3. *N. N. Baranszkij:* A gazdasági földrajz tanításának módszertana. Szocialista Nevelés Könyvtára. 114. szám. Tankönyvkiadó Vállalat. Budapest, 1955.
4. Nemzetközi statisztikai zsebkönyv. Központi Statisztikai Hivatal. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1962.
5. *Nagy Sándor:* Pedagógia III. Az oktatás elmélete. Tankönyvkiadó, Bp. 1961.
6. *Nagy Sándor:* A didaktika alapjai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

KOVÁCS ZOLTÁN
általános iskolai nevelő, Mezőtúr

Az általános iskolai közelítő számításokról

Az új tanterv előírja a közelítő számítások tanítását az általános iskola 5—8. osztályában.

Az alábbiakban néhány feladat elemzésével szeretném bizonyítani, hogy a közelítő számítások bevezetése nem lesz teljesen újdonság; ahhoz hasonló meggondolásokat alkalmaztunk már a szöveges feladatokban, azok szükségességét a számítások néha szinte megkövetelték.

Megállapítható azonban, hogy ezek nem voltak mindig teljes értékűek, gyakran fordultak elő hibák, s hogy az eljárás a tanulók részéről nem mindig volt tudatos. Épp ezek sürgetik, hogy a kérdéssel külön foglalkozzunk a tananyag során.

A közelítő számítások tanítására még nincs kialakult módszerünk, ez majd mindnyájunk tapasztalatából, hozzászólásainkból szűrődik le.

Cikkem megírásához összegyűjtöttem közel száz darab 1962/63. tanévben írt füzetet, amelyek fővárosi, városi, falusi, tanyai iskolák 5—8. osztályos tanulóitól valók. A vizsgálódások ezek és saját gyakorlatom alapján történnek.

Megjegyzések:

1. A szövegben előforduló V/525, VI/147, VII/175, VIII/407 jelölések az 1963/64. tanévben (és az V. osztály kivételével jelenleg is) érvényben levő Számtan és mértan tankönyvek megfelelő adatait jelentik. (Pl.: VI/147. = a VI. osztályos tankönyv 147. feladata.)
2. Az eredmények után néha odaírt „(A SZ.E.-ben is)" azt jelenti, hogy a Számoljunk együtt! c. könyvekben is ugyanolyan eredmény található.
3. Az új 5. osztályos tankönyv idevágó fejezeteinek elemzése nem tárgya a cikknek.

Az *ötödik osztályról* a legkevesebbet lehet mondani az átnézett füzetek alapján. Ebben az osztályban az egyik főfeladat az alapműveletek írásban való elvégzése, amelyet készséggé kell alakítani. A szöveges feladatok is e célnak vannak alárendelve, s hogy bennük valamelyik szám pontos, vagy nem pontos, ezzel keveset törődtünk.

(Ismételten megjegyzem, hogy az alábbiak a régi, a múlt évben még használt V. osztályos tankönyvből valók, a teljesség kedvéért tartoznak ide.)

Néhány apró észrevétel:

V/525. „Egy 1,2 q súlyú motorkerékpárról leszerelnek egy 7,2 kg súlyú kereket..." Tegyük hozzá, hogy a motor pontosan 1,2 q súlyú, mert ha az 1,2 q kerekített vagy megbecsült érték, akkor a kivonásnak nincs értelme. Hasonló az 527., 534. feladat. Ezek a közelítő számítások szemszögéből nem szerencsések.

V/751. „A Nap kereken 149 000 000 km-nyire, a Hold pedig 384 365 km távolságra van a Földtől. Mennyivel van távolabb...?" Ez a feladat a 8. osztályban a csillagászati ismeretek birtokában jól elemezhető. *Kivonásos feladatnak azonban nem alkalmas.* Miért? (Helyes, ha a 8. osztály év végi ismétlésekor a feladatokat már a közelítő számítások szerint is vizsgáljuk. Ők legalább ekkor ismerjék azt meg nagy vonásaiban.)

V/358. „Az NDK-ban egy hónapban 17 900 000 t szenet termelnek, mennyit termelnek 17 nap alatt?" A tanuló: 10 143 322 tonnát. Az első szám, az egy hónapi mennyiség százezresekre kerekített, így a 30-cal való osztáskor *értéktelen,* azaz ismeretlen számok helyett álló *nullákat „vett le"*. Az eredmény is helytelenül pontos, kerekíteni kellett volna. A legtöbb adatnál a könyv utasítást is ad, ha ott kerekíteni kell.

Természetes azonban, hogy ebben az osztályban azok a feladatok szerepeltek zömmel, amelyekben pontosan, kerekítés nélkül kellett számolni: 82., 167., 237., 930. stb.

A számok leírása, olvasása, azok elképzeltetése, összehasonlítása minden osztályban fontos.

Lássunk erre egy gyakorlási módot:

152	cm magas vagyok
1 600	Ft-ot keres apukám
5 200	Ft egy Kékes televízió
85 000	Ft egy családi ház
93 000	km² Magyarország területe
384 000	km-re van a Hold
1 833 725	Ft volt a bolt leltára
2 000 000	ember él Budapesten
4 200 000	Ft-ba került egy építkezés
10 000 000	Magyarország népessége
149 000 000	km-re van a Nap
220 000 000	a Szovjetunió lakossága
3 000 000 000	ember él a Földön

A számok nagyság szerint következnek. Mindegyiket a tanulók mondották. Ha valamelyik helyiértékre nem tudnának számot, akkor kérdezek. Mennyibe kerül egy családi ház? (— Tímár bácsiék most vettek 85 ezer Ft-ért.) Vagy egyszerűen megmondom: ez az építkezés 4,2 millió Ft-ba került. A beszélgetést úgy irányítom, hogy a leírtak között szerepeljen pontos és kerekített, mért és becsült szám is.

Később a számokat nem nagyság szerint íratom. A megnevezéseket (pl.: „Ft egy családi ház") otthon írják a tanulók a megfelelő szám után. Máskor a tizedes törtekkel végzünk hasonló gyakorlást. Fűszerezhetjük a beszélgetést ilyenekkel: Mennyi idő alatt érnénk autóval a Holdba, ha út vezetne odáig? stb.

Milyen sokféleképpen lehet a fenti oszlop számait vizsgálni: Melyik a pontos, melyik a kerekített érték? A pontosakat kerekítsük pl. 2 jegyre! A kerekítetteket lehetne-e pontosabban meghatározni? Melyiket lehet, melyiket nem? Miért? Legfeljebb mennyit tévedhetünk egy kerekített számnál? Jelentős-e ez az egészhez viszonyítva? Észrevétetjük, hogy egy szám első két-három jegye a legfontosabb. Ezek közül is a legelső és annak helyiértéke. (A szám nagyságrendje.)

A Hold távolsága 384 000 km. Használjuk az ilyen adatoknál ezt a kifejezést: ez egy *három jegy pontossággal megadott szám.* (A lázam 38,0 C° volt. Ez is három jegy pontosságú!) A Nap távolsága 149 000 000 km. Mutassunk rá, hogy az itt levő nullák ki nem mondott vagy meghatározatlan számjegyek helyett állnak, és csupán helypótlásul szolgálnak, tehát *értéktelenek.* A televízió 5 200 Ft-ba kerül. Ezek a nullák *értékesek,* mert azt mutatják, hogy olyan helyiértékű számjegyünk valóban nincs.

Itt jegyzem meg, hogy az elhagyott, vagy meghatározatlan számjegyek helyett álló (értéktelen) nullák *jelölése eltérő* a szakirodalomban. Egy épület felújítása 240 000 Ft-ba került (kerekített szám), Magyarország lakossága 10 135 000 fő, hazánk területe 93 000 km² (itt a százasok helyén álló nulla értékes, csak a többi származik kerekítésből), egy szoba hossza 4,80 m (kerekített szám).

Az értéktelen nullákat a következőképpen jelölhetjük meg:

1.	jelölésmód:	24. ...	10 135 ...	93 ...	4,8 .
2.	„	84? ???	10 135 ???	93 000	4,8?
3.	„	240 000	10 135 000	93 000	4,80
4.	„	240 ezer	10 135 ezer	93,0 ezer	4,8
5.	„	24o ooo	10 135 ooo	93 Ooo	4,8o

(A pontok helyén áthúzott nullák állhatnak.)

Az 5. jelölési módot javasolom. Az értéktelen nullák kb. háromnegyed magasságúak: 24o ooo Ft, 93 Ooo km² stb.

Azért célszerű ez, mert a mindennapi írásmódtól a legkevésbé tér el, a beavatatlan sem értheti félre. Sőt ilyenformán az egyéb nem megbízható számjegyeket is lehetne jelölni. Pl.: a tantermünk 9,34 m hosszú. Szoktuk egyszerűen kilenc és fél méternek is mondani. Ezt így írhatnánk: 9,$_5$. (Az ötös számjegy kisebb!) A közelítő számításokban a tartalék számjegyeket írják kisebbre. Pl.: a piramis alapterülete 50 1$_{50}$ m^2. (A tízesek helyén álló számjegy csak valószínűen annyi, nem megbízható. Lásd később egy számításban!)

Az 1. jelölésmód ellen szól, hogy törtes kifejezésben egyszerűsítésnek tűnhet, vagy csak helyesbítésnek veszik. A 3. jelölésmód szerint kis vonalkával kell aláhúzni az utolsó értékes jegyet. Hátránya, hogy a vonalka elveszik, ha a számot mint végeredményt pl. kettős vonallal aláhúzzuk, vagy ha törtvonalat írunk alá stb.

Viszont csak az 1. és 3. mód szerint tudjuk a már hagyományosan (csupa egyforma számjeggyel) leírt közelítő szám értéktelen nulláit, illetve utolsó értékes jegyét megjelölni. Pl.: Magyarország területe 93 0oo km^2, a piramis térfogata 2 353 908,14 m^3. Utólagosan így jelölhetjük: 93 0oo km^2 vagy 93 000 km^2, illetve 2 353 908,14 m^3.

A közelítő számokkal végzett műveletekben (pl. szorzásban) pedig a 2. jelölésmód a legszemléletesebb. Pl.: Milyen súlyú egy 2 835 cm^3-es alumínium hasáb?

2835 · 2,7	2835 · 2,7?
5670	5670
19845	19845
7654,5	????
	75??,??

Várhatóan 7600 g = 7,6 kg.

A 4. jelölési mód általánosan használt. A legtöbbször igen célszerű. Hátránya, hogy nem lehet minden esetben használni: 240 ezer, helyesebben 24. ezer vagy 24o ezer (ez már két módszer keverése lenne); 10 135 ezer hazánk lakossága (statisztikai táblázatokban előfordul, jó, ha értik a tanulók, de lehetőleg kerüljük, mert félreérthető); 4,8 m: itt meg nem használható, szóval kell a kerekítés tényét közölni.

A kisszámjegyes írásmód bevezetésekor egyedül a kirakatban szereplő 15 $_{800}$ Ft, 10,$_{60}$ Ft, 44 ooo Ft árjelölésekről kell annyit mondani, hogy itt a könnyebb kiolvasás miatt írnak kisebb számjegyeket, és azok természetesen mind értékesek.

Összegezve: Az értéktelen nullák (és esetleg a megbízhatatlan számjegyek, tartalékjegyek) jelölésére a kisméretű számjegyek a legmegfelelőbbek. Alkalomszerűen azonban, ha az ott célszerűbb, bármelyik jelölésmódot használhatjuk. Mindegyik olyan szemléletes, hogy nem lehet belőle zavar.

A *hatodik osztályban* sok figyelemre méltó hiba fordul elő a mértani feladatok között. „Egy trapéz alapjai 72,045 m és 60,03, a magassága 35,002 m." (Íme egy irreális feladat. Nem tankönyvből vették.) Földterület ez? Bádogból kell kinyírni? A füzetből semmi sem derült ki. Mivel mérték a 35 métert; méterrúddal, mérőszalaggal? Hát hozzá azt a 2 millimétert; mikrométerrel? Egyébként mi a célja az ilyen feladatoknak? Számolási nehézséget akar támasztani a közbenső nullákkal? Ezt gyakoroltathatjuk szöveg nélküli számfeladatokkal, vagy pedig keressünk hozzá hihető szöveges példát. Az ilyen feladat elnyomja azt a törekvést, hogy a tanuló *a kapott adatokat kritikus szemmel fogadja,* a számolásait pedig gazdaságosan, a felesleges jegyek mellőzésével végezze. (A trapéz területe 2311,444575 m^2. Tízjegyű szám, mm^2 pontossággal!!)

Egy szöveg nélküli feladat: „Egy kör sugara 2,6 cm, mennyi a kerülete és a területe?" (K=16,328 cm, T=21,2264 cm^2). Itt a 2,6 cm-t pontosnak kell tekinteni, és azt, hogy a tanuló az öt-, ill. hatjegyű eredményt kerekítetlenül leírta, nem lehet hibáztatni.

Magunknak azonban megjegyezhetjük, hogy a *π=3,14 is közelítő érték.* Pontosabban: 3,141592... Igaz, hogy a 3,14-es érték hibája kicsi, mert a harmadik tizedesjegy egyes lenne. (A relatív hibája 0,05%.) A 3,14-et mégis csak három jegy pontosságú számnak kell tekinteni, és az olyan feladatokban, ahol a 3,14 szerepel (kör, henger, kúp, gömb), ez eredményben is legfeljebb három, (vagy a 3,14 kis hibája miatt) négy jegyet vehetünk megbízhatónak. Akkor is, ha a többi adatok nagyon pontosak.

A VI/230. feladat szerint a négy megadott méretű pillérhez 35 664 db tégla kell. (A Sz. E.-ben is.) Az ilyen természetű feladatoknál említsük meg, hogy egy-két tégla a rakodáskor eltörik, vagy még a beépítése előtt szétmálik, a kőműves is megfarag néhányat. Ha minden száz tégla közül 1 db veszendőbe megy, akkor ez jelen esetben kb. 350 db-ot jelent. Ha csak minden ezer közül 1 db, akkor is 30—40 db-ot. Az építkezéshez tehát 35 700, sőt 35 800 db téglát hozassunk. Egy valóban megmért oszlophoz tanulóim 480 db téglát számoltak. Ezt 500-ra kerekítették. Hol nagyobb a ráhagyás? Viszonylag hol nagyobb? A 7. osztályban százalékosan is kifejezhetik. Említsük meg a boltoknál, pincegazdaságoknál szereplő *csurgást* (kálót) is.

VI/229. „Mekkora a súlya egy fenyőfagerendának, ha négyzetesoszlop alakja van, alapéle 2,7 dm, a gerenda hossza 4,1 m; ha 1 dm^3 fenyőfa 0,6 kg? V=298,89 dm^3. Szinte kiált, hogy már itt kerekítsük 300 dm^3-re. Bő 1 dm^3-t tévednénk, 60—70 dkg-ot. Mit jelent ez majd 2 q-nyi súlynál? A tanuló azonban tovább számol, és így a súly 179,334 kg-nak adódik. (A Sz. E.-ben is.) Nem kerekített. Vajon *miért számoltuk ki* a gerenda súlyát? Kíváncsiságból, vagy hogy elbír-e belőle 15 db-ot egy teherautó? Gramm pontossággal felesleges tudni a súlyát.

Ha meg meggondoljuk, hogy a fenyőfa fajsúlya a megadott 0,6 $\frac{kg}{dm^3}$-nél több is, kevesebb is lehet (pl. nedvesebb vagy szárazabb a fa), akkor csak annyit állíthatunk, hogy a gerenda súlya 180 kg körül van. Ennek bizonyításául tekintsük a 298,89 dm^3-t pontosnak, de számításainkban először 0,55 $\frac{kg}{dm^3}$-t, másodszor 0,65 $\frac{kg}{dm^3}$-t vegyünk fajsúlynak. A végeredményeknél 30 kg-os eltérést kapunk! Megjegyzés: Legyen szabad még most a „kg" mellett a „súly" szót használnom.

VI/147. „A Kheopsz-piramis... alapéle 228 m, magassága 145 m..." A térfogata 2 512 560 m^3. (A Sz. E.-ben is.) Az egyik tanulómtól, aki egy kis számolási hiba miatt „még pontosabban" számolta ki, megkérdeztem az eredményt. Zavartan nézte a nagy számot. Otthon ki sem próbálta mondani. Kettős vonallal aláhúzta az ő kilencjegyű eredményét, de *a nagy szám semmit sem mondott számára.*

Az ilyen feladatoknál, mivel csak tájékoztatás céljából számoltuk ki, írasuk a pontosabb eredmény alá, hogy hozzávetőlegesen mennyi az, szinte csak a szám nagyságrendjére utalva. K. Marika füzetébe is belekerült: „hozzávetőlegesen 2 és fél millió m^3." Erre még egy év múlva is emlékezett.

VI/264. Még egy piramis!* „A Memphisnél álló piramis alapéle 223,88 m, magassága 140,89 m." Elgondolkoztató: Milyen kopott lehet az a több ezer éves építmény. Talán 60—80 cm hiányzik a magasságából, az élek lecsorbultak, az oldala sem tökéletes síklap. A homok valamennyit befedett az alapjából, ha azt lekaparnánk, az alapélet többnek mérnénk. A belsejében sírkamra van. Ha tárgyilagosak akarunk lenni, a fenti adatokban a cm-nek semmi, de a dm-eknek sem sok értelme van. A leghelyesebb, ha egész méterekre kerekítünk.

Milyen tanulságos egymás mellett látni egy „pontos" és egy közelítő számítást:

223,88 · 223,88	224 · 224
44776	448
44776	448
67164	896
179104	50176
179104	
50122,2544	
50122,2544 · 140,89	$501{\scriptstyle 80} \cdot 141$
20048901760	200720
4009780352	50180
4511002896	7075380
7061724,422416	
7061724,422416 : 3 =	$707{\scriptstyle 5\,000}$: 3 = 235800
= 2353 908,140805	
A piramis térfogata	A piramis térfogata
2 353 908,14 m^3 (A Sz. E.-ben is)	2 360 000 m^3

Mennyivel gyorsabb és könnyebb az utóbbi módon számolni! Az eredménye ugyanolyan jó, sőt jobb, mert azt is mutatja, hogy csak az első három jegyben bízhatunk, a többiek kiszámítása értelmetlen. Az előbbi *számóriás pedig megtévesztő,* azt hihetnénk róla, hogy valóban olyan pontosan határozható meg a piramis térfogata.

* Perelman is egy piramis elemzésével kezdi rövid, de frappáns ismertetését a közelítő számításokról a Szórakoztató számtan c. könyvében.

VI/124. „Árkot ásnak. Az árok keresztmetszete trapéz. Az árok fölül 1,35 m, alul 0,65 m, mélysége 90 cm. Mennyi földet kell kiásni egy 129 m hosszú árok elkészítésekor?" Ennél a feladatnál mondjuk meg, hogy miért mérték ilyen pontosan a keresztmetszetet. Ugyanígy: Egy hosszú cső keresztmetszetét igen pontosan számítsuk ki (a külső és belső átmérőt nagyon gondosan mérjük), mert *a hiba a nagy hosszon sokat kitehet.* Hosszúkás földterületek szélességénél mérjünk fél, harmad, negyed öleket is, mert az a nagy hosszúság miatt sok négyszögeket jelent (pl. egy sor kukoricát!). Pl.: 185 öl hosszú a dűlő, milyen széles lesz benne az 1 kat. hold háztáji?

„Egy henger alakú vashordó átmérője 85 cm, magassága 1,2 m. Hány liter a térfogata?" Jó gyakorlati feladat: csak az átmérőt tudjuk a hordó szájánál mérni, mértékváltást is kell végezni, végül literekben kérjük az eredményt.

Nézzük, hogyan számoltak a gyerekek: A sugár 4,25 dm; szorozva önmagával: már négy tizedesjegy; szorozva 3,14-gyel: hat tizedesjegy. Így az alapterület 56,716250 dm^2. Lehet-e a két jegy pontossággal megadott átmérő esetén az alapterületet nyolc jegyre meghatározni? (56 dm^2 71 cm^2 62 és fél négyzetmilliméter!!).

Egyébként gondoljunk a henger alakú vashordóra. Ott áll az majd minden iskola udvarában, tűzoltóvíz van benne. A feneke, oldala kissé horpadozott, a szája sem szabályos kör. Van-e értelme, hogy az alapterületét fél négyzetmilliméter pontossággal meghatározták? A tanulóknak itt meg kellett volna állni a számolással, és belegondolva, hogy milyen *részeredményt kaptak, azt ésszerűen* 56,72 dm^2-re *kellett volna kerekíteni.* Ők azonban hajlamosak mechanikusan és egyszuszra megoldani a feladatot.

Ha az átmérő mérésekor a két végénél negyed-negyed cm-t tevédtünk (ez könnyen megeshet, ha a hordó szája nem pontosan kör alakú már, vagy kihajlított pereme van stb.), akkor ez a hiba egy negyed cm széles sávot jelent körül. A kerület kb. 250 cm, így kb. 60 cm^2-rel több is, kevesebb is lehet az alapterület a számított értéknél. Beláthatjuk tehát, hogy elég a hordó alapterületét 56,7 dm^2-esnek venni.

A cm^2-eket ezek szerint már nem írjuk ki. Nézzük, mekkorát tévedünk így. 1 cm^2 terület fölött (jelen esetben) 120 cm magas vízoszlop áll, ez 120 cm^3, bő 1 dl. Az 56,7 dm^2 után elhagyott terület nincs 2 cm^2, ezért kb. 2 dl-t fogunk tévedni. Nem is tévedés ez. Mivel *a mért adatok pontatlanok,* a hordó térfogatát is csak közelítően tudjuk meghatározni. Hordónál liter vagy fél liter pontosság elegendő.

Még néhány kisebb észrevétel:

VI/743. „Egy répaföld hosszúsága $97^1/_2$ m, szélessége $56^2/_5$ m; egy burgonyaföld hosszúsága $78^3/_4$ m, szélessége $70^1/_2$ m. A két terület közül melyik a nagyobb és mennyivel?"

Itt a földterületek oldalai jóindulattal három jegy pontossággal megadott számok, tehát a végeredményben is csak az első három jegyet hagyhatjuk meg, s a kivonást ezután kell elvégezni.

Ha egy hengeres hordó, vagy téglatest alakú bádogedény térfogatát már kiszámítottuk, és belekukkantva azt mondom, hogy $^1/_3$ részig van benne olaj; akkor *itt az $^1/_3$-ot igen durva közelítő értéknek tekintsük* (hangsúlyozom, ha azt csak becsültük), és a térfogat harmadrészét ne számítsuk két jegynél pontosabban.

A *hetedik osztályban,* a százalékszámítás során is akadnak túlpontos számítások.

VII/175. „Hazánk jelenlegi területén a népesség száma 1870-ben 5 011 310 fő volt. 1958-ra a népesség 97%-kal emelkedett..." Az ilyen jellegű feladatoknál *a százalékláb közelítő érték,* itt két jegy pontosságú, ezért az eredménynek is csak az első két jegyében bízhatunk.

VII/575. „A méz cukortartalma 70—80%. Egy méhésznek 8,25 q 78% cukortartalmú méze van. Hány mázsa ebben a cukor?" Helyesebb, ha egyelőre eltekintünk a pontos 78%-tól, és a 70, ill. 80%-kal számolva két érték közé szorítjuk az eredményt: A méz 5,7—6,6 q cukrot tartalmaz. Hasonló a 447. feladat is.

A gyakorlati életben igen *sokszor két határral mondunk meg valamilyen mennyiséget.* Pl.: a motorkerékpár sebessége 50—60 km/ó, erről a búzatábláról holdanként 10—12 mázsát várunk, a nézőtéren 250—300 ember ül stb. Alkalmazzuk feladatainkban az ilyen adatokat a maguk határozatlanságában, mindjárt közelítő eredményeket kapunk. Pl.: az előadás bevétele 2000—2400 Ft lesz.

„Tervünkben 3500 facsemete ültetését vállaltuk, de 4250-et ültettünk el." A tanuló: ez 121,42%. Mivel mindkét kiindulási adat pontos, a százaléklábat nem mondhatjuk helytelennek. Valószínű azonban, hogy az *csak tájékoztatásul szolgál,* ezért 121%-nak, sőt 120%-nak mondhattuk volna. Ha egy összehasonlítás késhegyre menő (pl. fémek tisztasága), akkor természetesen pontosabb százaléklábat számítunk.

Az előbbihez hasonló: „70 000 kh-ból elvetettek 9 000 holdat..." (Itt a két adatot ráadásul nagyon durván adták meg.) A tanuló szerint: ez 12,857%-a az egész területnek.

A következő feladathoz nem kell kommentár: „Az új típusú tűzhelyek átlagos élettartama a korábbi 7 év helyett 15 év lett..." — „Tehát 214,28%-ra emelkedett a tűzhelyek élettartama."

A *nyolcadikos feladatok* között is sok megemlíteni való akad:

VIII/158. „Egy léggömb átmérője 12,6 m. Hány kg levegőt szorít ki a helyéből? (1 m^3 levegő 1,293 kg.)"

A levegő súlya 1353,59442792 kg ≈ 1353,6 kg. A kerekítetlen eredmény számjegyeinek több mint fele felesleges. *Nem lehetett volna menetközben elhagyogatni belőle?* Kövessük a számolás menetét: R=6,3 m; 4 R^3=1000,188 m^3. A tanulók nem merték a tizedesvessző utáni részt elhagyni (0,2‰-es hiba lenne, míg az átmérő 4‰-es hibát is rejteget), tovább hurcolták az egész számot. (Többen eltévesztették.) Óvatosságuk részben érthető, mert ez csak közbenső eredmény, nem tudhatjuk, hogy ezt kerekítve mekkora eltérésük lesz a végeredményben.

Nézzük csak: A 4 R^3-öt még 3,14-gyel szorozni és 3-mal osztani kell. Ha a végeredményt csak hozzávetőlegesen akarjuk meghatározni, akkor a π-t durván 3-nak vehetjük, és 3-mal egyszerűsíthetünk: $Vg \approx \frac{4R^3\pi}{3} = 4\,R^3$, vagyis a számláló π-jét, a nevező 3-t áthúzva egyszerűsítünk. A hiba kisebb 5%-nál. Ha ezt a pontosabb számítások miatt nem is tehetjük meg, az azonban belátható, hogy *a 4 R^3 nagyságrendjében nem lesz változás* a π-vel való szorzás és a 3-mal való osztás után. Példánkban 4 R^3=1000,188 m^3, nem sokkal lesz több a végeredmény sem. Így nyugodtan elhagyhatók a tizedesvessző utáni jegyek. A hiba kb. 0,2 m^3 lesz. Ez az 1000 m^3 mellett elenyésző.

$$Vg = \frac{4\,R^3\,\pi}{3} = \frac{1000 \cdot 3{,}14}{3} = \frac{3140}{3} = 1047\ m^3.$$

Lám, milyen hasznos lett volna a 4 R^3 *részeredménynél* megállni, és már azt megfontolással kerekíteni!

VIII/153. „Földünk nagy gömbnek tekinthető, amelynek sugara kereken 6 400 km. Felületének 71%-át víz borítja, a többi szárazföld. Mekkora a vízfelület és mekkora a szárazföld területe?"

A vízfelület 365 264 896 km^2, a szárazföld 149 192 704 km^2. (A Sz. E.-ben is.)

— Se több, se kevesebb egy km^2-nyivel sem! — állíthatnánk az eredményre tekintve. A 7. osztályos földrajzban a Föld sugarát jobb közelítéssel 6 370 km-nek tanulták, tehát 6 400 két jegy pontosságú szám. A közelítő számítások szabálya szerint a Föld felszínéül kapott 514 457 600 km^2-ben is csak az első két jegyet szabad megtartani: 510 000 000 km^2. Ennek 71%-a vízfelület. A százalékláb itt is csak közelítő szám. A tanulók tehát *egy helytelenül pontos szám pontosan 71%-át* számolták ki. Helyesen így lenne: 510 millió km^2 71%-a, 360 millió km^2, a vízfelület; a szárazföld pedig 150 millió km^2.

A VIII/164. feladatban a Föld térfogatául kapott 1 097 509 550 000 km^3-nek is csak az első két jegyét tartjuk meg: 1,1 billió km^3. Ugyanígy a súlya két jegy pontossággal: 6000 trillió tonna.

VII/165. „A Hold sugara körülbelül negyedakkora, mint a Földé." A térfogata így a 64-ed része.

1 097 509 550 000 km^3 : 64 ≈ 17 148 586 719 km^3. (A Sz. E.-ben is.) (Itt ez a meghatározás, hogy kb. negyedakkora, olyannyira pontatlan, hogy a Föld tömegének helyesen a 49-ed részét kellene venni. De erre most ne tekintsünk.)

A 64-gyel való osztáskor (mivel *az osztandónak csak az első két jegye biztos*) a hányadosban is csak két jegyet kellett volna kiszámítani; a többi jegyeket, mivel nem meghatározhatók, nullákkal kell helyettesíteni, vagy *betűvel jelölni a szám nagyságrendjét:*

(1,1 billió=1 100 milliárd)
1 100 milliárd km^3 : 64=17 milliárd km^3.

VIII/411. „Egy gyárban ½ literesnek jelzett félgömb alakú mérőkanál belső átmérője 125 mm. Számítsd ki, hogy a kanál valóban ½ literes-e!"

R^3=244 140,625 mm^3. A VIII/158. feladatnál elmondottak szerint ennek bő négyszerese lenne az egész gömb térfogata. Mivel ez a félgömb alakú kanál, bő kétszerese. Ha mást nem is, de legalább ezt a tizedesvessző után álló kb. fél mm^3-nyit biztosan elhagyta volna a tanuló, ha megállt volna ennél a részeredménynél értelmezni azt. A tanuló azonban tovább kínlódott kilencjegyű számával, *növelve a tévesztés valószínűségét.*

Helyesen: R^3=244 140,625 mm^3 = 244 cm^3.

VIII/407. „Hány kg levegőt szorít ki a helyéből egy 14,8 m átmérőjű léggömb?"

$R=7,4$ m; $R^3=405,224$ m^3. A tanuló kerekítés nélkül számolt tovább. Így a gömb térfogata 1 696,537 813 m^3. Helyesen a 7,4 köbét 405-nek kell venni, mert a sugár nagyságát csak közelítően ismerjük. Különben a VIII/158. feladatnál említettek szerint R^3 értékének kb. 4-szerese lesz a gömb térfogata. Ha a 0,224 m^3-t elhagyjuk, ez kb. 1 m^3-t jelent a végeredményben. Ez elhanyagolható a várható 1 600 m^3 mellett.

A tanulónak megmutattam a füzetét, és boncolgattuk a feladatot:

— A gömb térfogata 1 696,537 813 m^3. Ez 1696 m^3 537 dm^3 813 cm^3. Képzeljük el, Jutka, a léggömböt! Átmérője 14,8 m, akkora mint ez a hatalmas fa. Mennyit „esne össze" a léggömb, ha a szelepjén kiengednénk 3 cm^3 gázt? (Mosolyog.) Az általad kiszámolt eredmény utolsó jegye ennyit jelent. Legyünk bátrabbak! Ha kiengednénk fél m^3-nyi gázt (a tizedesvessző után levő rész kb. annyit jelent), *összezsugorodna annyira a léggömb,* hogy átmérőjét most már 14,8 m helyett 14,7-esnek mondanánk? Belegondolva: nem.

Az átmérő 10 cm-es zsugorodásához annyi térfogatú gázt kellene kiengedni, amennyi a felszín alatt egy 5 cm vastagságú héjban lenne. (Szemléletesen: 5 cm vastagon meghámoznánk a tömörnek képzelt gömböt.) Rövid, hozzávetőleges számítás: A gömb sugara 7 m; $7\cdot 7=49 \approx 50$; $50\cdot 314 \approx 150$; $4\cdot 150=600$. A gömb felszíne 600 m^2 körül van. $600\cdot 0,05=30$. Tehát az átmérő ilyen zsugorodásához kb. 30 m^3 gázt kellene kiengedni! Példánkban tehát nyugodtan vehetjük a léggömb térfogatát 1 700 m^3-nek. 1 m^3 levegő súlyát pedig 1,3 kg-nak.

Észrevételeimet a feladatok tárgyalásakor elmondtam. Néhány mondatot még összefoglalásul:

Feltételeztem, hogy a közelítő számítások alapvető szabályait a kartársak ismerik. Erről írni nem lehetett a feladatom. E néhány oldalon csak azt szerettem volna bemutatni, hogy eddigi gyakorlatunkban milyen hibák fordultak elő, és azokat még az új tanterv minden osztályban való bevezetése előtt hogyan lehet kiküszöbölni.

Cikkemet hozzászólásnak szántam; a gyakorlatibb matematikatanítás és az ezt szolgáló közelítő számítások szeretete vezetett e gondolatok papírra vetéséhez.

A KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSOK IRODALMÁRÓL:

A matematika tanítása c. folyóiratban megjelent cikkek:

Bácskay Zoltán: Közelítő számítások II. kötet 1. szám.

Bakos Tibor: A közelítő számításokról 1960/2. szám.

Késedi Ferenc: Közelítő számítások a középiskolában, 1961/1. szám.

Pálfy Sándor: A közelítő számítások tanítása az általános iskola 5. osztályában 1963/64. szám.

Bakos Tibor: Közelítő számítások a középiskolában 1964/6. szám.

Az *Országos Pedagógiai Könyvtárban* (Bp., V., Honvéd u. 19.) magyarul megkapható cikkek közül az általános iskolában leginkább a következők használhatók:

Sor: Megközelítő mennyiségek elemi fogalmának kialakítása a tanulóknál (Nacsalnaja Skola 1960/10. D 15 061).

Vasziljev: Közelítő mennyiségekkel végzett legegyszerűbb számítások a hétéves iskolai oktatásban (Matematika v skole 1951/5. 8182).

J. I. Perelman: *Szórakoztató számtan.* 126—141. old.

Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára tankönyvben 298—305. old.

Dr. Bacskay Zoltán: *Közelítő számítások* — középiskolai szakköri füzet.

V. M. Bragyis: *Hogyan számoljunk?*

(Kitűnő könyv. A közelítő számításokat az 56—143. oldalig tárgyalja. Ezenkívül a számtani műveletekről, táblázatokról, a logarlécről, számítóábrákról is ír. Mindenhez sok feladatot ad. Beszerezhető, akár utánvéttel is, a Bp., V., Károlyi u. 3. (volt Egyetem u.) alatti antikváriumban féláron, 16 Ft-ért.)

Ja. Sz. Bjezikovics: *Közelítő számítások* — egyetemi tankönyv.

A különféle *matematikai zsebkönyvekben* is találhatunk néhány oldalt a témáról.