V. N. Kosztjuk

DEÓNTIKUS LOGIKA

A deóntikus logika a logikának a „kötelező”, „megengedett”, és „tiltott” kifejezéseket tartalmazó kijelentések, az ún. deóntikus állítások vizsgálatával foglalkozó része. Ezeket a kifejezéseket különleges logikai jeleknek tekintjük.[1]

A „deóntikus” szó görögül azt jelenti, hogy „ahogyan lennie kell”. [2] Az ilyen típusú állításokat néha normatív kijelentéseknek is nevezik, mivel ezek különböző cselekvéseket szabályoznak bizonyos szabályok, normák szerint. A deóntikus logika tárgyát az ilyen normatív állítások tanulmányozása képezi.

A deóntikus logika kialakulása a mai formális logikában végbemenő szemléletbeli változások következtében vált szükségszerűvé. A század első felében nyilvánvalóvá lett, hogy a klasszikus logikát (a kijelentések, predikátumok klasszikus kalkulusait és a formális aritmetikát) lehetetlen a matematika alapjainak kutatásánál, illetve más filozófiai témák tanulmányozásánál előforduló problémák vizsgálatához felhasználni.[3] A felmerülő nehézségek a logika hatalmas arányú fejlődését váltották ki. Így például kialakult a konstruktív logika, mely vizsgálatainak középpontjában a „konstrukciót”, pontosabban a „kontruálhatóság” fogalmát állította. A nehézségekkel azonban ez az irányzat nem tudott megbirkózni. Ugyanígy eredménytelen maradt egy másik próbálkozás, az ún, „logikai pozitivizmus” létrehozásának kísérlete is. A logikai pozitivizmus a filozófiát a logika részének tekintve próbált eredményt elérni.

A helyzet a hatvanas évek elején változott meg, elsősorban a modális logika intenzív fejlődésének következményeként. A modális logika, amely a klasszikus logikától sokban különbözik (pl. nem-funkcionális, szemantikája összetettebb, jóval több logikai jelet használ stb.), alkalmasabb filozófiai problémák formális tanulmányozására. Az irodalomban rohamosan nő az ún. „filozófiai logikai” tárgyú írások száma. Ezek a modális logika különféle változataival foglalkoznak. A deóntikus logika a mai modális logika („filozófiai logika”) egyik ága. A deóntikus jeleket tartalmazó formulákat mint „deóntikus modalitásokat” vizsgálhatjuk (ld. a Философська думка c. folyóirat 1972. 2. számában „Modalitások a modern logikában” címmel megjelent cikkünket), s így a deóntikus logika a modalitások logikai elméletének részeként vizsgálható.

A propozícionális deóntikus logikában alapvető modalitások a következő kifejezések:

[1] Az eredeti szövegben a két első bekezdés fordított sorrendben szerepelt. (Szerk.)

[2] A szerző itt téved. A deóntikus szó a görög δεω = kötök v. mit, gátlok v. mit igéből származik. (Szerk.)

[3] Ezt az állítást pontosítani kell. A klasszikus logika bizonyos fejezetei (a zérus- és elsőrendű predikátum-kalkulus) éppen a matematika alapjainak kutatása során fejlődött ki. Más területekre a szerző állítása érvényes. (Szerk.)

Perm A	(„A" megengedett)
O A	(„A" kötelező)
F A	(„A" tilos)

Ezek nem függetlenek, egyik a másikkal a következő módon definiálható:

(1) $\sim$Perm$\sim$A$\equiv$0 A

(2) $\sim$0$\sim$A$\equiv$Perm A

(3) $\sim$0 A$\equiv$Perm$\sim$A

(4) $\sim$Perm A$\equiv$0$\sim$A

(5) 0 A$\equiv$F$\sim$A

(6) F A$\equiv$$\sim$Perm A

Itt és a továbbiakban mindenütt $\sim$ a tagadás, $\equiv$ a materiális ekvivalencia, $\supset$ a materiális implikáció, $\wedge$ a konjunkció, $\vee$ a diszjunkció, $\forall$ az univerzális kvantor, $\exists$ pedig az egzisztenciális kvantor jele.

Ezeket a formulákat szavakkal kifejezve azt mondhatjuk, hogy a „kötelező az A" azt jelenti: „nem engedett meg a nem A"; „megengedett A" azt jelenti: „nem tilos a nem A", „tilos A" pedig azt jelenti, hogy „kötelező a nem A", vagy másképp „nem engedett meg az A". Ezeket a jeleket a továbbiakban alapjelekként használjuk a vizsgált kalkulusokban.

Különböző deóntikus logikai rendszerek léteznek. Ezek közül mi az ún. standard deóntikus logika egy módosított változatát állítjuk vizsgálataink középpontjába. (A standard deóntikus logika ismertetése pl. D. F llesdal and R. Hilpinen: Deontic logic: An introduction, in *„Deontic logic: Introductory and Systematic Readings"*, ed. by R. Hilpinen, Dordrecht (1971) című művében találhatómeg.) A standard deóntikus logika említett módosítását a klasszikus propozícionális kalkulusból (ennek ismertetését ld. A. Church: Введение б математическую логику, T. I., M. 1956.) úgy kaphatjuk meg, hogy egy új jelet a „Perm"-et hozzávesszük a régi jelek halmazához, a formulák képzésének lépéseit a következő képzési szabállyal bővítjük ki:

„Ha A formula, akkor Perm A is az.",

axiómáihoz pedig az alább felsorolt axióma-sémákat csatoljuk:

(S2) Perm A$\vee$Perm$\sim$A

(S3) Perm (A$\vee$B)$\equiv$Perm A$\vee$Perm B

(S4) $\sim$Perm (A$\wedge$$\sim$A),

kiegészítve az

(S5) Ha $\vdash$ A$\supset$B, akkor $\vdash$ Perm A$\supset$Perm B következtetési szabállyal.

Ez utóbbit extenzionalitási elvnek nevezik.

Ebben a kalkulusban a kiinduló deóntikus fogalom a „Perm", a „kötelező" és „tilos" mint $\sim$Perm$\sim$ és $\sim$Perm definiálható. Az S2 axióma-séma a permisszió elvét fejezi ki: ha A tetszőleges formula, akkor A és $\sim$A közül legalább az egyik megengedett. Az S3 axióma-séma a deóntikus disztributivitást formalizálja: két formula diszjunkciója akkor éa csak akkor megengedett, ha legalább egyikük az. Az S4 axióma-séma az ellentmondás megengedhetetlenségét posztulálja. Végül S5 szavakban azt fejezi ki, hogy amennyiben az egyik cselekvés maga után vonja egy másik végrehajtását is, úgy az első megengedettsége a második megengedettségét implikálja.

A továbbiakban bizonyítjuk e kalkulus néhány tételét (deóntikus törvényét). A bizonyítás fogalmát a klasszikus logikákból változatlanul vesszük át: az A formula bizonyítása egy olyan véges formulasorozat, melynek elemei axiómák, már bizonyított tételek, vagy pedig a kalkulus szabályai alapján az előző (mármint a sorozatban előző) formulákból kaphatók meg, továbbá a sorozat utolsó eleme az A. Természetesen, mivel az általunk megadott kalkulus a klasszikus propozícionális kalkulus bővítése, annak axiómái és tételei szerepelhetnek a bizonyításokban, továbbá megengedett a klasszikus propozícionális kalkulus következtetési szabályainak alkalmazása is. A A bizonyítások leírásánál a jobb oldalra írjuk azokat a rövid megjegyzéseket, amelyek arra utalnak, hogy az illető sor miképpen keletkezett. A klasszikus propozícionális logika elemeire az „RS szerint" szöveggel hivatkozunk.

Így pl. S2-ből RS szerint

(S1) $\sim\text{Perm}\sim A\supset\text{Perm}\,A$

következik. Ezzel bizonyítottuk, hogy ha valami kötelező, akkor megengedett is. A következőkben felhasználjuk az S6 következtetési szabályt:

(S6) Ha $\vdash A\supset B$, akkor $\vdash O\,A\supset O\,B$ és
$\vdash F\,B\supset F\,A$.

A bizonyítás a következő:

1)	$A\supset B$	A feltevés szerint
2)	$\sim B\supset\sim A$	RS és 1) szerint
3)	$\text{Perm}\sim B\supset\text{Perm}\sim A$	S5 és 2) szerint
4)	$\sim\text{Perm}\sim A\supset\sim\text{Perm}\sim B$	RS és 3) szerint
5)	$O\,A\supset O\,A$	O definíciója és 4) szerint
6)	$\text{Perm}\,A\supset\text{Perm}\,B$	1) és S5 szerint
7)	$\sim\text{Perm}\,B\supset\sim\text{Perm}\,A$	6) és RS szerint
8)	$F\,B\supset F\,A$	7) és F definíciója szerint

(7) $O\,(A\wedge B)\equiv O\,A\wedge O\,B$

1)	$\text{Perm}\,(\sim A\vee\sim B)\equiv\text{Perm}\sim A\vee\text{Perm}\sim B$	S3 szerint
2)	$\sim\text{Perm}(\sim A\vee\sim B)\equiv\sim\text{Perm}\sim A\wedge\sim\text{Perm}\sim B)$	1) és RS szerint
3)	$\sim\text{Perm}\sim(A\wedge B)\equiv\sim\text{Perm}\sim A\wedge\sim\text{Perm}\sim B$	2) és RS szerint
4)	$O\,(A\wedge B)\equiv O\,A\wedge O\,B$	0 definíciója és 3) szerint

(8) $O\,A\vee O\,B\supset O\,(A\vee B)$

1)	$A\supset A\vee B$	RS szerint
2)	$O\,A\supset O\,(A\vee B)$	1) és S6 szerint
3)	$B\supset A\vee B$	RS szerint
4)	$O\,B\supset O\,(A\vee B)$	3) és S6 szerint
5)	$O\,A\vee O\,B\supset O\,(A\vee B)$	2), 4) és RS szerint

(9) $\text{Perm}\,(A\wedge B)\supset\text{Perm}\,A\wedge\text{Perm}\,B$

1)	$A\wedge B\supset A$	RS szerint
2)	$A\wedge B\supset B$	RS szerint
3)	$\text{Perm}\,(A\wedge B)\supset\text{Perm}\,A$	1) és S5 szerint
4)	$\text{Perm}\,(A\wedge B)\supset\text{Perm}\,B$	2) és S5 szerint
5)	$\text{Perm}\,(A\wedge B)\supset\text{Perm}\,A\wedge\text{Perm}\,B$	3), 4) és RS szerint

(10) $O\,(A\supset B)\supset O\,A\supset O\,B$

1)	$(A\supset B)\wedge A\supset B$	RS szerint
2)	$O\,((A\supset B)\wedge A)\supset O\,B$	1) és S6 szerint
3)	$O\,(A\supset B)\wedge O\,A\supset O\,B$	2) és 7 szerint
4)	$O\,(A\supset B)\supset O\,A\supset O\,B$	3) és RS szerint

(11) $O(A \supset B) \supset \mathrm{Perm}\, A \supset \mathrm{Perm}\, B$

1) $O(\sim B \supset \sim A) \supset O \sim B \supset O \sim A$ 10 szerint
2) $O(A \supset B) \supset \sim O \sim A \supset \sim O \sim B$ 1) és RS szerint
3) $O(A \supset B) \supset \mathrm{Perm}\, A \supset \mathrm{Perm}\, B$ 2) és O definíciója szerint

(12) $O(A \supset B) \supset F\, B \supset F\, A$

1) $O(\sim B \supset \sim A) \supset O \sim B \supset O \sim A$ 10 szerint
2) $O(A \supset B) \supset O \sim B \supset O \sim A$ 1) és RS szerint
3) $O(A \supset B) \supset F\, B \supset F\, A$ 2) és F definíciója szerint

(13) $O(A \supset B \vee C) \wedge \sim \mathrm{Perm}\, B \wedge \sim \mathrm{Perm}\, C \supset \mathrm{Perm}\, A$

1) $O(A \supset B \vee C) \supset \mathrm{Perm}\, A \supset \mathrm{Perm}\,(B \vee C)$ 11 szerint
2) $\mathrm{Perm}\,(B \vee C) \equiv \mathrm{Perm}\, B \vee \mathrm{Perm}\, C$ S3 szerint
3) $O(A \supset B \vee C) \supset \mathrm{Perm}\, A \supset \mathrm{Perm}\, B \vee \mathrm{Perm}\, C$ 1), 2) és RS szerint
4) $O(A \supset B \vee C) \supset \sim \mathrm{Perm}\, B \wedge \sim \mathrm{Perm}\, C \supset \sim \mathrm{Perm}\, A$ 3) és RS szerint

(14) $O(A \vee B) \supset \mathrm{Perm}\, A \vee \mathrm{Perm}\, B$

1) $O(\sim A \supset B) \supset O \sim A \supset O\, B$ 10 szerint
2) $O\, B \supset \mathrm{Perm}\, B$ S1 szerint
3) $O(\sim A \supset B) \supset O \sim A \supset \mathrm{Perm}\, B$ 1), 2) és RS szerint
4) $O(A \vee B) \supset \sim O \sim A \vee \mathrm{Perm}\, B$ 3) és RS szerint
5) $O(A \vee B) \supset \mathrm{Perm}\, A \vee \mathrm{Perm}\, B$ 4) és RS szerint

(15) $\sim(O(A \vee B) \wedge \sim \mathrm{Perm}\, A \wedge \sim \mathrm{Perm}\, B)$

1) $O(A \vee B) \supset \mathrm{Perm}\, A \vee \mathrm{Perm}\, B$ 14 szerint
2) $\sim O(A \vee B) \vee \mathrm{Perm}\, A \vee \mathrm{Perm}\, B$ 1) és RS szerint
3) $\sim(O(A \vee B) \wedge \sim \mathrm{Perm}\, A \wedge \sim \mathrm{Perm}\, B)$ 2) és RS szerint

(16) $O\, A \wedge O(A \wedge B \supset C) \supset O(B \supset C)$

1) $A \wedge B \supset C \supset A \supset B \supset C$ RS szerint
2) $O(A \wedge B \supset C) \supset O(A \supset B \supset C)$ 1) és S6 szerint
3) $O(A \supset B \supset C) \supset O\, A \supset O(B \supset C)$ 10 szerint
4) $O(A \wedge B \supset C) \supset O\, A \supset O(B \supset C)$ 2), 3) és RS szerint
5) $O\, A \wedge O(A \wedge B \supset C) \supset O(B \supset C)$ 4) és RS szerint

Az $O(A \supset B)$ formulát deóntikus implikációnak is nevezik. Lényegében a késztetés egy lehetséges formalizációját adja: az A cselekvés végrehajtása szükségképpen maga után vonja a B bekövetkezését is. Ezek alapján a (13) úgy értelmezhető mint annak kijelentése, hogy ha két tiltott lehetőség közül kell választani, akkor tiltott cselekvést kell végrehajtani. A (13) és (15) tételek szóbeli megfelelőit Aquinói Tamás gyakran felhasználta.

A (9) tétel szerint $\mathrm{Perm}\,(A \wedge \sim A)$-ból Perm A következik, ami más szavakkal kifejezve azt jelenti, hogy amennyiben az ellentmondás megengedett, úgy minden megengedett. Az ellentmondás megengedése tehát (deontikus) logikai anarchizmushoz vezet.

A deontikus logika fentebb vázolt rendszerében néhány, bizonyos értelemben ellentmondásosnak tűnő formula is levezethető. Pl:

(17) $O\, A \supset O(A \vee B)$ RS és S6 szerint
(18) $\mathrm{Perm}\, A \supset \mathrm{Perm}\,(A \vee B)$ RS és S5 szerint

A (18) tétel többek között a következő mondatot is formalizálja:

Ha dohányozni szabad, akkor dohányozni vagy ölni is szabad.

Az ilyen diszjunkció amorálisnak látszik. Valójában azonban (18) nem jelent komolyabb ellentmondást mint az a klasszikus logikai formula, hogy $A \supset A \vee B$. (18) egyszerűen azért nem ellentmondásos, mert $A \vee B$ megengedett voltából nem következik, hogy A és B külön-külön megengedettek.

A deontikus logika tételeinek elemzésekor a fentebb vázolt nehézségnél súlyosabbak is felmerülnek. Ezek a „késztetés" fogalmának definiálására szolgáló módszerek korlátaiból fakadnak. Így pl. bizonyítható a következő formula is:

$$(19)\quad O{\sim}A \supset O(A \supset B) \qquad \text{RS és S6 szerint}$$

Ha elfogadjuk a késztetés már említett formalizációját, akkor (19) jelentése:

> Ha végre kell hajtani a tiltott cselekvést, akkor minden cselekvést végre kell hajtani.

Ezt a mondatot,illetve a neki megfelelő (19) formulát a késztetés paradoxonának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ez nem lehet erkölcsi törvény. Mindebből azt a következtetést kell levonnunk, hogy a késztetés fogalmának formalizációja hibás.

A. Prior *Formális logika* c. könyvében (A. Prior: Formal Logic, 1951) a késztetés egy másik változatát javasolta: az A cselekvés bekövetkezése maga után vonja szükségképpen B végrehajtását is. Ez a tény az $A \supset O\ B$ formulával fejezhető ki. Ekkor a késztetés paradoxona nem bizonyítható, mivel a $O\ ({\sim}A) \supset (A \supset O\ B)$ formula nem vezethető le az axiómák alapján. Ennek a változatnak azonban más nemkívánatos következményei vannak. Bizonyítható ugyanis a következő formula:

$$(20)\quad {\sim}A \supset (A \supset O\ B),$$

amiből, a késztetés fenti A. Prior féle fogalmát felhasználva, az következik, hogy minden elvégzetlen cselekvés maga után vonja bármely más cselekvés elvégzését, ez pedig nyilvánvalóan hamis állítás. Világos tehát, hogy az $A \supset O\ B$ formula sem fejezi ki helyesen a késztetés intuitív fogalmát.

A deontikus logika formuláinak, tételeinek mélyebb megértéséhez speciális szemantika szükséges. Először vázoljuk S. Kripke és J. Hintikka módszerét.

Normatív rendszernek nevezzük deontikus ítéletek egy tetszőleges halmazát, ha zárt a dedukcióra nézve. Egy ilyen halmaz ellentmondástalanságának definíciója a következő elv alaján történhet:

(El) Ha az A halmaz ellentmondástalan és
$\langle O\ A_1, \ldots, O\ A_n, \text{Perm } B\rangle \subseteq A$, akkor
a $\langle A_1, \ldots, A_n, B$ halmaz sem ellentmondásos.

Az (El) elv azt fejezi ki, hogy kötelező cselekvések egy halmaza ellentmondástalan, ha az összes kötelező cselekvés egyszerre végrehajtható, valamint hogy a B csak akkor megengedett, ha végrehajtása nem vonja maga után valamelyik kötelezettség megszegését. (El) tehát nem azt kívánja meg, hogy minden elképzelhető dolog egyszerre realizálható legyen, hanem csak annyit, hogy minden megengedett cselekvés összeegyeztethető legyen a kötelező cselekvések mindegyikével. Így az a kijelentés, hogy „A megengedett" nem jelent mást mint azt, hogy A összeegyeztethető minden kötelezettséggel.

A deontikus logika formuláinak egy Γ halmazát akkor és csak akkor mondjuk ellentmondásmentesnek (kielégíthetőnek), ha a dolgok megfelelő állapota mellett (a „lehetséges világok" egyikében) a halmaz minden formulája igaz. Mindez pontosabban az interpretáció fogalmán keresztül világítható meg.

Legyen az S az összes dolgok lehetséges állapotainak, a „lehetséges világoknak" az összessége. Ekkor a V interpretáció egy olyan függvény lesz, amely a logikai változójelekhez minden $k \in S$ világban a t (igaz), vagy az f (hamis) „jelentést" rendeli. A formulákra a V definíciója rekurzívan kiterjeszthető a következő módon:

$V(\sim A,k)=t$ akkor és csak akkor, ha $V(A,k)=f$, ellenkező esetben $V(\sim A,k)=f$.
$V(A \wedge B,k)=t$ akkor és csak akkor ha $V(A,k)=t$ és
$V(B,k)=t$, minden más esetben $V(A \wedge B,k)=f$.

Azt mondjuk, hogy a formulák egy Γ halmaza a k világban igaz, ha $V(A_i, k)=t$ minden $A_i \in \Gamma$ formulára. Ennek megfelelően az (El) elvet a következő formában használhatjuk:

(D1) Ha az $\langle O\ A_1, \ldots, O\ A_m, \text{Perm}\ B \rangle$ halmaz a k világban igaz, akkor létezik egy olyan $k_1 \in S$ világ, hogy az $\langle A_1, \ldots, A_m, B \rangle$ igaz k_1-ben.

A k_1 világban tehát igazak mindazok a formulák, amelyek kötelezően teljesülnek k-ban. J. Hintikka után a k_1 világot a k deóntikus változatának nevezzük. Ha k_1 a k deóntikus változata, akkor ezt $R(k_1,k)$ jelöli. Ha a $k \in S$ a „valódi világ"[4], akkor a k_1 típusú világok a „deontikusan tökéletes világok", vagy „ideális világok", melyekben az összes kötelezettség megvalósítható.

A D1 elvet a következő feltételekkel lehet helyettesíteni:

(D2) Ha $V(\text{Perm}\ B,k)=t$, akkor létezik egy $k_i \in S$ úgy, hogy az $R(k_i,k)$ és $V(B,k_i)=t$,
(D3) Ha $V(O\ B,k)=t$, akkor minden olyan $k_i \in S$ világra, melyre $R(k_i,k)$ teljesül, $V(B,k_i)=t$ is teljesül,
(D4) $V(O\ B,k)=t$, akkor és csak akkor, ha $V(B,k_i)=t$ minden olyan $k_i \in S$ világra melyre $R(k_i,k)$,
(D5) $V(\text{Perm}\ B,k)=t$, akkor és csak akkor, ha $V(B,k_i)=t$ valamelyik olyan $k_i \in S$ világra melyre $R(k_i,k)$.

(D4), (D5), a propozicionális jelekre vonatkozó definíciókkal együtt meghatározza a propozicionális deóntikus logika standard rendszerének a jelentését (pontosabban az idetartozó formulák jelentését). Az $< S,k,R >$ rendezett hármast, ahol S az összes lehetséges világok halmaza, $k \in S$ a valódi világ, R pedig a világok alternatív voltát kifejező bináris reláció, modell-rendszernek (J. Hintikka), vagy modell-struktúrának (S. Kripke) nevezzük.

Deontikus formulák egy Γ halmaza akkor és csak akkor ellentmondástalan (kielégíthető), ha létezik olyan modell-rendszer, amelyben (D1), (D2), (D3) és a Γ halmaz minden formulája igaz. Egy deóntikus formula akkor és csak akkor tautológia, ha minden modell-rendszerben igaz. Ha a formula egyetlen modell-rendszerben sem igaz, akkor kielégíthetetlennek, más szóval ellentmondásosnak nevezzük.[5] Legyenek A és B deóntikus logikai formulák. A-ból akkor és csak akkor következik a B, ha az $A \supset B$ formula tautológia.

[4] Az elnevezést használják, de nem találó. Szó sincs ugyanis arról, hogy a valódi világ azonos volna azzal a fizikai világgal amelyben élünk. A „valódi világ" egyszerűen egy kitüntetett, vagy más szóval kiinduló világ, amelyhez a többit viszonyítani lehet.

[5] Az eredeti szövegben nem szerepel a „kielégíthetetlen" szó. Az irodalomban a szerző által közölt definíció a kielégíthetetlenség definíciójaként szerepel, és az ellentmondásosság meghatározása alapvetően különbözik tőle. Bizonyos logikai rendszerekben azonban a két fogalom ekvivalens. Ennek kimutatása azonban külön — általában igen mély — meggondolást igényel. Mivel a deóntikus logika szerző által vázolt rendszere ilyen tulajdonságú, így a két fogalom keverése csak a szóhasználatban okoz nehézségeket. (Szerk.)

Hilpinen és Follesdal, fentebb említett cikkükben megmutatták, hogy a propozícionális deóntikus logika standard rendszere teljes erre a szematikára: egy formula akkor és csak akkor tétel, ha tautológia.[6]

Ebből következik, hogy a deóntikus logika standard rendszere ellentmondástalan, továbbá, hogy létezik olyan eljárás, amely meghatározza a deóntikus logika standard rendszerének bebizonyíthatatlan formuláit.[7]

Pl. ki lehet mutatni, hogy a következő formulák nem bizonyíthatók be:

$O\,A \supset A,\ A \supset O\,A,\ O{\sim}A \supset A \supset O\,B,\ \mathrm{Perm}\,A \wedge \mathrm{Perm}\,B \supset \mathrm{Perm}\,(A \wedge B)$

A propozícionális deóntikus logika rendszereihez más szemantika is definiálható. Röviden felvázoljuk a deóntikus logika valószínűségi szemantikáját.

Legyen P egy valószínűségi függvény, amely a deóntikus logika formuláin értelmezett, és eleget tesz a valószínűségszámítás szokásos axiómáinak. A rendezett $\langle V,P \rangle$ párt deóntikus interpretációnak nevezzük (röviden: D-interpretáció), ha P a fenti valószínűségi függvény, V pedig a deóntikus logika formuláihoz rendel logikai igazságértékeket. Ez a V függvény a már tárgyalt hasonló függvénytől csak az O A és Perm A definíciójában tér el. A(D4) és (D5) helyett most a következő definíciókat használhatjuk:

(K4) $V(O\,A)=t$, ha $P(A)=1$,
$V(O\,A)=f$, ha $P(A) < 1$
(K5) $V(\mathrm{Perm}\,A)=t$, ha $P(A) > o$,
$V(\mathrm{Perm}\,A)=f$, ha $P(A)=o$.

Az egyéb jeleket tartalmazó formulákra V definícióját nem változtatjuk meg.

Egy tetszőleges A formula akkor és csak akkor deóntikus tautológia (rövidebben: D-tautológia), ha bármely D-interpretációban igaz. Bebizonyítható, hogy deóntikus logika standard rendszerének minden axiómája D-tautológia, következtetései megőrzik a formulák ilyen tulajdonságait, vagyis ha a premisszák D-tautológiák, akkor a következtetés eredménye is az. Ebből következik, hogy minden tétel egyúttal D-tautológia is.

A deóntikus logika standard rendszerében megengedünk olyan formulákat is melyek iterált modalitásokat tartalmaznak. (Pl. O O A, kötelező a kötelező A.) Így pl. (S3) többek között a $\mathrm{Perm}\,(O\,A \vee O\,B) \equiv \mathrm{Perm}\,O\,A \vee \mathrm{Perm}\,O\,B$ formulát is formalizálja. Természetesen a deóntikus logika standard rendszerét oly módon is bővíthetjük, hogy az iterált modalitásokat tartalmazó formulákat axiómaként tekintjük:

(S7) $O\,A \supset O\,O\,A$
(S8) $O(O(A) \supset A)$

Ezeknek a formuláknak a jelentősége azzal kapcsolatos, hogy a deóntikus logika standard rendszerében sem az $O\,A \supset A$, sem pedig a $A \supset O\,A$ nem tétel. A fenti két formula axiómaként való felhasználása révén azonban bizonyíthatók lesznek olyan tételek is, mint pl.:

[6] Az eredeti szövegben ez nem így szerepel az előbbiekben vázolt szóhasználati nehézség miatt. (Szerk.)

[7] Valójában a leírtakból csak az állítás első fele következik. Az állítás második része a standard deóntikus logika egyéb tulajdonságaiból vezethető le.

$$(21)\ O\,O\,A \equiv O\,A$$

1) $O(O\,A \supset A) \supset O\,O\,A \supset O\,A$ (10) szerint
2) $O(O\,A \supset A)$ S8 szerint
3) $O\,O\,A \supset O\,A$ 1), 2) és RS szerint
4) $O\,A \supset O\,O\,A$ S7 szerint
5) $O\,O\,A \equiv O\,A$ 3), 4) és RS szerint

Ebből és (2)-ből pedig következik a

$$(22)\ \mathrm{Perm}\ \mathrm{Perm}\ A \equiv \mathrm{Perm}\ A.$$

Ezeket a tételeket lehetővé teszik a O O... O A, és Perm Perm... Perm A típusú formulák redukcióját.

Felmerülhet az a kérdés ezzel kapcsolatban, hogy vajon definiálható-e szemantika a standard deóntikus logika fentebb említett bővítéseihez? A válasz igenlő: pl. ahhoz hogy (S7) tautológia legyen, elegendő kikötni, hogy az $\langle S,k,R\rangle$ modell-rendszerben az R egy tranzitív reláció. Ekkor fennáll a következő formula:

(D6) Ha $V(O\,A,k)=t$ és $R(k_1,k)$, akkor $V(O\,A,k_1)=t$.

Szavakkal kifejezve: ha egy kötelezettség a valódi világban fennáll, akkor minden deóntikus változatában is fennáll.

A valószínűségi szemantikában (D6) helyett a következő axiómát használhatjuk:
Ha $P(A)=1$, akkor $P(O\,A)=1$.

Hasonlóan, ahhoz, hogy (S8) tautológia legyen, elegendő megkövetelni, hogy az R szimmetrikus bármely modell-rendszerben. Ennek megfelelően

(D7) Bármely $k \in S$ esetén, ha létezik $k_1 \in S$, úgy hogy $R(k_1,k)$, akkor $R(k,k_1)$ is teljesül.

Megemlítjük, hogy R nem lehet reflexív, hiszen $R(k,k)$ nyilván hibás. A valódi világ ugyanis deóntikusan nem tökéletes.

A standard deóntikus rendszer általánosításának egy másik lehetséges újta a feltételes deóntikus modalitások bevezetése lenne. Ilyen pl. az „A megengedett a B körülmények között" jelben: Perm (A B), „A kötelező a B körülmények között" (O(A B)), illetve „A tiltott a B körülmények között" (F(A B)).

Vázlatosan bemutatjuk a deóntikus logika egy olyan rendszerét is, melyben a kiindulójel a feltételes kötelezettség lesz. Ezt a rendszert szintén RS bővítéseként definiáljuk.

Csatoljuk a formulák képzési szabályaihoz a következő szabályt:
Ha A és B formulák, akkor $O(A|B)$ is az.

Tekintsük axiómáknak az

(I1) $O(A \vee \sim A|C)$
(I2) $\sim(O(A|C) \wedge O(\sim A|C))$
(I3) $O(A \wedge B|C) \equiv O(A|C) \wedge O(B|C)$
(I4) $O(A|C) \wedge O(A|D) \supset O(A|C \vee D)$
(I5) $O(A|C \vee D) \wedge \mathrm{Perm}(C|D) \supset O(A|C)$

sémákat, valamint az S5 extenzionalitás szabálya legyen következtetési szabály:
Ha $\vdash A \supset B$, akkor $\vdash O(A|C) \supset O(B|C)$

Ebben a rendszerben Perm(A|B) azt jelenti, hogy $\sim O(\sim A|B)$ és F(A|B) pedig azt, hogy $O(\sim A|B)$.

Az (I1)-(I3) axióma sémák biztosítják, hogy feltételes kötelezettség a feltétlen kötelezettség általánosítása.

A szemantika megadásához a feltételes valószínűség fogalmából indulhatunk ki. A (K4) és (K5) a következő definíciókkal helyettesítendő:

(K6) $V(O(A|B))=t$ ha $P(A|B)=1$,
$V(O(A|B))=f$ ha $P(A|B)<1$.
(K7) $V(Perm(A|B))=t$ ha $P(A|B)>o$,
$V(Perm(A|B))=f$ ha $P(A|B)=o$.

(Itt $P(A|B)$ az A B-re vonatkozó feltételes valószínűsége.)

A D-interpretáció és a D-tautológia definíciója változatlan (természetesen ez úgy értendő, hogy (K4) és (K5) helyett (K6) ill. (K7) szerepel). Bizonyítható, hogy a rendszer mindegyik axiómája D-tautológia, és hogy a következtetési szabályok helyesek, azaz ha a premisszák D-tautológiák, akkor a konkluzió is az. Ebből következik, hogy a kalkulus minden tétele D-tautológia és így ellentmondásmentes.

A propozicionális deóntikus logika más általánosításai is elképzelhetők. Ígéretesnek tűnnek azok a vizsgálatok, melyek a deóntikus kalkulusokat összekapcsolják a preferenciák logikájával, az utilitáris, vagy az aletikus modalitások logikájával. Ez utóbbian pl. a deóntikus operátorok a következő módon adhatók meg (itt elegendő csak a kötelezettség definiálása, a többi operátor a szokásosan kapható).

(23) $O\,A \equiv \Box(Q\,A)$

ahol $\Box$ a szükségesség jele, a Q pedig az aletikus

„az erkölcsi törvények által meghatározott"

kijelentés jele. Tehát az „A kötelező azt jelenti, hogy A az erkölcsi törvények következménye."

A (23)-as ekvivalencia felhasználásával a deóntikus kalkulus levezethető az aletikus logika axiómáiból. Ez azt mutatja, hogy az erkölcsi törvények összegyűjthetők. Perm A úgy értelmezhető mint $\Diamond(Q \wedge A)$, azaz, az A megengedett, ha összeegyeztethető az erkölcsi előírásokkal.

Más, igen érdekes vizsgálatok kinálkoznak a deóntikus predikátumkalkulusban is.

A deóntikus predikátumkalkulusban a formulák képzésében a propozícionális jelek és változók mellett individuum- és predikátum-változók, valamint kvantorok is szerepet kapnak. A predikátum-változók a cselekvések sajátosságait és egymáshoz való viszonyukat, az individuum-változók pedig az egyedi cselekvéseket jelölik meg. Megjegyezzük ezzel kapcsolatban, hogy a deontikus fogalmak nem meghatározott, konkrét személyiséghez kapcsolódnak, hanem a cselekvéseket közelebbről meg nem határozott általános személyek hajtják végre.

A kvantorok bevezetésének következményeként a „tiltottnak", „kötelezőnek" és a „megengedettnek" különféle típusai vannak, melyek között sokkal bonyolultabb az összefüggés mint a standard rendszerben:

I.	II.	III.
$\forall x\, O \sim A(x)$	$\exists x\, O \sim A(x)$	$O\, \forall x \sim A(x)$
$\sim \exists x\, Perm A(x)$	$\exists x \sim Perm\, A(x)$	$O \sim \exists x\, A(x)$
	$\sim \forall x\, Perm\, A(x)$	$\sim Perm\, \exists x\, A(x)$

A különböző oszlopokabn a tiltás különböző típusai találhatók. Az egy oszloppon belüli formulák egymással ekvivalens megfogalmazásai az adott típusnak.

A II. oszlopban szereplő típus részleges és meghatározatlan jellegű: csak azt állítja, hogy léteznek tiltott cselekvések.

Az I. és III. oszlop típusainak értelmezésénél feltételezzük, hogy az x individuum-változó az $\langle a_1,\ldots, a_n\rangle$ véges halmaz egy elemét jelöli ki. Ekkor $\forall x\, O \sim A(x)$ azt jelenti, hogy $O \sim A(a_1) \wedge \ldots \wedge O \sim A(a_n)$, a $O\, \forall x \sim A(x)$ pedig, hogy

$O(\sim A(a_1) \wedge \ldots \wedge \sim A(a_n))$ ez viszont (7) szerint $O\sim A(a_1) \wedge \ldots \wedge O\sim A(a_n)$. Íly módon az I. és II. oszlop típusai lényegében megegyeznek. A tiltásnak ezek a típusai lehetőséget biztosítanak ahhoz, hogy cselekvések valamely összességéből egy bizonyosat megtiltsunk, vagy megengedjünk.

A kötlezettség a következő módokon fejezhető ki:

I.	II.	III.
$\forall x\, O\, A(x)$	$O\, \forall x\, A(x)$	$O\, \exists x\, A(x)$
$\sim \exists x\, Perm \sim A(x)$	$\sim Perm\, \exists x \sim A(x)$	$\sim Perm\, \forall x \sim A(x)$

Az előzőkhöz hasonlóan itt is két típus különbözik lényegesen. Az egyiket az I. és II. oszlopokban levő formulák fejezi ki: cselekvések egy összességéből mindegyik cselekvésnek meg kell történni. A másik fajta a III. oszlopban található: létezik kötelező cselekvés. A különbséget a következő példával világítjuk meg:

„Reggel és este kötelező a fogmosás".

Ez I. illetve II. típusú kötelezettség, míg

„Reggel, vagy este kötelező a fogmosás"

a III. csoportba tartozik.

A megengedett fogalma is három módon formalizálható:

I.	II.	III.
$\exists x\, Perm\, A(x)$	$Perm\, \forall x\, A(x)$	$\forall x\, Perm\, A(x)$
$\sim \exists x\, O \sim A(x)$	$\sim O\, \exists x \sim A(x)$	$\sim \exists x\, O \sim A(x)$

Az I. típus szavakban azt fejezi ki, hogy van olyan cselekvés, amely A tulajdonságú és és engedélyezett a végrehajtása. Ilyen fajta engedély van „a repülőgép leszállhat" mondatban.

A $Perm\, \forall x\, A(x)$ formula jelentése: megengedett, hogy minden cselekvés A tulajdonságú. Végül $\forall x\, Perm\, A(x)$ azt jelenti, hogy bármely cselekvés lehet A tulajdonságú. Nyilvánvaló, hogy ez utóbbiak lényegesen különöznek az I. oszlop formuláitól. Megmutatjuk, hogy a II. és III. oszlop formulái sem ekvivalensek egymással. Ehhez tegyük fel, hogy az x indivíduum változó az $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ véges halmaz valamelyik elemét jelöli meg. Ekkor a II. típusú engedélyezés $Perm\, (A(a_1) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$, a III. fajta pedig $Perm\, A(a_1) \wedge \ldots \wedge Perm\, A(a_n)$ alakú. Mivel a (9) tétel megfordítása nem tétel, látható, hogy a két formula nem ekvivalens, de az elsőből következik a második. Így a II. típusú engedély erősebb, mint a III. típusú. Ezt a különbséget a következőképpen magyarázhatjuk: míg $Perm\, \forall x\, A(x)$ a cselekvéseket együtt, és külön-külön is engedélyezi, addig a $\forall x\, Perm\, A(x)$ engedély a cselekvésekre csak külön-külön vonatkozik, és semmit nem szól az együttes végrehajtásról. Pl. egyszerre, vagy külön-külön lehet beszélni és nevetni, de a lottó nyereménysorsoláson nyert dolgot vagy mint tárgyat, vagy mint készpénzt vehetjük fel, de természetesen nem szabad mindkét alakben felvenni.

A III. típusú engedélyezés általában maga után vonja a két, vagy több megengedett cselekvés közötti választást. Ez a választás mindig kötelező, amikor a külön-külön megengedett cselekvések együttesen tiltottak.

A deóntikus logika kvantifikációs elmélete azt mutatja, hogy a kötelezettség, az engedélyezés és tiltás deóntikus fogalmai bonyolultabbak és sokrétűbbek a propozicionális logikában tárgyalható fogalmaknál. A deóntikus fogalmak adekvát vizsgálata tehát elképzelhetetlen a kvatorok felhasználására nélkül.

(J. Hintikka is hasonló következtetésre jutott: J. Hintikka; *Some main problems of deontic logic.* In „Deontic logic: introductory and systematic readings." Ed. by R. Hilpinen.)