Hegyi Ferenc:

A SZÁMFOGALOM ÉRTELMEZÉSÉNEK EGY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJÁRÓL

Ma már közismert a tudományok fejlődésének az a törvénye, mely szerint idővel minden tudományos elméletet felvált egy újabb, az előzőnél valamilyen szempontból általánosabb elmélet.

Néha mégis meglepetésszerűen hat egy-egy ilyen elméletváltásra irányuló próbálkozás, különösen, ha olyan elmélet revidiálásáról van szó, amely a maga hagyományos formájában, sokszori sikeres alkalmazása és evidens megjelenése miatt mindenki számára magától értetődik. A tudományok fejlődése azonban azt bizonyítja, hogy néha még az olyan jól ismert és megszokott fogalom tartalmi vonatkozásainak felülvizsgálata is szükséges lehet, mint amilyen például a szám fogalma.

Cikkünkben a számfogalom értelmezésének egy sajátos problémájával és egy újraértelmezési kísérlettel kívánunk foglalkozni.[1]

A szám fogalma absztrakcióval jön létre. Ennek során a valóság bizonyos sajátosságaitól eltekintünk. Első megközelítésben úgy tűnhet, hogy az időtől is elvonatkoztathatunk. Ez azonban nem ennyire egyszerű. Egy mennyiséget jelölő szám használatakor általában valóban nem érezzük szükségesnek az idő figyelembevételét. Sorrendet jelölő szám esetén viszont a számolás időbenisége új problémákat vethet fel. Úgy tűnik, hogy a mennyiséget jelölő számok és a sorrendet jelölő számok a nyelvi különbözőségen túl (tőszámnév, ill. sorszámnév) is lényegesen különböznek. Később ezt a fejtegetést pontosítjuk.

A továbbszámlálással kapcsolatos az a probléma is, hogy ha n egy igen nagy természetes szám, akkor — a számlálás tárgyának konkrét jellegétől függően — közömbös lehet, hogy egy adott n esetén n-ről vagy $n+1$-ről beszélünk. Azt mondhatjuk, hogy csak egy bizonyos nagyságú d növekmény esetén lesz jelentős az eltérés, azaz, n-et és $n+d$-t már meg kell különböztetnünk. Hogy mekkora ez a kritikus d növekmény, az nyilván az adott jelenségtől függ. Akaratlanul is a mértékviszonyok filozófiai törvénye jut eszünkbe. Itt nem másról van szó, mint a hegeli számkoncepció felelevenítéséről, amely szerint a számok mennyiségen kívül minőséget is jelölnek.[2]

Bár az elmondottak legfeljebb heurisztikus tapogatózásnak tekinthetők, mégis érdekesnek tűnhet a számok kétféle — mennyiséget, ill. sorrendet jelölő — típusának viszonyát vizsgálni.

Felvetődik a kérdés: Vajon egyáltalán szükség van-e a számfogalom felülvizsgálatára, újraértelmezésére? A klasszikus halmazelmélet azon egyszerű tételén túl, amely hozzávetőlegesen véges esetben a kétféle szám közötti azonosságot állítja,[3] a matematika számtalan eddigi eredménye is azt mutatja, hogy a számok hagyományos felfogásával is sokra megyünk. Elegendő itt a dinamikus rendszerek és a sztochasztikus folyamatok elméletére utalnunk.

Ennek ellenére van olyan törekvés, hogy a számok kettős jellegét az eddigiektől eltérő módon különböztessük meg. A továbbiakban egy ilyen, a szakirodalomban fellelhető próbálkozással foglalkozunk. Mielőtt azonban erre rátérnénk, szükségesnek tartjuk röviden ismertetni, hogy a klasszikus matematikában milyen formában szerepel ez a megkülönböztetés.

A Cantor-féle halmazelmélet különbséget tesz a halmazok számossága és rendtípusa között. Ez a megkülönböztetés azonban eltérő jellegű a véges és a végtelen esetben. Mint látni fogjuk, véges halmazok esetén a két fogalom egybeesik. Nézzük meg, hogyan.

Két halmazról — A-ról és B-ről — akkor mondjuk, hogy elemeik száma megegyezik, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető B-re. A kölcsönösen egyértelmű leképezhetőség ekvivalencia reláció (azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív), ezért ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető B-re, akkor azt mondjuk, hogy A ekvivalens B-vel.[4] Szokásos jelölése: $A \sim B$.

Mivel a kölcsönösen egyértelmű leképezés ekvivalencia reláció, ezért osztályozza a (véges és végtelen) halmazokat. Az így előálló egyes halmazosztályokat különbözőképpen jelöljük. Pl. 1, 2, ..., $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}$. 1, 2, ... a természetes számokat, $\mathfrak{a}$ a természetes számok halmazának számosságát (elemeinek számát), $\mathfrak{c}$ a valós számok, $\mathfrak{h}$ az összes valós változós valós értékű függvények halmazának számosságát jelöli.

Ezen definícióval szemben az a kifogás támasztható, hogy nem egyezik meg a számokról kialakított szemléletes képünkkel. Könnyen kimutatható viszont, hogy ez a definíció rendkívül közel áll a számfogalom geneziséhez. Pl. az ‚öt' fogalma bizonyos — különböző elemekből álló — halmazok közös tulajdonságát ragadja meg; ti. éppen azt, hogy öt elemük van.[5] (Érdemes megjegyezni, hogy a számolás egyik legfontosabb jellemzője éppen ennek a közös sajátosságnak a kiemelése, az egyéb tulajdonságoktól való elvonatkoztatás.)

Meg kell azonban említenünk azt is, hogy a számosságok ilyen megközelítése végtelen halmazok esetén a mai napig erősen vitatott. A végtelen halmaz ilyenkor aktuális végtelenként jelentkezik, és ezt a koncepciót Cantor[6] óta — éppen a matematika megalapozása, az ellentmondások kiküszöbölése céljából — sorozatosan támadták, elsősorban az intuícizmus, illetve a matematika konstruktív irányzatának képviselői. Könnyen látható, hogy részben a számhasadási elmélet (ld. később) is a kétféle végtelen fogalmából származó nehézségekkel küszködik.

Eljutottunk tehát a halmazok elemei számának definiálásához. Nézzük meg, hogyan tudjuk a rendezés, a sorrend fogalmát meghatározni.

Akkor mondjuk, hogy egy H halmaz $R^{<}$ reláció szerint rendezett, ha H-n $R^{<}$ irreflexív, aszimmetrikus, tranzitív és trichotom. (Ilyen reláció pl. a ‚<' a természetes számok halmazán. Megjegyezzük, hogy az irreflexivitásból és a tranzitivitásból már következik az aszimmetria.)

A és B rendezett halmazokról akkor mondjuk, hogy ugyanúgy (vagy hasonlóan) vannak rendezve (röviden: hasonlóak), ha létezik olyan monoton leképezés, amely A-t B-re képezi le.[7]

Meg lehet mutatni, hogy a monoton leképezésnek szükséges feltétele a kölcsönös egyértelmű leképezhetőség. Azaz, ha A halmaz hasonló B-hez, akkor $A \sim B$. Fordítva viszont általában nem igaz.

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ekvivalens halmazok lehetnek különböző módon rendezve. (Azaz, más a rendtípusuk.) Ez azonban csak végtelen halmazokra igaz! Egy adott számosságú véges halmazt csak egyféleképpen lehet rendezni, mivel két véges, azonos elemszámú halmaz mindig leképezhető egymásra monoton módon. Ezért nem teszünk különbséget a klasszikus halmazelmélet alapján a véges halmazok körében számosság és rendtípus között.

Ezen a cantori felfogáson kívánnak túllépni I. P. Truszov és B. A. Lasztocskin, amikor a 60-as évek második felében kidolgozzák a számhasadási elméletet.[8] Az említett szerzők elméletük felhasználásával megmagyaráznak néhány paradoxont, és igyekeznek olyan konkrét példákat adni, melyek növelik hipotézisük hihetőségét. A példák egyik típusa azonban igényesebb vizsgálat esetén olyan eredményre vezet, amely megkérdőjelezi az egész elmélet igazságát.

Kételyeink ismertetése előtt azonban lássuk röviden a számhasadási elmélet lényegét.

A számlálás eredményeképpen kapott szám és a mennyiséget kifejező szám közötti különbséget az idő múlásának és a dolgok, jelenségek, folyamatok minőségi sokféleségének — többnyire kényszerű — figyelembevétele adja. Minden konkrét számolás valamilyen egység kiválasztásán alapul, amely magában foglalja a konkrét meghatározottságokat. Az egységelem kiválasztása a halmaz valamennyi eleme egy közös tulajdonságának meghatározásán alapul. A szokásos eljárás során ezt a meghatározó tulajdonságot teljesen intuitíve választjuk, és ez többnyire nem is okoz gondot. A számlálás során viszont az egységbe zárt minőséget más objektumokra is átvisszük. Az ilyen átvitel jogossága a kezdettől való távolodással csökken. A számlálást gondolatban sokáig folytathatjuk, annak azonban ki vagyunk téve, hogy az objektumot egyre kevésbé jellemzi a számlálás alapjául szolgáló tulajdonság. Hogy az időtől más vonatkozásban sem tekinthetünk el, jól mutatja a már említett szerzőktől származó következő példa.

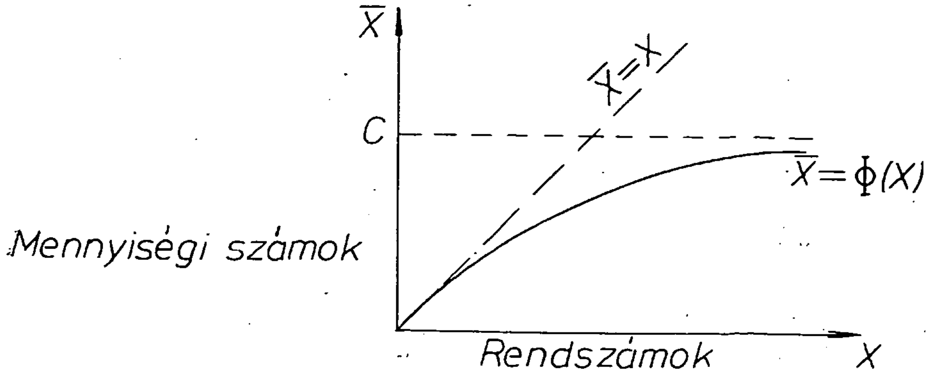
Amennyiben azt kapjuk feladatul, hogy számláljuk meg a tajgában levő fenyőfákat, akkor, ha eljutottunk egy elég nagy n számig, távolról sem lehetünk benne biztosak, hogy a bejárt területen n darab fenyő van...[9] Úgy tűnhet, hogy a pillanatnyi értékelés fogalmának bevezetésével meg lehet szabadulni a kettősség problémájától. A pillanatnyi értékelés fogalma intuitíve világos. Végtelen gyors számolást jelent, és pontosítható is, a következőképpen: A megmérendő halmaz és egy jelhalmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozunk létre, mely utóbbit kényelmesen megszámolhatjuk. Nyilvánvaló, hogy ilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesítése önfejlődő rendszer esetén nem egyszerű feladat, sőt, az sem biztos, hogy mindig megvalósítható.

Az ismertetett nehézségek kiküszöbölésére a számhasadás elmélete feltételezi, hogy a dinamikus rendszerekben a mennyiség elmarad a rendszám mögött. Ha nem teszünk különbséget a mennyiség és a rendszám között, ez annyit jelent, hogy feltételezzük: $\overline{X}=X$($\overline{X}$ az X rendszámú halmaz számosságát jelöli). A hipotézis szerint a mennyiség elmarad a rendszám mögött, és aszimptotikusan egy C határérték felé közeledik. (1. ábra)

Truszov és Lasztocskin szerint a mértékhasadás matematikai kifejezése lehetővé teszi a minőségi ugrás bekövetkezése valószínűségének meghatározását. Ezen állításukra még visszatérünk.

A mennyiség és a rendszám differenciáljának fogalmát felhasználva egy differenciálegyenlet megoldásaként származtatják a mennyiség és a rendszám szétválását leíró Φ függvényt.[10] Ez az eljárás azonban eléggé problematikus, ugyanis a mai felfogás szerint nem egzakt, így nem teljesen meggyőző. Ugyanakkor viszont az elmélet létjogosultsága részben éppen azon múlik, hogy ez a levezetés egzakttá tehető-e. Úgy gondoljuk, hogy jelentősége és érdekessége miatt érdemes röviden ismertetni ezt a levezetést.

Jelöljük a mennyiség növekményét dy-nal, a sorrend mértékének növekedését dx-el. A mértékegységek esetleges eltérő választásából adódó nehézségek kiküszöbö-



1. ábra

lése céljából az egységre számított növekménnyel célszerű dolgozni. Vezessük be a következő differenciálokat:

$$\frac{dy}{y} := d\ ln\frac{y}{y_0} \quad \text{és} \quad \frac{dx}{x} := d\ ln\frac{x}{x_0},$$

ahol y_0 és x_0 kezdeti értékeket nem is szükséges pontosan rögzítenünk, mert differenciáláskor úgyis eliminálódnak.

A mértékhasadás egy adott pillanatban a bevezetett differenciálok segítségével mérhető:

$$I_m = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{\frac{y}{x}dx} = \frac{dy}{ds}, \tag{1}$$

ahol I_m a megőrzési index (az elnevezést később indokoljuk), dy a mennyiség differenciálja az egység tetszőleges választása mellett, $ds = \frac{y}{x}dx$ pedig a szakadás differenciálja.

Ha a megőrzési index az idő folyamán 1-től 0-ig csökken, akkor ez a függvény úgy tekinthető, mint a szituáció megőrzése valószínűségének (P_m) valamilyen függvénye:

$$I_m = \frac{dy}{ds} = F_1\ (P_m). \tag{2}$$ [11]

Ha az y mennyiség változása során nem haladja meg a C értéket, akkor az $\frac{y}{C} \leqq 1$

függvényt felfoghatjuk a szituáció változása valószínűsége (P_v) függvényeként és változási indexnek nevezzük:

$$I_v = \frac{y}{C} = F_2 (P_v). \qquad (3)^{12}$$

A változási index általában nehezen számítható ki, mivel a szaturáció C határa rendszerint nem ismert, továbbá maga y is nehezen határozható meg.

A hagyományos matematikai apparátusra áttérve, a teljes valószínűség tételéből kapjuk:

$$P_m + P_v = 1 \qquad (4)$$

(4)-ből (2) és (3) alapján:

$$f_1 (I_m) + f_2 (I_v) = 1, \qquad (5)$$

ahol $P_m = f_1 (I_m)$ az $I_m = F_1 (P_m)$ inverz függvénye és hasonlóképpen $P_v = f_2(I_v)$ az $I_v = F_2(P_v)$ inverz függvénye.

(2) és (3) definíciókból:

$$f_1 \left(\frac{dy}{ds} \right) + f_2 \left(\frac{y}{C} \right) = 1. \qquad (6)$$

Minden olyan konkrét esetben, amikor a (6) egyenlet megoldható, beszélhetünk annak

$$y = \Phi (s) \qquad (7)$$

megoldásáról. Ezt a Φ függvényt nevezzük hasadási függvénynek.[13]

Nézzük ezután azt a példát, amely az említett szerzők mindkét, ezen témával foglalkozó dolgozatában megtalálható.[14] Tegyük fel, hogy a sebességek összeadásának klasszikus törvénye igaz az ordinális mennyiségekre nézve, a rendszám és a mennyiség széthasadásának függvénye pedig

$$\frac{\bar{v}}{C} = th \frac{v}{C},$$

ahol „th" a tangens hiperbolikus függvényt jelöli és alább pedig „ar th" az arcus tangens hiperbolikus függvényt jelöli. Ekkor az u és v sebességek w eredőjét a

$$w = u + v$$

összefüggés alapján kapjuk. Osszuk el mindkét oldalt C-vel, majd térjünk át rendtípusú sebességekről mennyiségi sebességekre:

$$\frac{w}{C} = \frac{u}{C} + \frac{v}{C}$$

$$\text{ar th} \frac{\bar{w}}{C} = \text{ar th} \frac{\bar{u}}{C} + \text{ar th} \frac{\bar{v}}{C}$$

$$\dots$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} + \bar{v}.}{1 + \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{C^2}}$$

Ez az eredmény nagyon imponáló, meggyőzőnek tűnhet, hiszen éppen a relativisztikus sebességösszeadás formuláját kaptuk. Azonban a példán jól látható, hogy a számhasadási hipotézis ebben az esetben nem hoz újat. Φ-t azért választották éppen th-nak, mert így a transzformáció végrehajtása után éppen a kívánt formulát kapjuk.

Az idézett példából két következtetést vonhatunk le. Először, hogy az elmélet valószínűleg nem hoz lényegesen új eredményt, mert Φ meghatározására nem ad módszert. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az elmélet alapján a minőségi ugrás bekövetkezésének valószínűsége nem adható meg, csak kerülő úton, valamilyen más szaktudományos elmélet alapján.

Másodszor, ennél súlyosabb gyanúnk is felmerülhet. Az tudniillik, hogy nem tudományos az elmélet, mert nem falszifikálható. Ezen a ponton elég komoly nehézségek lépnek fel. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a függvény nem egy standard rendszám — mennyiség függvény, hanem mindenkor függ attól, milyen konkrét jelenség mérőszámairól van szó. Így meghatározására általános módszer nem adható. Ennek következtében az ismertetetthez hasonló típusú példák esetén a függvény léte elvileg megcáfolhatatlan, emiatt bizonyítékként nem csak egyediségük miatt nem állják meg a helyüket.

A falszifikálhatatlanság azonban egyelőre gyanú is marad, mert a hipotézisből levonható egyéb következtetések cáfolni látszanak, annak ellenére, hogy egy részük matematikailag ugyanúgy nem egzakt, mint a Φ függvény ismertetett származtatása. Ugyanakkor nagy jelentőségű eredménye a számhasadás elméletének, hogy alapvetően új megvilágításba helyezi a mennyiség, valószínűség és információ kategóriákat, valamint ezek viszonyát. Ezen kívül magyarázatot ad az exponens paradoxonra.[15]

*

Az eddig elmondottakat a következőképpen összegezhetjük: A számhasadási elmélet szép eredményei ellenére rendkívül ingatag. Nem hogy a bizonyítása, de még a heurisztikus alátámasztása is komoly nehézségekbe ütközik, gondoljunk csak az idézett relativisztikus példára. Az elmélet jelenlegi formájában a matematikának semmiféle segítséget nem tud nyújtani, sőt, egyik ki nem mondott konzekvenciája éppen a hagyományos matematikai apparátus sértetlenül hagyásának lehetősége.[16] Azt mondhatjuk tehát, hogy az elmélet inkább filozófiailag érdekes, mint matematikailag. Értékelésünkben új az elmélet nehézségeinek, hiányosságainak, illetve az alátámasztásban található gyenge pontok kimutatása. Mégis, cikkünk célja nem az, hogy a számhasadási elmélet ellen vagy mellette érveljen, hanem a figyelem ráirányítása azokra a jelentős problémákra, amelyek elvezethetnek a fentebb leírt megoldási kísérlethez.

JEGYZETEK

1 Az itt vizsgált problémák egy részét érintettük „A valószínűség-fogalom néhány filozófiai problémája" című előadásunkban, amely 1979. októberében Visegrádon, a matematika és a természettudományok filozófiai problémáival foglalkozó konferencián hangzott el.

2 Hegel: A logika tudománya I. rész. Budapest, 1979. 177—286. l.

3 Később ezt pontosabban is megfogalmazzuk.

4 Ez a definíció az absztrakcióval való definíció egy speciális esete. Lásd pl.: Kalmár: A matematika alapjai I/1. Budapest, 1972. 15. l.

5 A számfogalom kialakulásáról lásd pl.: Ribnyikov: A matematika története. Budapest, 1968. 25. l.

6 Georg Ferdinand Cantor (1845—1918) német matematikus. Nevéhez fűződik a halmazelmélet megteremtése.

[7] Legyenek A és B rendre az R' és R'' rendezési relációk szerint rendezett halmazok. A-nak B-re történő R leképezése monoton, ha A-nak bármely a, a' elemére a R' a'-ből következik (Ra) R'' $(R a')$.

[8] Ők maguk nem így nevezték elméletüket. A számhasadásról mint tényről beszélnek. Lasztocskin idevágó cikkéből azonban világosan kiderül, hogy fejtegetéseiket nem tudományos tételnek, hanem elméletnek tekintik. Nyilván a fejtegetés heurisztikus jellege miatt nem törekednek nagyobb terminológiai pontosságra.

[9] Ю. П. Трусов, Б. А. Ласточкин: Расщепление меры и прогнозирование качественного скачка. стр. 91. Сб.: Математизация знания. Москва 1968.

[10] U.o. 98—101. l.

[11] Ha $y''>y'$, akkor $I_{m''}<I_{m'}$, a hasadási feltétel szerint. Minél távolabb vagyunk az egységtől, annál kisebb a valószínűsége, hogy megőrződnek az egységbe foglalt tulajdonságok.

[12] Ha $y''>y'$, akkor $I_v(y'')>I_v(y')$. Ha távolabb vagyunk az egységtől, akkor valószínűbb, hogy az egység tulajdonságaiból kevesebb van meg.

[13] Levezetésünkben dy és dx nem szükségszerűen ugyanazon halmaz számosságának, illetve rendszámának differenciálját jelenti. Ez azonban az általánosság olyan foka, melyet a cikkben nem érintettünk. Ugyanezen okból nem tettünk különbséget a hasadási függvény és a tiszta hasadási (másképpen: számhasadási) függvény között sem. Az utóbbit az különbözteti meg az előzőtől, hogy a számhasadási függvény esetében a y mennyiség és a hozzá levezetett s sorrend ugyanazon halmazhoz tartoznak.

[14] Uo. 102—103. l. és B. A. Lasztocskin: Végtelenség és valószínűség. 106—107. l. In: Végtelenség és világegyetem. Budapest, 1974.

[15] Lasztocskin: I. m. 108—113. l.

[16] Ez önmagában nyilván nem hibája az elméletnek.

Hegyi Ferenc

ÜBER EIN PHILOSOPHISCHES PROBLEM DER INTERPRETATION DES ZAHLENBEGRIFFES

Der Verfasser gibt eine kritische Bewertung der sog. Zahlenspaltungstheorie von zwei sowjetischen Wissenschaftlern, I. P. Trusov und B. A. Lastotschkin. Er beweist, dass die Unterscheidung der doppelten Natur der Zahlen so, wie es von der sowjetischen Wissenschaftlern emfehlen wurde, mehrere Probleme aufwirft, die hinter ihre Resultate ein Fragezeichen setzen. Von dem Verfasser wird es gleichzeitig anerkennt, dass ihr Versuch sich auf die Lösung eines ernsten und realen Problemes richtet, so schätzt er — trotz ihrer teilweisen Erfolglosigkeit — ihre Bestrebungen positiv.

Ferenc Hegyi

ON A PHILOSOPHICAL PROBLEM OF THE INTERPRETATION OF THE NUMBER-CONCEPT

A critical appreciation of the so-called number-crack theory of two Sowiet philosophers, I. P. Trusow and B. A. Lastochkin, is given. It is pointed out that the differentiation of the dual nature of numbers, as suggested by the authors, brings several problems which query their results. All the same, it is acknowledged that their attempt aims the solution of a serious and real problem and thus — despite their partial failure — it is positively appreciated.

Ференц Хеди

ОБ ОДНОЙ ФИЛОСОФСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ИСТОЛКОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Автор дает критическую оценку так называемой теории числового расщипления двух советских философов, И. П. Трусова и Б. А. Ласточкина. Он доказывает, что предлагаемый авторами метод различения двойной природы чисел поднимает ряд таких проблем, которые ставят под сомнение их результаты. В то же время автор признает, что их попытки направлены на разрешение серьезной и реальной проблемы и, таким образом, несмотря на некоторых из неудачи, положительно оценивает эти стремления.