen von k_1 und k_2 bzw. die der Resultante $k_1 - k_2 = k$, während der Verdrehung der Bleikugeln um 90° kennen. Durch Substituierung der früheren Werte von ρ und P in die Gleichung 2:

$$k_1 = \frac{f M m R \sin \alpha}{(R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha)^{3/2}}$$

$$k_2 = \frac{f M m R \sin \alpha}{(R^2 + r^2 + 2 R r \cos \alpha)^{3/2}} \quad \dots \quad 8$$

Die Werte der konstanten Grössen in der Gleichung 8 sind:

$$M = 9328 \text{ gr} \quad R = 17.745 \text{ cm}$$

$$m = 10.325 \text{ gr} \quad r = 10.615 \text{ cm}$$

Bei der Bestimmung der Werte von R und r bekommt man, indem noch die gemessenen Zehntelmillimeter durch 2 dividiert werden, 3 Dezimalstellen. Wenn wir die zu verschiedenen α gehörigen Werte von k_1 und k_2 aus Gleichung 8 berechnen und ein Grafikon anfertigen, so bekommen wir Fig. 7. k_1 und k_2 sind mit gestrichelten Linien die Resultante k mit einer fortlaufenden Linie gezeichnet. Auf der Abszisse ist der α aufgetragen, auf der Ordinate sind die Werte von k_1 , k_2 und k letztere durch f als Einheit ausgedrückt. Auf der Figur ist es zu sehen, dass k_1 steil ansteigt, zwischen 0 und 90° ein Maximum hat. k_2 steigt langsam und allmählich bis 90° , bei 90° sind die Werte k_1 und k_2 gleich. Die Form der Resultante ist der Form von k_1 ähnlich, mit dem Unterschied, dass sein Wert bei 90° Null ist; bis 10° ist ein Unterschied zwischen k und k_1 kaum zu bemerken.

Bilden wir den Differentialquotienten von k_1 nach α in Gleichung 8 und führen eine Maximalrechnung aus, so erhalten wir für den maximalen Punkt von k_1 die folgende Gleichung:

$$\cos \alpha = -\frac{R^2 + r^2}{2Rr} + \sqrt{\left(\frac{R^2 + r^2}{2Rr}\right)^2 + 3} \quad \dots \quad 9$$

Der maximale Punkt von k_1 ist bei den aus der obigen Gleichung ausgerechneten Werte. Der maximale Punkt ist bloss von r und R abhängig und ist von der Grösse der anziehenden Massen unabhängig. Nach den vorher angegebenen Werten von R und r gerechnet, ist das Maximum von k_1 bei $20^\circ 27'$, was mit dem Maximum auf der Figur gut übereinstimmt. Das Maximum der Resultante k bei einem kleinem Winkel bzw. bei 20° und einigen Minuten, so dass wir das Maximum bei 20° annehmen können. Die Gleichung 9 leistet bei der Bestimmung der Dimensionen (R und r) der Torsionswaage gute Dienste. Die Kurve k kann die charakteristische Kurve des Apparates genannt werden.

Die Grösse der Resultante k ist bei 20° 908.09 f , danach ist das auf den horizontalen Arm der Waage wirkende Drehmoment (N):

$$N = 19278.6 \cdot 68 \cdot 10^{-8} \text{ cm dyn.}$$

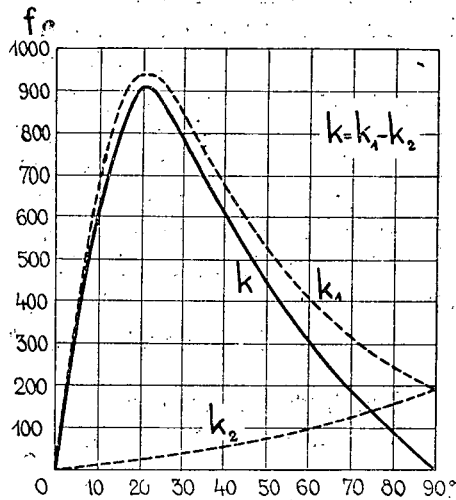
Die Direktionskraft (τ) des bei den Versuch angewendeten 480 cm langen und 0.02 mm dicken Fadens:

$$\tau = 0.04382 \text{ cm dyn.}$$

Aus dem Drehmoment und aus der Direktionskraft kann abgerechnet werden, in was für einem maximalen Ausschlag die Anziehung der beiden grossen Kugeln den Waagenarm zu halten kann. Nach der Gleichung 4:

$$\tau \text{ arc } \beta = 19278.6 \cdot 68 \cdot 10^{-8}$$

Aus dieser Gleichung ist $\beta = 1^\circ 40' 8''$, d. h. der maximale Ausschlag des Waagenarmes hervorgerufen durch die beiden Bleikugeln ist $1^\circ 40' 8''$.



Figur 7.

Die beiden Bleikugeln müssen um $21^{\circ} 40'8''$, d. h. rund um 22° verdreht werden um einen maximalen Ausschlag zu bekommen.

Aus den obigen Angaben können wir auch die untere Messgrenze des Apparates ausrechnen. Auf der Skala ist mit einem 3—4 m langen Lichtzeiger der Ausschlag um $2'$ des Waagenarmes bzw. der um $4'$ des Lichtzeigers gut zu sehen und leicht zu messen. Die auf den Waagenarm in einer Entfernung r senkrecht wirkende 1816.18 f Kraft verursacht einen Ausschlag von $100.8'$; zu einem Ausschlag von $2'$ ist also 36.32 f Kraft nötig. Danach können wir die untere Messgrenze des Apparates in Rund $2.5.10^{-6}$ dyn feststellen. Eine Anziehungskraft von dieser Ordnung bekommen wir, wenn wir auf die Trommel in die Nähe der kleinen Kugeln eine Masse von 10 gr legen oder wenn wir den Drehungsarm ohne Belastung aus der Null-Lage um ca 10° verdrehen. Die Bestimmung der Anziehung des Dreharmes ist bei genauen Messungen nötig.

III. Versuche und Messresultate.

Die Verdrehung des Torsionsfadens ist auch in jenem Falle am seltensten Null, wenn die Torsionswaage in die Null-Lage eingestellt und auf dem Dreharm noch kein Versuchskörper ist. Das Drehmoment der Torsionskraft des Fadens steht mit dem Drehmoment der horizontalen Komponente der Schwerkraft im Gleichgewicht. Wäre die Schwerkraft der Erde konstant, so hätte sie keine störende Wirkung. Aber die Schwerkraft verändert sich im Laufe der Zeit.² Die Schwerkraft der Erde wird von der Flut und Ebbe beeinflusst, dann von den Massenverschiebungen innerhalb der Erde, von den Massenveränderungen in der Nähe (z. B. das Anschwellen, Fallen eines Flusses in der Nähe) von der Masse des Körpers des Versuchsleiters, von der Anziehung des Mondes und der Sonne. Mond und Sonne üben sogar eine zweifache Wirkung aus, einerseits wirkt ihre Anziehungskraft unmittelbar auf die Waage, andererseits verändern die Erscheinungen der Flut und

²R. Tomaschek: Die Messungen der zeitlichen Änderungen der Schwerkraft. Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften, Bd. XII. S. 36—81

Ebbe die Verteilung der Erdmasse. Es fragt sich nur, ob die Waage für die Änderung der angeführten Faktoren empfindlich ist. Es kann sein, dass sie die Wirkung eines Faktors nicht empfindet, es kann aber vorkommen, dass mehrere Faktoren zu gleicher Zeit die örtliche Schwerkraft in derselben Richtung beeinflussen, dass wird aber schon von Apparat empfunden und übt einen Einfluss auf die Messresultate aus.

Ausser der zeitlichen Änderung der örtlichen Schwerkraft muss noch mit den folgenden störenden Faktoren gerechnet werden. Temperaturänderung, Winde, Erdbeben,³ Erschütterungen durch Verkehrsmittel, Erdmagnetismus, elektrostatische Störungen, Änderungen in der Elastizität des Fadens, endlich kleinere Herstellungs- und Einstellungs-Fehler an der Waage.

Ein Teil der störenden Umstände kann durch die richtige Auswahl des Versuchsraums in bedeutendem Masse vermindert werden. Entsprechend ist der Raum, wenn er von Verkehrsadern oder Bahnlinien fern ist und seine Fenster und Türe gut schliessen. Räume im Souterrain oder im Keller sind besser als höher liegende. Das Heizen muss während des Versuchs eingestellt werden. Zur Vermeidung der magnetischen Störungen wird der ganze Apparat aus nicht magnetisierbaren reinen Metallen erzeugt und die am Waagenarm hängenden Kugeln werden von den anklebenden Eisenteilchen gereinigt. Gegen elektrostatische Störungen wird der Waagenarm durch einen vollständig geschlossenen Metallüberzug geschützt, der nötigenfalls geerdet werden kann.

Ich führte an verschiedenen Orten, oberhalb und unterhalb der Erdoberfläche in verschiedenen Höhen Messungen aus. Mit der Zunahme der Höhe nahmen auch die Störungen zu. Trotzdem erhielt ich überall ziemlich gute Resultate, nur kann man auf einem entsprechenderen Orte mit geringerer

³ Der im I. Teile beschriebene Gravitationsapparat zeigte das Erdbeben in Kleinasien am 4. Januar 1935, um 17^h 20—28' durch einen maximalen Ausschlag von etwa 20 cm an. Zu Beginn des Erdbebens bewegte sich der Lichtzeiger in einer vertikalen Ebene. Auf Einfluss des Erdbebens schlug der Waagenarm aus seiner Gleichgewichtslage aus, und der Lichtzeiger beschrieb eine Wellenlinie. Später wurde der Weg des Lichtzeigers geradlinig und er zeigte die zeitweise eintreffenden kleineren Schwingungswellen durch je eine Wellenlinie an.

Vorsicht und kleiner Mühe gute Ergebnisse erzielen. In Folgenden führe ich jene Resultate an, die ich in dem sog. schwingungsfreien Raume des II. chemischen Instituts der F. J. Universität Szeged von September 1934. bis März 1935. erhielt. Der schwingungsfreie Raum ist im Souterrain. In dem Raume ist eine grosse viereckige Säule tief in den Boden versenkt, vom Boden durch einen Zwischenraum getrennt, so übernimmt sie die Schwingungen des Gebäudes und der Bodenoberfläche nicht. Dieser Raum war am geeignetesten dazu, die maximale Leistungsfähigkeit der ersten genau ausgeführten Waage endgültig festgestellter Konstruktion zu erproben.

Die Torsionswaage war auf der Mitte der Säule aufgestellt. Die Entfernung der Waage gegenüber aufgestellten Skala war 370·2 cm. Das Bild des Glühfadens der Lampe war so eingestellt, dass ich auf der Skala einen gut unterscheidbaren Punkt bekam, der mit Hilfe einer Stecknadel gut bezeichnet werden konnte. Diese Art der Abmessung der Ausschläge wählte ich teilweise der Einfachheit halber, teilweise aber darum, damit ich mich vom Apparat je weiter aufhalten könne.

Der Versuch wird immer von der Null-Lage ausgehend ausgeführt. Der auf den Dreharm gestellte Versuchskörper wird um den Winkel ω verdreht, dann wird abgewartet, bis der Arm der Waage vollständig ruht. Bis zur vollständigen Ruhe des Waagenarmes vergehen drei Stunden.

Die Einstellungszeit von drei Stunden kann so verkürzt werden, dass wir den Arm in zwei Raten um den Winkel ω verdrehen. Zuerst um einen Winkel, der um etwas grösser ist als $\frac{1}{2} \omega$ verdrehen, dann warten wir solange bis der Waagenarm den ersten Wendepunkt erreicht und erst dann stellen wir den Arm auf den Winkel ω ein. So können wir die Einstellungszeit der Waage auf 1, ja sogar auf $\frac{1}{2}$ Stunde vermindern.

Bei der Abmessung des Ausschlages des Lichtzeigers sass ich vor der Mitte der Skala, zündete die Lampe an und beobachtete 5—10 Minuten lang die Ständigkeit des Ausschlages des Waagenarmes. Stand er während dieser Zeit ganz ruhig, so bezeichnete ich den betreffenden Punkt, war seine Schwingung 2—3 mm, so nahm ich den Mittelwert, war aber die

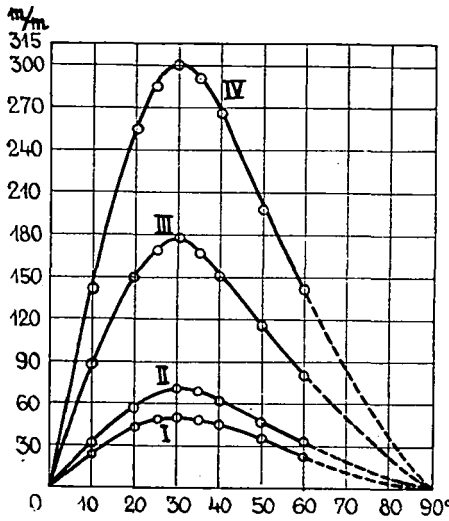
Schwingung grösser, so wartete ich bis er still stand. Die Messungen werden bei demselben *Winkel* ω : *immer abwechselnd nach rechts und links ausgeführt*. Bei dieser beiderseitigen Messung kann es vorkommen, dass bei demselben Verdrehungswinkel die Ausschläge des Waagenarmes nicht gleich sind; der Grund davon kann ein Konstruktions- oder Einstellungs-Fehler sein, oder aber Veränderung der Elastizitäts-Zustandes des Fadens. Durch Suchen nach der Ursache kann diesem Mangel abgeholfen werden. Eine zweite vorkommende Störung besteht darin, dass ebenso der nach rechts, wie der nach links gemessene Ausschlag sich derselben Richtung verschiebt, so dass die Summe der beiderseitigen Messungen dem Resultat von einen zu anderer Zeit gemessenen aber eine solche Verschiebung nicht aufzeigen den Messungspaar gleich ist. Diese Störung lässt sich nur so erklären, dass die Schwerkraft der Erde an dem Orte des Versuches durch irgend eine Ursache verändert wurde.

Im Laufe der Zeit war ich bestrebt die Versuchsfehler, die sich teilweise aus den Störungseinflüssen, teilweise aus einem Konstruktions- oder Einstellungsfehler ergaben durch rechts- und linksseitige Messungen auszuschalten. *Jede Einwirkung, die in eine Richtung den Ausschlag des Waagenarmes vergrößert, vermindert wahrscheinlich in gleichem Masse den Ausschlag des Armes in der anderen Richtung: die Summe der beiderseitigen Messungen ist abgesehen von den Versuchsfehler konstant*. Die Richtigkeit dieses Gedankens wurde durch die Versuche bestätigt. Bei denselben Verdrehungswinkeln kann in der Summe jeder rechts- und linksseitigen Messung ein Fehler sein, der aus einer Störung zwischen den beiden Messungen entsteht. Wenn wir zwischen den zwei Messungen höchstens 3 Stunden annehmen, so muss mit den Fehlern jener Störungen gerechnet werden, die während 3 Stunden vorkommen können.

Auf der Skala ist der Messfehler bei den rechts und linksseitigen Messungen kleiner als $\frac{1}{2}$ mm. Einem $\frac{1}{2}$ mm entsprechend verdreht sich der Waagenarm um $3 \cdot 3''$, zu einer solchen Verdrehung ist aber rund ein Kraft von f nötig. So begehen wir mit dieser Torsionswaage bei der Messung der Gravitation einen Fehler, der kleiner ist als die Kraft $6 \cdot 68 \cdot 10^{-8}$

dyn. Dieser Fehler bedeutet die Resultante k entlang eine verschiedene Genauigkeit, je nachdem, wieviel f die Kraft bei den einzelnen Messungen beträgt: Nach dem vorigen ist das Maximum bei Bleikugeln 1816-18 f.

a) **Das Verifizieren der Gravitation von verschiedenen Körpern.** Die Kurven auf Fig. 8. zeigen die Anziehungskräfte zwischen den am Waagenarm hängenden aus elektrolytischen Kupfer gefertigten Kugeln und dann auf den Dreharm gestellten verschiedenen Körpern, bei verschiedenen Verdrehungswinkeln.



Figur 8.

Die Form der beiden bei den Versuchen benützten Gefässe zeigt Figur 5. Ich füllte die beiden Gefässe mit verschiedenen Körpern, immer bis zu 13 cm Höhe, die beiden gefüllten Gefässe stellte ich auf die beiden Tischchen des Dreharmes immer auf denselben Platz, den auf den Tischchen die hervorragende Kante, Naben und die Erhebungen am Boden der Gefässe bestimmten. Dann mass ich bei verschiedenen Winkeln Rechts und links den konstanten Ausschlag des Lichtzeigers ab. Der Versuch konnte nur bis 60° fortgesetzt werden, denn von hier an verdeckt das eine Gefäss das Fenster. Daher ist der punktierte Teil der aufgezeichneten Kurven über 60° nur die sehr wahrscheinliche Ergänzung ihrer vollständigen Form. Auf die Abszisse sind die Verdrehungswinkel des Armes abgemessen, auf die Ordinate, die auf der Skala abgemessenen Entfernungen.

Die bei den vier Versuchsserien angewandten Körper und ihre Massen:

- I. zwei Holzwürfel 2.1732 gr.
- II. Wasser 2.3091 gr (samt den Gefässen).
- III. Minium 2.8671 gr (samt den Gef.).

IV. Bleischrot 2.15,797 gr (samt den Gef.).

Die vier Kurven kommen der Form der Kurve k auf Fig. 7 sehr nahe. Ihr maximaler Punkt verschob sie aber dem grösseren R entsprechend gegen die grösseren Ausschlagswinkel. Diese Kurven sind die experimentelle Verifizierung der früheren Feststellung, nach welcher der maximale Punkt von der Masse der Versuchsobjekte unabhängig und nur von R und r abhängig ist. Der maximale Punkt ist in der Nähe von 32° . Diese Kurven orientieren uns darüber, was für Ausschläge wir bekommen, wenn wir die Gefässe ihrer Masse entsprechend bei verschiedenen Verdrehungswinkeln mit verschiedenen Körpern füllen. Wenn wir auf das Tischchen Objekte aus beliebigen Material (z. B. Bücher) stellen, so können wir ihre Anziehung leicht beweisen.

b) Die Gravitation ist in gerader Proportion mit der Masse. Das Beweisen dieser These geschieht so, dass wir in die Nähe der auf der Waagenstange hangenden konstanten Massen auf *gleiche* Entfernungen *verschiedene* Massen stellen und die zwischen ihnen wirkenden Anziehungskräfte messen. So fällt die Abhängigkeit der Anziehungskraft von der Entfernung aus und die verschiedenen Ausschläge entstehen, nur aus den veränderten verschiedenen Massen. Das kann auch so aufgefasst werden, dass wir die Massen der kleinen Kugeln als Einheiten betrachten und untersuchen, mit welcher Kraft die verschiedenen Massen der verschiedenen Stoffe in konstanter Entfernung auf die Einheit der Masse einwirken. Bei dem Versuch ist das Mass der Anziehungskraft, die gemessene Entfernung auf der Skala bzw. der Ausschlag des Waagenarmes. (β).

Dieser Gedankengang kann mit dem Apparat folgendermassen verwirklicht werden. Wir füllen die beiden Gefässe bis zur stellen Höhe (13 cm) mit Stoffen von verschiedenen spezifischen Gewicht. Die gefüllten Gefässe stellen wir auf die Tischchen immer auf denselben Platz. Dann verdrehen wir den Dreharm um einen solchen Winkel ω , dass bei konstanten Ausschlag die Entfernung (ϱ) zwischen den Schwerpunkten der kleinen Kugeln auf dem Waagenarm und den Stoffen in den Gefässen immer *konstant* sei. Wenn die spezifischen Gewichte der zum Versuch gebrauchten Stoffe nicht sehr ver-

schieden sind, so bekommen wir auch dann gute Resultate, wenn wir bei einem jeden Versuchsmaterial den Arm um denselben Winkel ω verdrehen.

Wenn die spezifischen Gewichte der Versuchsmaterialien von einander sehr verschieden sind, wie bei den unten folgenden Versuchen, so verfahren wir folgendermassen. Wir führen den Versuch zuerst mit dem Stoffe von kleinstem spezifischen Gewicht aus und bestimmen die Winkel α_1 , und β_1 , (Figur 6.). Aus der Masse des ersten und zweiten Stoffes rechnen wir den wahrscheinlichen Winkel β_2 , aus und dann ist $\omega_2 := \alpha_1 + \beta_2$; dann verdrehen wir den Arm um den Winkel ω_2 . Bei einem jeden Versuch verfahren wir ebenso und dann sind ω und β veränderlich und α , und dementsprechend auch ρ konstant. Auf der Trommel des Apparates ist eine ganzgradige auf dem Zeiger aber eine 20'-e Einteilung und so können durch Schätzung auch Differenzen von 10' eingestellt werden. Diese Versuche führen wir auf dem steilen Teile der Resultante k aus in der Nähe von 20°, wo wir genügend grosse Ausschläge bekommen.

In Hinsicht darauf, dass die auf der Skala abgemessenen Ausschläge von der gegenseitigen Anziehung der vier Körper verursacht werden, wo von den vier Drehungskomponenten zwei von entgegengesetzter Richtung sind (Figur 6.), muss es untersucht werden, ob die erhaltenden Messresultate ohne Umrechnung so verglichen werden können, als ob nur von einer Anziehungskraft zwischen zwei Körpern die Rede wäre. Sind die beiden Versuchsstoffe a und b , die Anziehungskräfte zwischen ihnen und der an der Waage näher hängenden kleinen Kugel G_{a1} und G_{b1} , dann ist nach Figur 6

$$\frac{G_{a1}}{G_{b1}} = \frac{k_{a1}}{k_{b1}}$$

Der Waagenarm wird aber durch die resultierende Kraft $k_1 - k_2$ verdreht. Auf Grund der Gleichung 4:

$$\frac{k_{a1} - k_{a2}}{k_{b1} - k_{b2}} = \frac{\beta_a}{\beta_b}$$

Den Quotienten der beiden Ausschläge des Waagenarmes können wir nur so mit Quotienten der Komponenten k_1 als gleich annehmen, wenn wir die Komponenten k_2 vernachlässi-

gen, was auf dem steilen Teil der Kurve k erlaubt ist, denn k_1 und k fallen auf ihrem steilen Teile so zusammen, dass man sie kaum voneinander trennen kann; ausserden kommen die Komponenten k_2 im Zähler und im Nenner mit demselben Vorzeichen vor. Mit Hilfe der aus dem Newton-Gesetz abgeleiteten Gleichung

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{P^3}{\rho^3}$$

eliminieren wir die Komponenten k_2 aus der obigen Gleichung und schreiben

$$\frac{G_{a1}}{G_{b1}} = \frac{k_{a1}}{k_{b1}} = \frac{\beta_a}{\beta_b}$$

Danach ist der Quotient der Anziehungskräfte zwischen den Stoffen a und b und den näher auf dem Waagenarm hängenden kleinen Kugeln gleich dem Quotient der entsprechenden Ausschläge des Waagenarmes. *Der Ausschlag des Waagenarmes ist unmittelbar das Mass der Grösse der Anziehungskräfte bei den aufgeschriebenen Quotienten.* Versuche müssen die folgende Gleichung verifizieren:

$$\frac{M_a}{M_b} = \frac{\beta_a}{\beta_b}$$

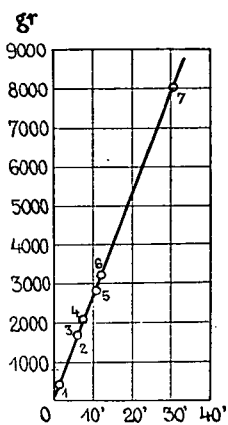
Bei den Versuchen mit Gefässen spielt die Anziehung von dreierlei Massen eine Rolle, der Dreharm, die Metallgefässe und das Versuchsmaterial. Diese Versuche führte ich in der Nähe von 20° aus. Die Gesamtanziehung des Waagenarmes und der Gefässe war 21.3 mm. Wenn wir dies von den Ausschlägen bei gefüllten Gefässe abziehen, bekommen wir den Ausschlag der Anziehung, der in die Gefässe gefüllten Stoffe. Von der mit Gefässen gemessenen Masse subtrahieren wir natürlich die Masse der leeren Gefässe.

Zu diesen Versuchen wählte ich das Versuchsmaterial, so dass der Unterschied des spezifischen Gewichtes zwischen ihnen gross sei. Die benutzten Stoffe und deren Masse ohne Gefässe:

1. Sägemehl 2.439.5 gr,
2. Weizen 2.1719.5 gr,
3. Öl 2.1719.5 gr,
4. Wasser 2.2124 gr,

5. Steinsalz (gemahlen) 2.2849·5 gr,
6. trockener Sand 2.3229·5 gr,
7. Minium 2.8079·5 gr.

Die Versuchsergebnisse zeigt Figur 9., auf die Abszissenachse sind die halben Ausschläge des Waagenarmes abgemessen, entsprechend der zwischen einer Kugel und dem Stoff in einem Gefässe wirkenden Anziehungskraft. Auf die Ordinatenachse sind die Massen der in einem Gefäss benützten Stoffe abgemessen. *Die experimentell bestimmten Punkte liegen der in gerader Proportion zur Masse stehenden Anziehungskraft entsprechend mit guter Annäherung auf einer Geraden.* Bei den



Figur 9.

auf diese Weise ausgeführten Versuchen wird aus dem Newton-Gesetz eine Gleichung einer Geraden. Das unabhängige Veränderliche ist M , das abhängige Veränderliche ist G ; die Konstanten sind: f, m, r^2 .

Die Ausschläge bei Weizen und Öl von gleicher Masse waren $12'12''$ und $12'10''$. Genaue Resultate könnten wir erwarten, wenn wir die Versuche mit dichten Kugeln aus verschiedenen Massen und mit Stoffen in leeren Kugelschalen ausführen.

Die Bestimmung des Torsionsmomentes. Bei den bisher ausgeführten Experimenten war die Kenntnis des Torsionsmomentes des Fadens nicht nötig, sie ist aber bei den folgenden nötig. Das Torsionsmoment pflegte ich gewöhnlich dann auszuführen, wenn der Faden einige Wochen lang eingelegt war, damit dessen Elastizitätszustand bis zu einem gewissen Grade konstant werde. Das Torsionsmoment führte ich mit der bei der Bestimmung des Torsionsmomentes der dickeren Drähte angewendeten bekannten Methode aus. Ich liess den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Schwingungszeit des Waagenarmes ausser acht, auf Grund der Überlegung, dass die Schwingungszeit gross (4—8 Min.) die Amplitude der Schwingung verhältnismässig klein (max. 4—5 Grad) ist, und in der kreisförmigen Trommel während der Schwingung des Armes die Luft in einer Richtung sich ohne Hindernis bewegen kann.

Bei der Bestimmung des Torsionsmomentes wird der Waagenarm herausgenommen. Das Verfahren bei dem Herausnehmen wird in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt.

Wir entfernen die beiden kleinen Kugeln von der horizontalen Stange des Waagenarmes und überziehen ihm mit zwei durchbohrten Kupfer-Zylindern. Auf der horizontalen Stange sind an beiden Seiten der Drehachse in 3, 5 und 7 cm Entfernung Zeichen zur Einstellung der Zylinder. Durch die Zeichen kann man aber die Zylinder nicht genügend genau einstellen, daher stellen wir die Entfernung der beiden Zylinder mit einem Schubmass ein. Dann wird der Waagenarm auf die beschriebene Weise zurückgestellt, es muss aber darauf geachtet werden, dass während des Zurückstellens die Zylinder sich nicht verschieben. Nach dem Zurückstellen des oberen Teiles des Apparates stellen wir den Waagenarm auf die entsprechende Höhe und lassen ihn ruhen. Ich bestimmte immer nach einer Ruhe von ca. 24 Stunden je eine Schwingungszeit.

Ich bestimmte die Schwingungszeit mit einer guten Uhr und mit einer Stopperuhr. Mit der Uhr mass ich die verfllossene Zeit und mit der Stopperuhr den Durchgang des Lichtzeigers durch die Ruhelage. Ich mass die Schwingungszeiten (t) indem ich die Zylinder auf drei Entfernungen (d) stellte, die Werte der drei d und t :

$$\begin{array}{ll} d_1 = 7.534 \text{ cm} & t_1 = 8' 37.50'' \\ d_2 = 5.534 \text{ cm} & t_2 = 6' 32.24'' \\ d_3 = 3.534 \text{ cm} & t_3 = 4' 33.94'' \end{array}$$

Die Genauigkeit der Schwingungszeiten ist 0.15%, 0.12% und 0.04%. Die Massen der zwei Zylinder sind gleich, die des einen ist 9.675 gr. Die Berechnung des Torsionsmomentes führte ich mit der folgenden bekannten Gleichung aus:

$$\tau = \frac{2 m \pi^2 (d_1^2 - d_2^2)}{t_1^2 - t_2^2}$$

Die Werte des τ aus den drei Messungen:

$$\begin{array}{l} \tau_{1,2} = 0.04379 \text{ cm dyn.} \\ \tau_{1,3} = 0.04382 \text{ cm dyn.} \\ \tau_{2,3} = 0.04386 \text{ cm dyn.} \end{array}$$

Der Mittelwert von τ ist also 0.04382 cm dyn. Bei Experimenten mit verschiedenen Fäden stimmten die drei Mes-

sungsergebnisse in ihren zwei ersten wertführenden Ziffern überein, es ergaben sich aber Resultate bei denen die ersten drei wertführenden Ziffern übereinstimmten.

c) Die Gravitation ist mit dem Quadrat der Entfernung zwischen den beiden Körpern umgekehrt proportional. Um dies zu rechtfertigen, messen wir die zwischen der beiden kleinen und den beiden grossen Kugeln wirkende Anziehungskraft in *verschiedenen Entfernungen ab*. Aus den Messungsangaben rechnen wir die Grösse der zwischen einer kleinen und einer grossen Kugel, d. h. *zwischen konstanten Massen wirkenden Anziehungskraft in verschiedenen Entfernungen und vergleichen die erhaltenen Resultate mit dem Quadrat der entsprechenden Entfernungen*. Bei der Vergleichung fallen die Massen aus, die Änderung der Anziehungskraft hängt nur von der Entfernung ab.

Bei der Abmessung der Anziehungskräfte ist die zwischen dem Dreharm und dem Waagenarm (samt den kleinen Kugeln) wirkende Anziehungskraft von der Grössenordnung, dass sie berücksichtigt werden muss. Unsere Experimente beginnen wir damit, dass wir zuerst die zwischen dem Dreh- und dem Waagenarm wirkende Anziehungskraft bei verschiedenen Verdrehungswinkeln messen; wir stellen auch die beiden Behälter für die grossen Kugeln auf das Tischchen in eine Entfernung, als ob die grossen Kugeln darin wären. Die konstanten Ausschläge bei den verschiedenen Verdrehungswinkeln in einer Skalaentfernung 307.2 cm sind die folgenden: bei 5° 4.3 mm, bei 10° 7 mm, bei 15° 10.8 mm, bei 20° 11 mm, bei 25° 13 mm, bei 30° 11.7 mm, bei 40° 11.3 mm, bei 50° 9.6 mm und bei 60° 8.6 mm. Diese Ausschläge werden von den bei den Versuchskörpern auf dem Tischchen erhaltenen Ausschlägen substrahiert.

Ich führte auch Experimente aus, um die Anziehungskraft zwischen der horizontalen Stange des Waagenarmes — ohne die kleinen Kugeln — und den grossen Kugeln zu messen. Bei grösseren Verdrehungswinkeln erhielt ich auch Ausschläge, aber die nach rechts und links gemessenen Ausschläge waren sehr unbestimmt. Das Gewicht des Waagenarmes samt dem Spiegel ist 6.6 gr, davon ist die horizontale Stange etwa 3 gr, und diese Masse fungiert in der Form einer 20 cm langen

Röhre. Die Anziehung der beiden grossen Kugeln und des Dreharmes auf diese 20 cm lange und 3 gr schwere Röhre ist schon unterhalb der Grenze der zuverlässigen Messungen, doch erhöhen die hier auftretenden Anziehungskräfte unbedingt den Rechnungen benutzten Versuchsergebnisse. Die Anziehungskraft zwischen der horizontalen Stange und den grossen Kugeln könnte mit einem Faden von kleinerem Torsionsmoment gemessen werden. Die Resultate des obigen Experimentes zeigen, dass bei den Gravitationsexperimenten die Anziehungskräfte zwischen den sich bewegenden Teilen des Apparates nicht vernachlässigt werden dürfen.

Die Anziehungskraft zwischen einer kleinen und einer grossen Kugeln kann auf zwei Arten ausgerechnet werden. Erstens unabhängig von den Gleichungen die aus dem Newton'schen Gesetz abgeleitet sind, zweitens durch Benützung der daraus abgeleiteten 3. Gleichung. Im ersten Falle ist die Anziehungskraft (G_0) aus der 4. Gleichung:

$$G_0 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta \rho}{2 R r \sin \alpha}$$

In diesem Falle vernachlässigen wir die Komponente k . Im zweiten Falle:

$$G_1 = \frac{\tau \operatorname{arc} \beta P^3 \rho}{2 R r \sin \alpha (P^3 - \rho^3)}$$

Einige durch die zweierlei Rechnungen erhaltenen Resultate enthält Tabelle I.

I. Tabelle.

ω	ρ^2	G_0	G_1
5°	51.79	12,594.10 ⁻⁸ dyn	12,804.10 ⁻⁸ dyn
15°	61.04	10,345 "	10,571 "
20°	69.72	9,273 "	9,525 "
30°	95.98	6,760 "	7,079 "
60°	235.30	2,294 "	2,997 "

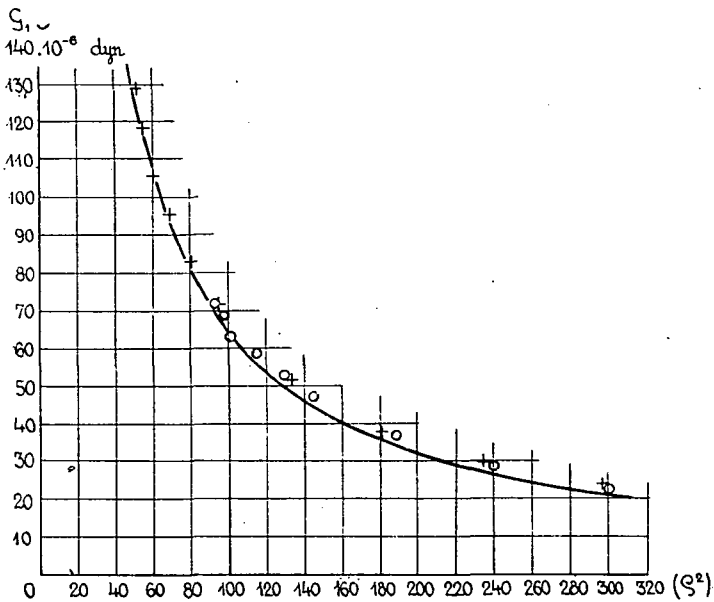
Die Kurve k entlang steigen die durch die zweierlei Rechnung erhaltenen Resultate mit dem Wachsen der Verdrehungswinkel und es steigen auch ihre Differenzen.

Im Falle von konstanten Massen können wir das Newton'sche Gesetz als eine Funktion zweier Veränderlichen be-

trachten, in welcher das unabhängige Veränderliche r und das abhängige Veränderliche G ist. Es sei $G = y$, $f M m = a$ und $r^2 = \rho^2 = x$. Danach müssen die zu den Werten des r^2 und des G gehörenden experimentell bestimmten Punkte auf der durch die folgende Gleichung angegebenen Hyperbel liegen:

$$y = \frac{a}{x}$$

Die Angaben der auf Figur 10 mit kontinuierlicher Linie gezeichneten Hyperbel sind mit den Konstanten bei dem Ex-



Figur 10.

periment durch das Newton'sche Gesetz ausgerechnet. Neben der Hyperbel sind die Punkte zweier Versuchsreihen aufgezeichnet. Bei den Punkten mit + war $R = 17.73$ cm, bei denen mit o 20.20 cm. In beiden Versuchsreihen liegen die auf dem steilen Teile der Kurve k bestimmten Punkte der durch die Rechnung erhaltenen Kurve am nächsten.

Wenn sich die Entfernung zwischen zwei Körpern verändert, dann stellt die Abhängigkeit zwischen den Anziehungskräften und den Quadraten der entsprechenden Entfernungen eine Hyperbel dar.

d) **Bestimmung der Gravitationskonstante.** Bei den Versuchen zur Bestimmung der Gravitationskonstante benutzte ich die auch bei den vorigen Experimenten benutzten zwei Bleikugeln und ausserdem zwei Glaskugeln, die ich mit verschiedenen Stoffen füllte. Die Stoffe in den beiden Glaskugeln und ihre Masse samt der Glaskugel sind die folgenden: Wasser 2.1160 gr; trockener Sand 2.1728.5 gr und Öl 2.1059.2 gr. Ich benutzte destilliertes und Wasserleitungs-Wasser. Die Bestimmung des Wertes von f führte ich bei verschiedenen Verdrehungswinkeln aus um bestimmen zu können, auf welchen Teile der Kurve k wir genauere Resultate bekommen können. Die mit verschiedenen Stoffen und in verschiedenen Entfernungen erhaltende Resultate zeigt die Tabelle II.

II. Tabelle.

ω	B l e i				Was-serl. Wasser	Dest. Wasser	Trocke-ner Sand	Öl	ϱ cm
	$R = 17.73$ cm	ϱ cm	$R = 20.20$ cm	ϱ cm					
50°	$6.840.10^{-8}$	7.19	$6.919.10^{-8}$	9.66					
100°	6.700	7.42	6.933	9.86					
150°	6.655	7.81	6.783	10.25	7.570	7.599	6.108	6.564	8.24
200°	6.849	8.34	6.971	10.77	7.638	9.111	6.372	7.175	8.82
250°	6.955	9.01	6.984	11.36	7.014	7.864	6.254	6.630	9.51
300°	7.008	9.79	7.100	12.07	8.482	7.839	6.729	6.605	10.28
350°	—	—	—	—	8.957	8.936	6.456	6.141	11.13
400°	7.099	11.55	7.079	13.72					
500°	7.076	13.44	7.129	15.50					
600°	7.276	15.34	7.130	17.42					

Die erste Spalte der Tabelle enthält die Verdrehungswinkel, welche bei allen sechs Versuchsserien dieselben waren. In der 2. und 4. Spalte sind die Resultate der beiden Versuchsserien mit den Bleikugeln enthalten; bei beiden Versuchsserien waren die Bleikugeln auf den Tischchen des Dreharmes auf zwei Entfernungen eingestellt. In der 3. und 5. Spalte sind die Werte von ϱ zu sehen. Bei den übrigen vier Versuchsstoffen war R dasselbe wie auch die einzelnen Werte von ϱ .

Die mit Bleikugeln bei 150° erhaltenen Resultate nähern sich am besten den ebenfalls mit Bleikugeln erhaltenen und allgemein angenommenen Werten. Vor 150° hat f in beiden Fällen zwei grössere Werte, nach 150° steigen mit der wachsenden Entfernung zwischen den Kugeln auch die Werte von f konstant. Das Steigen des Wertes von f mit der Entfernung zeigt sie in

gewisser Masse auch bei den übrigen Versuchsstoffen. Die mit Wasser, Sand und Öl bei 20° erhaltenen Resultate weichen von den Resultaten vor und nach diesem in grösserem Masse ab und das zeigt, dass wir in der Nähe von 20° mit kleineren Massen als die maximale Stelle der Kurve kein so gutes Resultat erhalten können, als auf dem aufsteigenden oder absteigenden Teile der Kurve. Das kann dadurch erklärt werden, dass an der maximalen Stelle, wo der Wert der Komponent k von der Abnahme in die Zunahme übergeht, die Messung nicht so genau ist als auf dem übrigen Teile der Kurve.

Die Vergleichung, der durch die verschiedenen Stoffe erhaltenen Werte von f zeigt, dass die mit Wasser erhaltenen Werte im allgemeinen grösser die mit Sand erhaltenen im allgemeinen kleiner sind als die Resultate beim Blei. Die mit dem Öl erhaltenen Werte nähern sich im allgemeinen am besten denen bei Blei. Am auffallendsten ist die Abweichung der mit Wasser erhaltenen Werte. Ich führte fünf Versuchsserien mit Einhaltung sämtlicher Vorsichtsmassregeln aus und die Resultate waren den noch die unten angegebenen.

Baron L. v. Eötvös drückt die spezifische Konstante der Gravitation mit der folgenden Gleichung aus:

$$f' = f (1 - \chi)$$

In dieser Gleichung sind f und f' die auf verschiedene Stoffe bezüglichen Konstanten und χ der spezifische Anziehungskoeffizient. L. von Eötvös bestimmte das χ mit Hilfe eines Gravitations-Variometers, mit welchem er die Unabhängigkeit der Gravitation von der Qualität des Stoffes untersuchte. An einem Ende der horizontalen Stange des Gravitationsvariometers hing ein Platingewicht am anderen an einem 60 cm langen Faden befestigt der zu untersuchende Körper.

Die Abhängigkeit der Konstante der Massenanziehung von der Entfernung zwischen den anziehenden Körpern untersuchte ich wiederholt in den Monaten Aug., Sept., und Okt. 1937. mit einem anderen Apparat im ersten Teil von der beschriebenen Konstruktion.

Der Apparat stand in einem Raume in Souterrain meiner Wohnung auf einer an die Wand befestigten Konsole. Die Messungen führte ich ausschliesslich nachts aus, um die störenden Wirkungen des Tages auszuschalten. Messungen führte

ich mit 2 Blei- und mit 2 Holzkugeln; mit den Holzkugeln probierte ich die Messungsmöglichkeiten aus. Die Masse der Bleikugeln war 2.9351 gr, die der Holzkugeln 2.6532 gr. Auf dem Waagenarm waren Kupferkugeln, ihre Masse war 10.352 gr. Die Messungen begann ich bei den grösseren Verdrehungswinkeln und schritt so gegen die kleineren; auf Grund der Überlegung, dass bei den früheren Messungen vielleicht die Änderung (Müdigkeit) im Elastizitätszustand des Fadens das Anwachsen der Werte von f verursachte. Die Ergebnisse der Messungen enthält die III. Tabelle:

III. Tabelle.

ω	B l e i				H o l z	
	$R = 17.65 \text{ cm}$	$\varrho \text{ cm}$	$R = 20.80 \text{ cm}$	$\varrho \text{ cm}$	$R = 17.12 \text{ cm}$	$\varrho \text{ cm}$
50°	6.983.10 ⁻⁸	13.39	6.947.10 ⁻⁸	16.11		
40°	6.980 "	11.52	6.941 "	14.30	7.460.10 ⁻⁸	11.29
30°	6.853 "	9.79	6.852 "	12.70	5.832 "	9.57
20°	6.781 "	8.35	6.743 "	11.41	6.390 "	8.25
10°	6.629 "	7.45	6.611 "	10.58	5.792 "	7.60

Mit Bleikugeln führte ich zwei Versuchsserien aus mit zwei verschiedenen R . In den beiden Versuchsserien stimmen bei gleichen ω die ersten Ziffern überein und mit der Abnahme der Entfernung zwischen den grossen und kleinen Kugeln nimmt auch der Wert von f ab. Die Resultate der zweiten Versuchsserien sind trotz des grösseren R nicht grösser, als die der ersten, diese Versuche bestätigen also die Schlüsse, welche aus den vorherigen Versuchen gezogen werden können, nicht. Der Grund der sehr verschiedenen Resultate mit den zwei Holzkugeln kann darin bestehen, dass die Holzkugeln von geringer Masse sind und dass während des Experimentes sich auch die Masse und die Form derselben veränderte.

Das Mass der Genauigkeit des Apparates erhellt aus den erhaltenen Werten von f , die auf dem steilen Teile der Kurve k , bei 10—20° bis 0.2% —2% sich der allgemein angenommenen genauesten Werten nähern.

Die angeführten Messresultate zeigen, dass mit dieser Gravitationswaage auch das bei der Bestimmung von f auftretende Problem, die Abhängigkeit des Wertes von f von der Entfernung und von der Qualität des Körpers untersucht werden kann. Bei solchen mit grosser Genauigkeit auszuführenden

Messungen haben wir aber folgendes nötig: erstens einen von jeder eliminierbaren störenden Wirkung entfernten ruhigen Raum, der mit den nötigen Hilfsmittel versehen ist, dann eine aus chemisch reinen Stoffen verfertigte, präzise ausgeführte Gravitationswaage, die mit die Genauigkeit der Messungen steigernden Verbesserungen ausgestattet ist. Vom Gesichtspunkte der Kontrolle und Zuverlässigkeit der Messungen aus ist es nötig, dass gleichzeitig mit mehreren auf verschiedene Weltgegende eingestellten Apparaten Messungen ausgeführt werden. An einem Apparat würden dann nur die störenden Wirkungen beobachtet werden.

2. Die Änderung der horizontalen Komponente der Schwerkraft. Bei den Versuchen, die die Änderung der horizontalen Komponente der Schwerkraft beweisen, entfernen wir den Dreharm vom Apparat. Wir stellen die Waage so ein, dass die horizontale Stange des Waagenarmes in nord-südlicher Richtung stehe, wenn der Apparat in die Null-Lage eingestellt ist. Dann verdrehen wir den Zylinder samt den darauf gebauten Teilen um einen gewissen Winkel, die Verdrehung lesen wir auf der Skala am oberen Teil des Fusses ab. Nach der Verdrehung, beim vollständigen Stillstand des Waagenarmes zeigt es gewöhnlich einen kleineren oder grösseren Verdrehungswinkel, als um welchen der Kasten des Waagenarmes verdreht wurde. Daraus folgt, dass in der neuen Lage die horizontale Komponente der Schwerkraft eine andere ist, als in der vorhergehenden. Die Abweichung des Waagenarmes von dem Verdrehungswinkel zeigt die Stellung der beiden Lichtzeiger.

Das Resultat einer solchen Versuchsserie ist das Folgende: die erste Ziffer zeigt den Grad der Verdrehung des Kastens der Waage, die zweite, den der Verdrehung des Waagenarmes,

60°, 59°45'	240°, 239°47'
120°, 119°52'27"	300°, 299°52'46"
180°, 180° 4'16"	360°, 360° 5'

Nach dem Versuch stellte sich der Waagenarm nicht wieder in die Null-Lage ein, sondern er wich davon 5' ab. Der Grund davon ist entweder die Änderung in dem Elastizitätszustand des Fadens, oder die in der Schwerkraft.