A logikus gondolkozásra nevelés a szöveges egyenletek néhány típusának megoldásában

A reformtervezet a matematika tanítás feladatául tűzi ki, hogy logikus gondolkodásra való neveléssel járuljon hozzá a tanulók dialektikus gondolkodásra, materialista világnézetre való neveléséhez. A tervezet nagyobb hangsúlyt kíván adni minden osztályban a szöveges feladatoknak, a VIII. osztályban az egyenletre vezető szöveges feladatoknak, az egyenletek felállításának. Külön kiemeli a fontosságát annak, hogy a tanulók adott egyenlethez szöveget is tudjanak mondani. Amíg a tanulók szöveget és egyenletet nem tudnak egységben látni, addig az egyenletre vonatkozó ismereteik formálisak maradnak.

A következőkben megvizsgáljuk, hogyan jutunk el az általános iskola VIII. osztályában az egyenletek tanításakor a szöveges egyenletek felállításához.

Az egyenletek tanítását egyenletre vezető szöveges feladatok szóbeli megoldásával vezetjük be. Az egyenletet ugyanis nem definiáljuk, mert a definíció absztrakciójáig ebben az életkorban nem juttathatjuk el a tanulókat. Csupán azt tudatosítjuk, hogy az egyenlet a feladat felírása kérdés formájában, amelyre választ kell adni. A válasz az egyenlet megoldása, gyöke.

Az egyenletek alaptípusait azok a fordított szövegezésű feladatok adják, melyeket bevezetésül oldatunk meg a tanulókkal. ($x + a = b$, $x - a = b$, $ax = b$, $\frac{x}{a} = b$) A logikus gondolkodásra nevelés értékes szakasza ez, mert a tanulók az alsóbb osztályban tanultakat új összefüggésben látják és alkalmazzák.

Az alaptípusokból összetett feladatok ($ax + b = c$, $\frac{x}{a} + b = c$ s. i. t.) lebontogatását csak mint az analógiás logikus gondolkodási készség tanítását alkalmazzuk. A lebontogatást szóban végezzük el, miközben az egyre egyszerűsödő egyenleteket lejegyezzük. A lebontogatás mint módszer az egyenletek megoldására nem alkalmas, mert nem vihető következetesen keresztül a gyermek által tanult egyenletek megoldásánál. Ugyanis, ha mind a két oldalon szerepel ismeretlen, csak mind a két oldal egyenlő változtatásával tudjuk meghatározni az egyenlet gyökét.

A szöveges feladatokból adódik a szükségszerűség, hogy azonos átalakításokat végezzünk az egyenletekben. Az azonosságok tanításánál az ismeretszerzés lenini útját követjük. A szöveges egyenletből kiemeljük az azonosságot, megtanítjuk az átalakítást, majd a törvényszerűséget egyenletek megoldásakor gyakoroltatjuk. Megvan tehát a szemléltetés (szöveges egyenlet), elvont gondolkodás (azonos átalakítás törvényszerűsége), alkalmazás (egyenletek megoldása). Ezzel a módszerrel érjük el, hogy a tanulók tisztán lássák az egyenlet és azonosság közötti matematikai és logikai különbséget.

A tanulók analógiás gondolkodását maximálisan kihasználjuk a törtes egyenletek tanításánál. Alaptípusú törtes egyenletekre vezető feladatokat már az alsóbb osztályokban is oldott meg. (Melyik az a szám, melynek fele meg a harmada 15?) Ha a szemléletes megoldást felhasználjuk, a tanuló önerejéből is eljut a törtes egyenletek megoldási módszerének felismeréséig, ha gondolkodását vezetjük.

Az eddigiekben láttuk, milyen nagy szerepe van a logikus gondolkodásnak az egyenletek megoldási módszereinek tanításában. Szöveges feladatokon keresztül vetettük fel a megoldási problémákat, mutattuk be a megoldás módszereit és gyakoroltattuk a megismert törvényszerűségeket. A továbbiakban a tanult megoldási módszerek segítenek a szöveges feladatok egyenletek útján történő megoldásához.

Három olyan szöveges egyenlettípus felállításával foglalkozunk, melyek szemléletes megoldását a tanulók az alsóbb osztályokban gyakorolták. Ezek a típusok: számok meghatározása összegükből és arányukból, két szám kiszámítása összegükből és különbségükből és a feltevéssel megoldható feladatok. A logikus gondolkodási készséget az egyenletek felállítása közben olyan módon fejleszthetjük, ha felelevenítjük a korábban tanítottakat, nem közlünk semmit, csak alkotógondolkodást kívánó kérdésekkel juttatjuk közelebb lépésről lépésre a tanulókat a megoldásig.

Lássunk egy feladatot az először említett típusból: a tsz három parcellát vetett be napraforgóval, összesen 55 holdat. Az első háromszor akkora, mint a második, a harmadik hétszer akkora, mint a második. Hány holdasak az egyes parcellák?

Az alsó tagozatban már megtanulták a tanulók a szöveges feladatok adatainak feljegyzését, megalapozva ezzel az egyenletek felállítását.

$$\text{I.} + \text{II.} + \text{III.};\ 55 \text{ hold}$$
$$\text{II.} \cdot 3 \qquad \text{II.} \cdot 7$$

Hány holdasak az egyes parcellák?

Megoldási tervet is készítettek már a tanulók és szemléleti úton oldották meg a feladatot. A megoldás a következő: a második parcella nagysága egy bizonyos területtel egyenlő, az első ennek háromszorosa, a harmadik pedig hétszerese. Ez összesen a második terület 11-szerese, ami 55 holddal egyenlő. A második parcella területe az 55 hold 11-ed része, 5 hold, az első parcella $3 \cdot 5 = 15$ (hold), a harmadik parcella $7 \cdot 5 = 35$ (hold).

Az ellenőrzés szükségességét is belátták az alsóbb osztályban a tanulók $3 \cdot 5 + 5 + 7 \cdot 5 = 55$.

Az ellenőrzés az önállóságra nevelés fontos eszköze.

A VIII. osztályos tanulók már elvonatkoztatnak. Az első területet 3x-szel, a másodikat x-szel, a harmadikat 7x-szel jelölik, ezek összege 55.

$$3x + x + 7x = 55$$

Ezt az egyenletet az alsóbb osztályokban tanultak alapján szinte önállóan írják le a tanulók. Rövidesen eljutnak addig, hogy a szemléletes és az egyenlettel való megoldási módot egységében látják. Szóval biztosan absztrahálnak.

A feladat újabb megfogalmazásával hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy a szereplő mennyiségek bármelyikét tekinthetjük ismeretlennek s a többit az adott összefüggések alapján jelölhetjük. Ha az előbbi feladatban úgy fejezzük ki az összefüggéseket, hogy a második terület az elsőnek háromszorosa és a harmadik hétszerese, a tanuló nyilván az első területet tekinti ismeretlennek és így írja fel az egyenletet:

$$x + 3x + 7x = 55$$

Minél többféleképpen fejezzük ki, vagy fejeztetjük ki egy feladatban az összefüggéseket, annál inkább fejlődik a tanulók függvényszerű gondolkodása, ami a matematikában a dialektikus gondolkodásra nevelést jelenti.

A területek összefüggését megadhatjuk arányszámokkal is. A három terület aránya 2 : 6 : 14. Az arányszámok egyszerűsítése után az egyenlet:

$$x + 3x + 7x = 55$$

Az eredetileg adott arányszámokkal is felírhatjuk az egyenletet:

$$2x + 6x + 14x = 55$$

Az arányszámokból következik, hogy a gyök az első parcella területének a felét adja meg. Ez a példa mindjárt rávilágít arra, hogy az x nem mindig a kérdezett mennyiséget jelöli, hanem jelölheti annak törtrészét, vagy többszörösét is.

Az ellenőrzést mindig a szövegbe való helyettesítéssel végezzük, gyakorlás időszakában pedig valamelyik variáns kiszámításával.

A gondolkodtatás azoknál a feladatoknál is, melyekben két szám összegéből és különbségéből kell a számokat meghatározni, nagyjából hasonlóképpen történik. Nézzük a következő feladatot: A tsz két óljában összesen 279 darab csirke van. Az egyikben 17 darabbal több, mint a másikban. Hány csirke van egy-egy ólban? Maga a feljegyzés mindjárt kétféleképpen történhetik, megmozgatva a tanulók képzelőerejét:

I. + II.; 279	I. + II.; 279
II. + 17	I. + 17

Hány csirke van egy-egy ólban?

A lényeget akkor érttettük meg, ha a tanuló számára világossá vált, hogy valamimódon a két ólban levő csirkék számát egyenlővé kell tenni. A kombinálókészség fejlődik azáltal, hogy többféle módot is találnak az egyenlítésre. Átmenetileg elvesznek 17-et onnan, ahol több volt s csökkentik ezáltal az összlétszámot is 17-tel. 279 — 17 = = 262 csirke maradt. A kisebben 262 : 2 = 131, a nagyobban 131 + 17 = 148 csirke volt eredetileg.

A másik kiegyenlítési mód, hogy a kevesebbhez átmenetileg hozzáadnak 17-et s így átmenetileg nő az összlétszám is 17-tel.

Az ellenőrzést végeztessük el minden esetben.

A VIII. osztályban ismeretlennel gondolkoznak a tanulók. Egyik ólban x, másikban (x + 17) csirke van, összesen 279. Az egyenlet:

$$x + (x + 17) = 279$$

(A zárójelet csak a gondolkodás támogatására írjuk ki.)

Elemezzük ki a szemléletes megoldási móddal való azonosságot.

Másképpen is gondolkodtathatunk: egyik ólban van x, a másikban x — 17 csirke. Most a nagyobb számot jelöltük x-szel.

$$x + (x - 17) = 279$$

Ismét mutassunk rá másfajta szemléleti megoldással való azonosságra.

A még lehetséges többféle felállítási mód közül még eggyel foglalkozunk. Ezt azonban elő kell készíteni. Ha a két ólban összesen 279 csirke van, egyikben x, másikban 279 — x a csirkék száma. Ha az x-szel a kisebb létszámot jelöltük, 17-et hozzáadva egyenlő lesz a létszám.

$$x + 17 = (279 - x)$$

Ebben az esetben úgy is egyenlíthetünk, ha a 279 — x-ből vonunk le 17-et.

$$x = (279 - x) - 17$$

Ha x-szel a nagyobb létszámot jelöltük, le kell vonnunk 17-et, hogy egyenlítsünk.

$$x - 17 = (279 - x)$$

Úgyis egyenlíthetünk, hogy a $279 - x$-hez hozzáadunk 17-et. Típushibája a tanulóknak, hogy rosszul egyenlítenek. Mivel az egyik oldal kisebb, még levonják abból a különbséget, vagy a nagyobb oldalhoz adják hozzá. A világos elemzéssel, az egyenlítés állandó szem előtt tartásával kerülhetjük el ezt a hibát.

Ezzel az újonnan bevezetett jelölési móddal még egy felfogásban állíthatjuk fel az egyenletet. Felírjuk a két ólban levő csirkék különbségét:

$$x - (279 - x) = 17 \text{ vagy}$$
$$(279 - x) - x = 17$$

Két szám összegének ismeretéből a két szám meghatározására különböző egyenlettípusoknál szükség van. Azért kell erre már a most tárgyaltaknál súlypontilag kitérni és többféle módon alkalmazni. Ugyanis előfordul, hogy nehezen határozzák meg a tanulók két szám összegének az ismeretéből a két számot. Ez a nehézség abból adódik, hogy a különbségben nem egy számot látnak. Az algebrai alapfogalmak tanításakor ezt jól be kell gyakorolni. (Két szám összege 18, ha az egyik x, a másik $18 - x$; két szám összege a, ha az egyik x, a másik $a - x$.)

Az ellenőrzés történhet szövegbe helyettesítéssel, de bármely variáns kiszámításával is.

Ennek az egyenlettípusnak továbbfejlesztése a feltevéssel megoldható feladatok. Erre egy példa: egy kalauz egy menet alatt 235 vonal- és szakaszjegyet adott el összesen. A bevétele 136,50 Ft. Hány vonal- és hány szakaszjegyet adott el?

A megoldási terv előkészítésekor kiderül, hogy ez az egyenlet annyiban jelent nehézséget az előbbiekhez képest, hogy itt az egyenletet nem a darabszámokra, hanem a jegyek árára írjuk fel. Az adatok feljegyzése a következő:

vonal + szakasz; 235 db, értéke 136,50 Ft
70 f   50 f

Hányat adott el az egyes fajtákból?

Ha a szakaszjegyek számát jelöljük x-szel, az előbb tanultak alapján a vonaljegyek száma $235 - x$ lesz. Mivel az összes jegyek árát ismerjük, ki kell fejeznünk külön-külön a szakaszjegyek és a vonaljegyek árát is, mert ebből tudunk felírni egyenlőséget. x db 50 filléres jegyünk van, tehát ára 0,5x, $235 - x$ db 70 filléres jegyünk van, ára $0{,}7\,(235 - x)$. Tehát az egyenlet:

$$0{,}5x + 0{,}7\,(235 - x) = 136{,}5$$

Jelölhetjük x-szel a vonaljegyek számát is és akkor az egyenlet:

$$0{,}5\,(235 - x) + 0{,}7x = 136{,}5$$

Ezt az egyenlettípust is megoldottuk az alsóbb osztályokban szemléletes módon. Ez a mód sokkal nehézkesebb az egyenlettel való megoldásnál. Itt rámutathatunk az egyenlettel való megoldás célszerűségére. A szemléleti megoldást esetleg használhatjuk ellenőrzésül.

A gondolkodási készség fejlesztésére kitűnő alkalmat szolgáltatnak az ismétlő-rendszerező órák. Ezeken a feladatokat a tanulók tetszés szerinti felállítás alapján oldják meg. Önállóságuk megnyilatkozására bő alkalom nyílik. Felállítási variánsokkal dolgoznak a tanulók a házi feladatoknál is és a szimultán számonkérésnél.

Az itt tárgyalt egyenleteket típusokba osztottuk, ez azonban nem jelenti azt, hogy a felállításokban és a megoldásokban bizonyos sablont tanítunk meg a tanulóknak, hanem a gyengébbek miatt történik, akiket analógiás következtetéssel segítünk át a felállítás nehézségein. Különben is a többféle felállítás és számítási mód már eleve kizárja a „kaptafa" módszert.

Munkánk azonban nem volna teljes, ha csak szöveges egyenletek felállítására és megoldására korlátozódnék. Meg kell tanítani a tanulókat arra — amit különben a reformtervezet is előír —, hogy megadott egyenletekhez szöveget tudjanak konstruálni.

A leírtakban rámutattam arra, hogyan jutnak el a tanulók az absztrakt gondolkodáson keresztül a gyakorlatig. Hogyan alkalmazzák az algebrában tanultakat a gyakorlatban, amikoris szöveges feladatokat egyenletekké alakítva oldanak meg.

Poberay Györgyi

Felhasznált irodalom:

Bragyisz: A középiskolai matematikatanítás-módszertana (1951).
Mosonyi Kálmán: Módszertani jegyzet (1960).

A fizikai mértékegységek tanításában mutatkozó nehézségek felszámolásának módszere

A fizika órák feladatai igen sokrétűek. E feladatok között egyre döntőbb szerepet kapnak a fizikai feladatok, ezen belül is a *számítással megoldható feladatok*. Az ilyen jellegű feladatok megoldásához a kérdéssel kapcsolatos összes ismeretek kezelhető tudása szükséges. Látnia, tudnia, alkalmaznia kell a tanulónak a fizikai jelenségek lényegét, a közöttük levő összefüggéseket. A számításos fizikai feladatok a tanulókat gondolkodásra, önállóságra, a nehézségek leküzdésére, kitartó, megfeszített munkára nevelik. A feladatok a mindennapi élettel, a termeléssel, a technikai kérdésekkel hozza szoros kapcsolatba a tanulót. Szükséges tehát, hogy a fizikai feladatok jelentőségüknél fogva megkapják azt a helyet, mely a tanítási órában és az órán kívüli foglalkozásban megilleti.

Az 1950-es évek előtti alsófokú fizikaoktatásban még a kezdeményező szakírók sem tesznek említést a számításos fizikai feladatokról. Az 1950-es tanterv már szorgalmazza az egyszerűbb feladatok megoldását, az 1958-as tanterv viszont már követelményeket támaszt a tanulók feladatmegoldókészsége elé. „Legyenek jártasak a tanult fizikai mennyiségekkel való számolásban, képletek használatában, egyszerű mechanikai, hőtani, . . . egyszerűbb elektromosságtani feladatok megoldásában."

Hibája azonban oktatásügyünknek, hogy egyetlen komolyabb munka ezideig nem jelent meg, mely a fizikai feladatok megoldásának módszertani kérdéseit fontosságának megfelelő szinten tárgyalta volna. Csupán néhány kisebb terjedelmű tanulmány fog-