órán való viselkedési szabályok megszegőivel szemben, ha rábírja a tanulókat a kísértéseknek, csábításoknak való ellenállásra, a figyelmes, fegyelmezett beállítódásra.

Végül a *bátorság nevelését* kell megemlíteni. Már a 3. osztályos gyermek is nagyrabecsüli a bátorságot társai körében s az emberek magatartásában, csodálja azt, és lelkesedik a bátorság vagy hősiesség példáin. Ideáljuk, példaképük legtöbb esetben a bátor, erős, mindig győzedelmeskedő ember. A bátorság tulajdonságát éleszthetjük, fejleszthetjük a környezetismereti órák keretében a múltból hozott vagy aktuális példák sorozatával, kiemelve és méltatva a bátor és hősies tett szépségét, nemességét. A bátorság fogalmát tudatosítsuk és mélyítsük el, tegyünk különbséget az értékes és nem értékes bátor tettek között, a bátorság és vakmerőség között! Ez szükséges azért is, mert a gyermekeknek az akaratra és az akarati tulajdonságokra vonatkozó fogalmai, képzetei e korban még fejletlenek, az adott fogalomhoz nem adekvát tartalmat társítanak. A cselekedtetés, gyakorlás síkján pedig a bátorság kinyilvánítására és gyakorlására kell módot találnunk. Pl. bíztatni, bátorítani kell a gyerekeket nehéznek tűnő feladat megoldására, a rovaroktól, állatoktól való félelem leküzdésére stb.

Az akaratnevelés általános feladatainak megoldása közben gondoljunk az egyéni sajátosságokhoz való alkalmazkodás követelményeire is, és különös figyelmet fordítsunk azokra a gyermekekre, akiknek szembetűnő fogyatékosságaik vannak az akarati cselekvés tekintetében. Pl. a nagymértékben befolyásolható, önállótlan vagy félénk, gyáva, kitartásra képtelen, esetleg lusta, hanyag gyermekekkel szemben kell hatékony eljárásokat alkalmaznunk az akarat céltudatos fejlesztése érdekében.

ERHADT IMRE
Tanárképző Főiskola, Pécs

A transzformációk tanítása az általános iskola 7. osztályában

Az általános iskolai reformtanterv egyik legjellemzőbb újszerű vonása a geometriai alakzatok és bizonyítások transzformációkkal történő tanítása.

A 6. osztályban a síkidomok egyes tulajdonságait a tengelyes szimmetria alapján tárgyaljuk. A 7. osztályban az eddigi egybevágó háromszögekkel történő igazolás helyett a téglalap, négyzet, rombusz, paralelogramma tulajdonságait a középpontos szimmetria segítségével ismertetjük. Összehasonlítjuk a középpontos és tengelyes szimmetriát és további két transzformációt is alkalmazunk: a párhuzamos eltolást és a derékszögű elforgatást. Az eltolás tanítását felhasználhatjuk a mértani hely fogalmának előkészítésére. A 8. osztályban kerül sor az eddigiekhez hasonlóan a hasonlósági transzformációk tanítására.

A transzformációk tanítása milyen igényt támaszt a gyakorlatban működő pedagógusokkal szemben?

1. A legfontosabb, hogy mielőbb magunkévá tegyük a tantervben előírt szemléletmódot. Az általános iskolai matematika tanárok közül többen az egybevágósággal történő igazolásmódot tartják jobbnak.* (*A transzformáció szemléletesebb.) Beláthatjuk és környezetünkkel beláttathatjuk, hogy az idomok tulajdonságainak mozgással történő ismertetése segíti a világnézeti nevelést. A transzformációkkal történő tárgyalásmódot a középiskolai és felsőbb geometriai tárgyalásmód is indokolja. Azt tanítjuk ebből az anyagrészből, és úgy tanítjuk azt, hogy a tanulók a későbbi ismeretszerzés

során erre építhetnek. Erre példa a gimnázium 1. osztályának geometriai anyaga. Felépítésének vezérfonalát a transzformációk adják. Az alakzatok tulajdonságai szerint kapnak helyet az anyag elrendezésében, hogy melyik transzformációval lehet vizsgálni azokat.

2. A transzformációkkal történő tárgyalásmód szükségessé teszi, hogy önmagunkban felidézzük a geometriai transzformációk lényegét és legfontosabb tulajdonságait. Pl. A geometriában és a középiskolai geometria anyagban is a transzformációkat a geometriai alakzat és a leképezés fogalmának segítségével definiálják. Szükséges tehát felidéznünk, hogy geometriai alakzatoknak a sík vagy a tér véges vagy végtelen ponthalmazát nevezzük, és hogy a leképezés tágabbkörű fogalom, mint a transzformáció: a transzformáció olyan egyértelmű leképezés, melynél két különböző pont képe is két különböző pont.

3. A tanterv és a tankönyvek biztosítják, hogy az ismeretszerzésben a szerkesztés a megfelelő helyet foglalja el. A tükörképek megszerkesztésének elsajátíttatása fontos feladat, de emellett ne felejtsük el, hogy a tanulók gondolkodásának, lényegkiemelő készségének fejlesztése érdekében a szerkesztések közben a felmerülő gondolatsort is tisztázzuk. Pl. A síkbeli tengelyes tükrözésénél:

- a tengely képe maga a tengely.
- a tükörképet a tengelyen ismét tükrözve eljutunk az egyhelybenhagyáshoz (a pontok az eredeti helyükre kerülnek vissza).
- bármely egyenes, ha nem párhuzamos a tükörtengellyel, tükörképét a szimmetria tengelyen metszi. (Ha párhuzamos, akkor a tükörképe is.)
- a tükörkép méretei megegyeznek az idom méreteivel. A tengelyes tükrözés távolság- és szögtartó.
- a tengelyes tükrözés nem tartozik a síkbeli mozgások közé. Bár az eredetivel egybevágó alakzatot ad, de a két alakzatot nem lehet a síkban mozgatással fedésbe hozni. A sokszög tengelyes tükörképe az eredetihez képest ellenkező körüljárású (a sík adott oldaláról tekintve). Az egybevágóság fogalmát is tisztázzuk tanulóinkkal. (Irodalom 1, 2, 3, 8.)

4. A 6. osztályban kezdjük el a transzformációk tanítását. Ebben a korban az absztrakt gondolkodás fejlődésének feltételei megvannak, de a gyermek gondolkodása még konkrét szemlélethez kötött. A gondolkodásban a különböző fejlettségi szintek koegzisztenciája érvényes. Vannak ismeretek, amelyek tekintetében a gyermek már fogalmi szinten áll, vannak ismeretek, amelyeket viszont csak konkrét formában képes elsajátítani. Ezen fejlődéslélektani sajátosság azt a követelményt állítja elénk, hogy a konkrét formákat a szemléltetés, a cselekedtetés segítségével teremtsük meg tanulóinknak. Ez nem jelenti a mindenáron való szemléltetést, de amit lehet, nyújtsunk szemléltetés formájában tanítványainknak.

KÖZÉPPONTOS SZIMMETRIA TANÍTÁSA

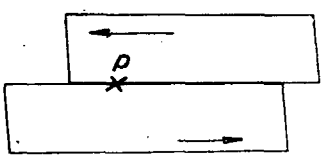
(Irodalom: 1, 2, 3, 4, 5, 8.)

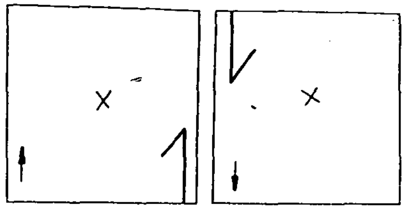
A tankönyv gyakorlati példából kiindulva, — a tanulók tapasztalatára építve — vezeti be a fogalmat, megadja a „középpontosan szimmetrikus pontok" és a „szimmetria középpont" elnevezést szemléltetés kíséretében. A szerkesztés menetét közli. Javasoljuk, hogy eleinte a szerkesztést a tanár végezze el a táblán, s a tanulók mondják az egyes lépéseket.

A könyv szerint a szerkesztést elvégezzük az áttetsző papíron is, és megmutatjuk, hogy 180°-kal elforgatva *A* az *A'*-be és *A'* az *A*-ba került. Az indukciós anyagban felvethetjük a 169. oldal 1. kérdését is. Hogy a középpontos tükrözés fogalmát minél pontosabban megismertessük és a bevésést elősegítsük, vizsgáljuk meg, ill. emeljük ki egyes tulajdonságait külön-külön is.

A példákat elemezve mutassunk rá, hogy a tankönyvi első példában (163. old.) az E pont tükörképe P, a másodikban az *A* pont tükörképe A', tehát pont tükörképe pont. A tükrözési középpont tükörképe önmaga. Az eredeti pont, a tükrözési középpont és a tükörkép egy egyenesbe esnek. A tükrözési középpont az eredeti ponttól és annak tükörképétől egyenlő távol van. Az 1. példában egyenlőnek vettük, a második példában a kör sugara állandó. Hány olyan pont van, amely egybeesik a tükörképével? Vessük fel kérdésként, hogyan szerkeszthető meg *A* pont tükörképe, ha adott az *A* és a tükrözési középpont. A szerkesztésnél térjünk ki a kétféle értelmezésre. (A tükrözésre váró ponttól a tükrözési középpontig húzott egyenes szakaszt a középponton túl ugyanakkora szakasszal meghosszabbítjuk, vagy a tükrözésre váró pont és a középpont meghatározta szakaszt a középpont körül 180°-kal elforgatjuk.) A szakasz középpontosan szimmetrikus képének szerkesztésénél felhasználjuk a pont középpontos tükörképéről tanultakat. Az óra elején feleleveníthetjük az egyenes, a szakascz fogalmát és azt, hogy az egyenest két pontja — s a szakasz két végpontja meghatározza. A szükséges ismeretek birtokában megszerkesztjük a szakasz két végpontjának képét. A tanulók által a szakaszon tetszés szerint felvett pontok képének megszerkesztésével érzékeltetjük, hogy az *AB* szakasz minden pontjának a képét az *A'B'* szakaszon találjuk, tehát a szakasz középpontos tükörképe szakasz, amely az eredetivel egyenlő hosszúságú. Ezt egyelőre méréssel szemléltessük. A középpontos tükrözést 180°-os elforgatásnak (tehát mozgásnak) felfogva jobban kiviláglik, hogy a szakasz pontjának képei a végpontokat összekötő szakasz pontjai. Vonalzó csúsztatásával beláttathatjuk, hogy az AB párhuzamos az *A'B'*-vel. (Felvethetjük problémaként, hogy mi lenne a tükrözési középponton átmenő egyenesen levő szakasz képe. A tanulók belátják, hogy ugyanazon az egyenesen levő szakasz. Felvethetjük továbbá, hogy mi a változás a tükrözés után. A tanulók rájönnek, hogy az irányítás. Felvethető, hogy mely szakaszok azok, amelyek önmaguknak a tükörképei.) Megszerkesztjük ezután forgatással a szakasz középpontosan szimmetrikus képét, s beláttathatjuk, hogy az előzővel azonos eredményhez jutottunk. A forgatást áttetsző papírral minden tanuló végezze el. A tükrözendő szakasz felvételénél ügyeljünk arra, hogy általában ne legyen párhuzamos a füzet alsó szélével, illetve egyik szélével se.

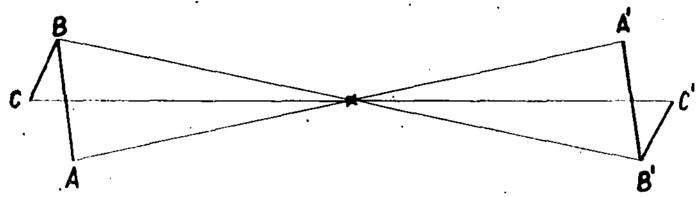
A szakaszok párhuzamosságának igazolására alkalmas cselekvő szemléltetési mód a szalagokkal történő szemléltetés. Ehhez egy piros és egy kék (különböző színű) szalag szükséges. (Egyenlő szélességű.) Egy, a „középponthoz" fektetett párhuzamos szélű szalagot — pl. a pirosat — 180°-kal elforgatunk a középpont körül. Azt már beláttattuk, hogy a középponton áthaladó egyenes tükörképe ugyanaz az egyenes. (A szalag szélét egy egyenes egy részének fogjuk fel.) Megjelöljük a szalagon egy pontot és bemutatjuk, hogy a *P* pontban két pont van egymáson: az eredeti szalag felső szélének és az elforgatott szalag alsó szélének egy-egy pontja. A szalag másik széle eredeti helyzetével párhuzamos, a 180°-os elforgatás után, minthogy bármilyen szakaszhoz illeszthetünk egy szalagot, amelynek párhuzamos széle a középponton megy át. (Hozzá illesztjük a kék szalagot.) Ezzel azt is igazolhatjuk, hogy a szakaszon kijelölt haladási irány ellenkezőjére változik. Az irányt a szalagra





rajzolt nyíllal jelölhetjük. Az irányváltozást egy más szemléltetési móddal is beláttathatjuk: Az egyes számjegy szárát felfogjuk egy szakasznak. Az egyes számot alkotó ferde szakaszt a csúcspont jelöléseként fogjuk fel. Az egyes három pontját 180°-kal rajzban elforgatjuk. (Lásd 3. ábra.)

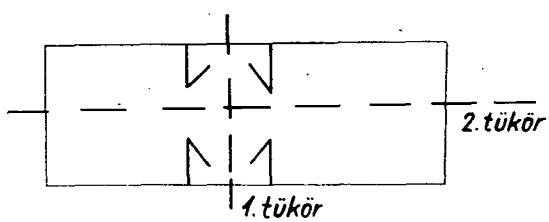
Ezt a forgatást a tanulók is elvégezhetik. Egy négyzet alakú átlátszó papírra rárajzolják az 1-est. Kijelölik a középpontot tükrözési középpontnak és gombostű körül 180°-kal elforgatják a papírt, az előbbivel azonos eredményt kapnak (2. ábra).



Érdekességképpen és az osztály legjobbjainak problémaként megmutathatjuk, hogy ugyanezt az eredményt megkapjuk más úton is. Két zsebtükröt egymásra és a padra is merőlegesen elhelyezünk. Egy kivágott 1-es számjegyet a tükör elé helyezve keressék meg azt a tükörképet, amelyik megfelel a másik két eljárással nyert tükörképnek. Problémaként felvethetjük:

a) Hogyan lehet a keletkezett képet a tengelyes tükrözéssel magyarázni.

b) Hogyan lehetne az eredetivel átellenesen kapott képet megszerkeszteni? *(A tükörben látottak.)*



c) Milyen szerepük van a tükrözésnél a tengelyeknek. (Csak a metszéspontjuk érdekes.)

d) Milyen fizikai eszköz alapszik ezen az elven?

A szög középpontosan szimmetrikus képének megszerkesztésénél felhasználhatjuk, hogy a középpontos tükrözés pontot pontba, szakaszt szakaszba visz át, és a középpontosan tükrös szakaszok párhuzamosak és ellenkező irányúak. Az utóbbival magyarázható a tankönyv azon mondata, mely szerint „szög középpontosan szimmetrikus képét úgy kapjuk meg, hogy megszerkesztjük a szög csúcsának a szimmetria- középpontra vonatkozó képét, majd ebből a képpontból kiindulva ellenkező irányú párhuzamosokat húzunk az eredeti szög száraival".

(Párhuzamost csúsztatással is húzhatunk.) A tankönyv kijelöl a szögszáron egy-egy pontot, azt 180°-kal elforgatja, tehát végeredményben megszerkeszti 2 egymást metsző szakasz középpontosan szimmetrikus képét.

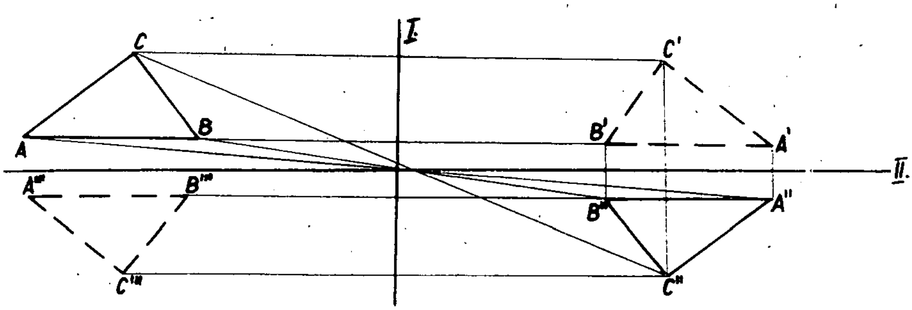
A csúcsszöget mint a váltószög speciális esetén is bemutathatjuk, amikor a tükrözési középpont a szög csúcsa. (A tükrözési középpont tükörképe önmaga.)

A váltószög felismerésének gyakorlására alkalmas a 166. o. c) ábrája, amelyben különböző szögeket megjelölhetünk és kerestethetjük a megjelölt szög (szögek) váltószögeit. Feladatként adhatjuk, hogy keressék (szerkesszék) meg a váltószögpárok tükörközéppontját. A síkidomok középpontosan szimmetrikus helyzete című anyag tanítását a mellékletben közölt óravázlatban leírtak alapján is elvégezhetjük.

A középpontos és tengelyes szimmetria összehasonlításánál a cselekvő szemléltetés mellett lehetőségünk lesz az egymásból való származtatás kiemelésére, az azonosságok és különbözőségek megfogalmazására. Pl. Az előzőekben leírt eljárásokkal bemutathatjuk, hogy két merőleges tengelyes tükrözés egymásutáni elvégzésének eredménye azonos a tengelyek metszéspontjára való tükrözés eredményével, azaz azonos a centrális tükrözéssel. Ezt megmutathatjuk úgy is, hogy egy négyrét összehajtott papírlap négy rétegéből egyszerre kivágunk egy idomot. Kisimítás után négy idom és két egymásra merőleges tükörtengely keletkezik. A tükörtengelyeknek a metszéspontját jól emeljük ki. (Később beláthatjuk — esetleg szakkörön, hogy a centrális tükrözéshez csak a tengelyek metszéspontja szükséges.)

Ezzel megmutathatjuk, hogy a kapott ábrán egy idomnak két idom tengelyesen tükörképe, egy idom pedig középpontos tükörképe.

Így beláttathatjuk, hogy egy idom centrális tükörképét két merőleges tengelyre való tükrözéssel is előállíthatjuk, mégpedig többféleképpen. (5. ábra)

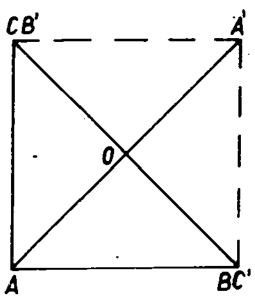


Mutassuk meg, hogy a tengelyes tükrözésnél a fedésbe hozáshoz ki kell lépnünk a síkból, középpontos tükrözésnél és 180°-os elforgatásnál az idomok kilépés nélkül is fedésbe hozhatók. A körüljárás különbségére is mutassunk rá. Azonosságként emeljük ki, hogy mindkét tükrözésnél a tükörkép tükörképe az eredeti idom. (Középiskolában az inverz transzformáció fogalmánál jól felhasználhatják majd tanulóink.) Mindkét esetben ellentétes állású idomokat kapunk. A tükrözési középpont tükörképe önmaga, a tengely tükörképe a tengely. A tükrözési középponton átmenő egyenes tükörképe önmaga, ellentétes irányítással.

Az összefoglaló óra táblaképe szerintem a tankönyvből 5. pontban foglaltakat tartalmazhatja.

Az óra menete:

1. Órakezdő feladat: 259. o. (64. b) kérdése.



Beszéljük meg: a) Hogyan szerkesztjük meg a pontnak a tükörképét?

b) Miért lesz a keletkezett idom négyzet?

c) *B* és *C* pontnak mi lesz a tükörképe?

a) A pont tükörképe?

b) *AO* miért = *OA*'?

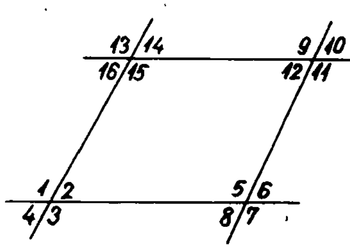
c) *OB*=*CB* és *AO*=OA' ebből mi következik?

d) A szög 90°, ebből mi következik?

Számonkérő jelleggel. Két tanuló füzetét ellenőrzi a tanár. Az eredményt részjegyként az osztályzatba beszámítja. A tanulók egymás munkáját ellenőrzik. A jót kipipálják, a rosszat aláhúzzák.

3. Számonkérés: Az órakezdési feladat ellenőrzése.

Két tanuló az alábbi feladatot kapja.



Írd fel a négyes és az egyes szög váltószögeit és csúcsszögeit!

Az ábrát felrajzolják a táblára is. Miközben a tanár a két felelő munkáját ellenőrzi, az osztállyal megoldják a feladatot.

4. Osztályfoglalkoztatás: Geometriai alapfogalmak. Pont középpontosan szimmetrikus képének szerkesztése és tulajdonságai. A tükrözési középpont szimmetrikus képének meghatározása. Szakasz középpontosan szimmetrikus képének megszerkesztése és tulajdonságai.

A váltószög és csúcsszög szerkesztése és tulajdonságai. Az egybevágóság fogalma. A 169. o. (3. 4. kérdése. 5.) Célkitűzés: A mai órán megszerkesztjük síkidomok középpontosan szimmetrikus képét, és megvizsgáljuk a középpontosan szimmetrikus helyzetű síkidomok tulajdonságait.

A tanár két felelő füzetét elkéri, és az osztály bevonásával ellenőrzi az órakezdő feladatokat. Közben két tanuló azonos feladattal feladatlapot kap.

A felelők 2—2 kérdést kapnak. A négy részjegy (órakezdő feladat, hf., feladatlap és kérdések) alapján osztályzatot kapnak.

6. Új anyag tárgyalása:

I. a) A tankönyv háromszöggel kapcsolatos példájának megszerkesztése csúcspontok tükrözésével.

b) A tankönyv háromszöggel kapcsolatos példájának megszerkesztése 180°-os elforgatással.

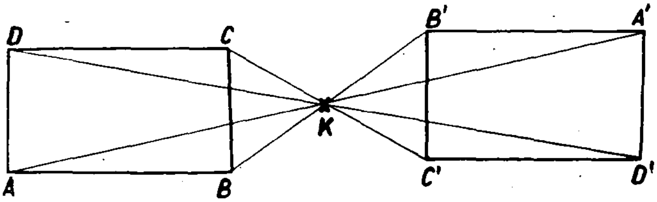
c) A fenti feladatot szerkesszük meg átlátszó papírra és gombostű körül 180°-kal forgassuk el.

Indukciós példa.

II.

A téglalap tükrözése
K ponton keresztül

Második indukciós példa.



III. Elemzés: A háromszög csúcspontjainak tükrözésével milyen alkatrészek tükörképét határoztuk meg? (A háromszöget alkotó egyenes szakaszokat és szögeket.) A szakaszok tükrözéséről mit állapítottunk meg? (Nagyságuk állandó, párhuzamosak és ellenkező irányításúak.) A szögekről mit állapítottunk meg? (Váltószögek.)

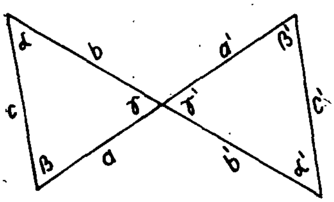
A tanár az elemzést ténymegállapító kérdések alapján végzi.

Ennek alapján milyen egyenlőséget írhatunk fel a két háromszög megfelelő oldalai, illetve szögei között? (AB=A'B', BC=B'C', CA=C'A', illetve $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ × $\alpha=\alpha'$). Mit tapasztaltunk, amikor az eredeti háromszöget elforgattuk? (A két háromszög fedi egymást.) Tehát mit állapíthatunk meg a két háromszögről? (Egybevágóak.) Hasonlóan elemezzük a téglalap szerkesztését is.

A háromszöget és a téglalapot középpontosan tükrözve milyen idom a tükörkép? (Háromszög, téglalap.) Milyen az eredeti idom és a tükörkép, egymáshoz viszonyítva? (Egybevágóak.) Mit állapítottunk meg a megfelelő oldalakról és a megfelelő szögekről? (Egyenlő nagyságúak.) Milyen a tükrözött és az új idom körüljárása? (Azonos.) Milyen az állásuk? (Ellentétes.) Mit állapíthatunk meg a középpontosan szimmetrikus idomokról? (Egybevágóak, azonos körüljárásúak, ellentétes állásúak.) Mi jellemzi a megfelelő pontokat összekötő egyeneseket? (Átmennek a tükrözési középponton.)

Fogalomalkotás
Ténymegállapító törvény, elv után kérdező, hasonlóság és különbözőségre vonatkozó kérdések alapján.

7. Gyakorlás: *Rajzoljunk egyenlő szárú háromszöget!*



Egyik csúcsán át tükrözzük! Jelöljük meg a megfelelő oldalakat és szögeket! Írjuk fel, milyen szögpárokat találunk!

$\gamma=\gamma'$ (csúcs)
$\beta=\beta'$ (váltó)
$\alpha=\alpha'$ (váltó)

Félig önálló munka. A tanár a táblánál szerkeszti, a tanulók diktálják a szerkesztés menetét.

8. Összefoglalás: Az idomok tükrözését milyen előző ismeretekre vezettük vissza? (Pont és szakaszok tükrözése.) Hol vehetjük fel a tükrözési középpontot? (Az idomon kívül, belül és az idomon.) Milyen idom egy háromszög, egy négyzet stb. középpontosan tükrözött képe? (Háromszög, négyzet stb.) Mit mondhatunk az idom körüljárásáról? (Azonos.) Mit állapíthatunk meg az idom állásáról? (Ellentétes.) Milyen szögpárokat kaphatunk az eredeti és az új idom szögei segítségével? (Váltószögek, de lehetnek csúcsszögek is.)

A PÁRHUZAMOS ELTOLÁS ÉS 90°-OS ELFORGATÁS

(Irodalom: 2, 3, 5, 7, 8)

A párhuzamos eltolás tanításakor probléma felvetéssel kezdhetjük az órát. Adott egy háromszög, és le akarjuk másolni úgy, hogy egy meghatározott távolság legyen a két háromszög között. A problémát cselekedtetéssel próbáljuk megoldani. Egy kétrétű papírra megszerkesztjük a háromszöget és kivágjuk. Veszünk egy rajzlapot és abba két gombostűt tűzünk. A kétrétű papírt a rajzlapon csúsztassuk úgy, hogy az éle a két gombostűvel állandóan érintkezzék. Csúsztatás közben megállunk és a kivágott idomot — a keret mentén — a rajzlapra többször lemásoljuk. Háromszögeket kapunk. A háromszögek egymásnak eltolt képei. Ezzel definiáljuk a transzformációt is, vagyis megállapítjuk, hogy ezt a műveletet eltolásnak nevezzük. (Bevezethetjük Gádor Endréné a Matematika Tanítása 1964. IV. számában közölt példája alapján is.) Ezt követően felidézzük, hogy milyen idomot nevezzünk háromszögnek. A háromszöget három egyenes szakasz határolja. Az egyenes szakaszok egymással szöget zárnak be, és pontokból állnak. Rámutathatunk, hogy a háromszög eltolásával szakaszokat (pontokat) és szögeket toltunk el. Felvethetjük, hogy ha pontot tolunk el, mi lesz a képe. (A háromszögön kijelölünk egy pontot.) A tanulók megállapítják, hogy pont eltolt képe pont. Felvethetjük, hogy miért volt a rajzlapba szúrva a két gombostű. A tanulók rájönnek, hogy a párhuzamosságot ezzel biztosítottuk. Utána megállapíthatjuk, hogy pont párhuzamos eltolásával nyert képe pont lesz. Betűkkel megjelöljük — minden tanuló — a háromszög egyik oldalát. Ezzel szakaszt jelöltünk meg. Ismételt eltolással megállapítjuk a megjelölt szakasz eltolt képeit, és hogy az eltolt és az eredeti szakasz egyenlő hosszúságúak. Vonalzó csúsztatással megmutathatjuk, hogy párhuzamosak.

Színessel megjelöljük a háromszög egyik szögét úgy, hogy a csúcsponton kívül mindkét száron megjelölünk egy-egy pontot. Ezzel a szög eltolását visszavezetjük pont és szakasz eltolására. Megmutatjuk, hogy az eredeti és az eltolt szög mozgatással fedésbe hozható, és ebből következik, hogy egyenlők.

A szakasz eltolásnál megállapítottuk, hogy az eredeti és az eltolt szakasz párhuzamosak. Ebből következik, hogy a szög szárai párhuzamosak. A tanár ezután közli az egyállású szög fogalmát. Majd felidézzük a váltószög fogalmát. A kettőt összehasonlítjuk. Megállapítjuk az egyező tulajdonságaikat: száraik párhuzamosságát és a szögek egyenlőségét. Megállapítjuk különböző tulajdonságaikat: a száraik irányítását.

Felidézzük, hogy a váltószöget milyen transzformációval kaptuk, s öszehasonlítjuk a centrális tükrözést és az eltolást, mint transzformációt is.

Megegyező tulajdonságuk: hogy mindkét transzformáció pontot pontba, egyenest egyenesbe visz át, de különböznek abban, hogy a centrális tükrözésnél az egyenesek irányítása ellenkező lesz.

Az egyállású szög fogalmának alapján — a váltószögnél már említett ábrán — keressünk egyállású szögeket.

Látnunk kell, hogy amikor megállapítottuk, hogy eltolással szakaszt vele egyenlő nagyságú és párhuzamos szakaszba vittünk át, mértani helyet készítettünk elő. A fentieket így is megfogalmazhatnánk: „Ha egy szakasz minden pontját ugyanabban az irányban és ugyanakkora távolsággal toljuk el, akkor a kapott pontok mértani helye az eredetivel párhuzamos egyenes lesz." A szakaszok eltolása után, az eltolt három szakaszt mint háromszöget vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a háromszög eltolása alatt a háromszöget alkotó pontok eltolását értjük. Mivel az eltolás szakaszt szakaszba, szöget ugyanolyan nagyságú szögbe visz át, az eltolt és az eredeti háromszög szögei és oldalai egyenlők. A megfelelő szögek egyállásúak, tehát az eredeti és az eltolt háromszögek egybevágóak. (Ezt csúsztatással is érzékeltetjük.)

Ezután felvethetjük, hogy hogyan történik meg adott távolságra történő eltolás. (Tankönyv alapján.) Itt ügyeljünk arra, hogy az „adott távolságra való eltolás"-nál a távolság nem az eredeti és a keletkező eltolás távolságát jelenti. Pl. Egyenest önmagán is eltolhatunk, a távolság zérus lesz. Bemutathatjuk, hogy az 5. osztálytól használt csúsztatás nem más, mint párhuzamos eltolás. A párhuzamosok szerkesztése az egyállású szögek tulajdonságán alapszik. Amikor a rögzített szár mellett csúsztattuk a vonalzót, egyállású szöget szerkesztettünk.

A papírmodell segítségével beláttathatjuk, hogy mivel egy eltolás sem változtatja meg az idom állását, több egymásutáni eltolást egy eltolással is helyettesíthetünk. Az eltolt idomnak az eredeti idom párhuzamosan eltolt képe. Ez a megállapítás előkészíti a transzformáció inverzének fogalmát. Szakkörön rámutathatunk arra, hogy az adott tengelyre, illetve pontra való tükrözés önmagának inverze, az adott irányú és zérustól különböző mértékű eltolás azonban nem.

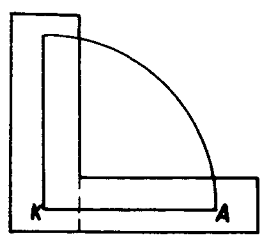
Tanári segítséggel az összefoglalásnál tisztázhatjuk, hogy eltolás olyan transzformáció, amely minden háromszöget vele „egyállású" háromszögbe visz át. Meghagyja az idom körüljárási irányát és méreteit.

Beláttathatjuk, hogy megismerkedtünk a háromszögek másolásának egy új módszerével, amellyel bármilyen távolságra is át tudunk másolni háromszögeket (alakzatokat) úgy, hogy nem kell összeilleszteni a lapokat.

A tanulók közösen, a tanár vezetésével végezzenek eltolásokat, ha ismert az eltolás iránya és nagysága. Kezdetben szakaszok és szögek eltolását végeztessük el. Erre példa a 101. és a 102. feladat. Ezek után háromszögeket toljunk el megadott távolságra és megadott irányban. Erre példa a 104. és 105. feladat. A transzformációk azonosságainak és különbségeinek megállapítását a 108. feladat megoldása is segíti.

A tanterv csak a háromszögek párhuzamos eltolását írja elő. Felvethetjük és szakkörön bemutathatjuk, hogy tudnánk-e az eltolásnál tanultakat más alakzatokra is alkalmazni. Pl. A paralelogramma eltolását visszavezethetjük két háromszög eltolására. A háromszögek eltolását csúcspontjaik eltolásával helyettesíthetjük, tehát a paralelogramma eltolását négy csúcspontjának eltolásával végezhetjük el.

A forgatás jellemző adatait cselekvő szemléltetéssel konkrétabbá tehetjük és jól megértethetjük. Az órára a tanulók hozzanak magukkal egy papírcsíkot. Szúrjunk a papírcsíkba két lyukat (A és K). A papírcsíkot könnyebbség kedvéért a füzet szélével párhuzamosan helyezzük el, és a K pontban rögzítsük. A csíkot tartsuk feszesen és mozgassuk úgy, hogy az A lyukon ceruzahegyet dugunk keresztül. A csík mozgatását forgásnak nevezzük. A forgást addig végezzük, míg a körív 90°-os szöget nem ír le. Ebből leolvashatjuk, hogy a forgatásnak három jellemző adata van:



A forgási középpont (a fixpont), az elforgatás szöge és a forgás menete (jobb, bal).

Közölhetjük tanulóinkkal, hogy mi a továbbiakban csak 90°-os forgatási szöggel végzünk transzformációt.

A tanulók a fenti szemléltetés után rájönnek, hogy már végeztünk forgatást 180°-os szöggel. Ez jó alkalom a középpontos tükrözés tulajdonságainak felújítására.

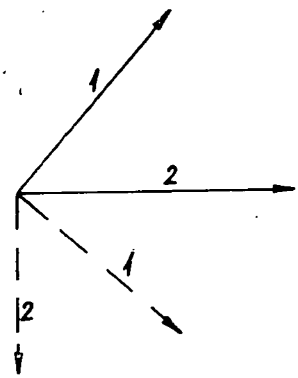
Végezzük el egy alakzat tengelyes tükrözését — a tanulókkal együtt — úgy, hogy elforgatjuk egy hajtásél körül. Megállapíthatjuk, hogy a szokásos köznapi szóhasználat szerint ez is forgatás. Abban különbözik az előző két forgatástól, hogy ki kellett lépnünk a síkból. Ebből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a síkban csak pont körül forgathatjuk el az alakzatokat. (A fentiekben leírt papírcsík szerepét a körző is betöltheti.) A körző egyik szárának forgatásakor a mozgó szár a másik szárral különböző szögeket zár be.

A forgatás fogalmának és jellemző adatainak tisztázása után a tankönyvi példából induljunk ki. Forgassunk el egy derékszögű háromszöget. Állapítsuk meg a jellemző adatokat. A forgatási középpont a derékszög csúcsa. A forgatás szöge 90°. A forgatás menete: balmenetű. Azt tudjuk, hogy a háromszöget három csúcsa meghatározza. Ebből beláttathatjuk, hogy a csúcspontok elforgatásakor kapott pontok meghatározzák az elforgatott háromszöget.

A tankönyvi példa, a 180°-os elforgatás és a fenti szemléltetés felidézésével megállapíthatjuk, hogy a 90°-os pontkörüli elforgatás nem változtatja meg a méreteket és a körüljárás irányát. Pontot pontba, egyenest egyenesbe, szöget szögbe visz át.

A tankönyvi példánál problémát jelenthet, hogy miért egybevágó a két derékszögű háromszög. Bemutathatjuk, hogy a CB és az AC szakaszt ugyanakkora (90°-os) szöggel forgattuk el. A hosszuk nem változott, mivel a szakasz hosszát vettük körzőnyílásba. Így az eredeti és a kapott háromszögben két-két oldal egyenlő. Egyenlő a két oldal által bezárt szög is, hiszen derékszögek. Ebből következik az egybevágóságuk.

A tankönyvi példából jó, ha az egyik szöget külön lemásoljuk és elforgatjuk 90°-kal a csúcsa körül. Majd párhuzamosan eltoljuk, s megmutatjuk, hogy melyik szár melyik szárra merőleges. (A szárak meghosszabbításait is megrajzoljuk.) A szög 90°-os elforgatását összekapcsolhatjuk pontnak háromszög vonalzó segítségével történő elforgatásával. Egy pontot derékszögű vonalzóval 90°-kal úgy forgatunk el, hogy a vonalzó derékszögű csúcsát a forgatási középponthoz tesszük úgy, hogy az egyik befogó az elforgatandó ponthoz illeszkedjék. A másik befogó mellett egyenest húzunk és erre rámérjük a pont és a forgási középpont közti szakaszt. A szög szárainak egy-egy pontját 90°-kal elforgattuk (egy pont körül).



A fentiekkel bizonyíthatjuk, hogy a merőleges szárú hegyes, illetve tompaszögek egyenlők. Ha a szöget az eredeti csúcspontja körül 90°-kal elforgatnánk, akkor a szögszárak párhuzamosakká válnának. Mivel mindkettő hegyes, illetve tompaszög, nem egészíthetik ki egymást 180°-ra, tehát csak egyenlők lehetnek. (Mivel a párhuzamos félegyenesek alkotta szögek vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást.)

Szakköri foglalkozásokon — vagy a legjobbaknak problémaként házi feladatnak — feladathatjuk, hogy keressenek olyan idomokat, amelyeket egy pont körül egy alkalmas szöggel elforgatva az elforgatott idom tökéletesen fedi az eredetit. (Ilyen az egyenlő oldalú háromszög és négyzet.) A legjobbak egy-egy szögre megtalálják. Mutassuk be, hogy pl. a négyzetnél négy ilyen szög van (90°, 180°, 270°, 360°)!

Ezzel megértethetjük, hogy nemcsak középpontos, hanem forgás szimmetriáról is beszélhetünk. A forgás szimmetria segítségével bonyolultnak tűnő gondolkodást igénylő szerkesztéseket végezhetünk. Pl. Rajzoljunk egy paralelogrammát és szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek csúcsai a paralelogramma oldalán helyezkednek el. A feladat olyan probléma helyzet, melynek megoldásában a gondolkodási műveletek alkalmazása szükséges. A feladat megoldása olyan elméleti ismeretek bevonását igényli, melyek lassan túlnőnek a szemléletes szituáció keretein.

(Először észre kell venni, hogy a négyzet és a paralelogramma középpontja egybeesik. Majd azt, hogy nemcsak a négyzet tükörképe, de a paralelogramma is fedi az eredetijét; A paralelogramma középpontját az átlók metszéspontja meghatározza stb.)

A merőleges egyenesek szerkesztését két háromszög vonalzó segítségével a tankönyv szemléletesen bemutatja.

A 6—7. osztályban tanult transzformációk rendszerezését kiemelt szempont szerint az alábbi módon is elvégezhetjük:

1. Távolságtartó transzformációk: eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, elforgatás.
2. Állástartó transzformációk: eltolás,
3. Menettartó transzformációk: eltolás, középpontos tükrözés, elforgatás,
4. Aránytartó és szögtartó transzformációk: eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, elforgatás,
5. Területtartó transzformációk: eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, elforgatás.

	méretes tulajdonságok			helyzet	
	terület	arány, szög	távolság	menet	állás
Eltolás	+	+	+	+	+
Középp. tükr.	+	+	+	+	
Elforgatás	+	+	+	+	
Teng. tükrözés	+	+	+		

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. *Bugosevszkij, K. Sz.:* Geometriai transzformációk. Matematika V. Skole. 1963. №. 1. D. 16 354..
2. *Gallai Tibor—Péter Rózsa:* Matematika a középiskolák I. osztályai számára. Bp. 1949. Tankönyvkiadó.
   Ajánlott fejezetek: Geometriai transzformációk.
3. *Gádor Endréné:* Geometriai transzformációk tanítása az általános iskolában. A Matematika Tanítása. 1964. 4. sz.
4. *Irosnyikov, M. P.:* Oktatási tapasztalatok a szerkesztési feladatok köréből. „Élenjáró matematikai tanárok tapasztalatai." c. cikkgyűjteményről. D. 9592.
5. *Kárteszi Ferenc—Erdősi József:* A tér megismerése. Bp. 1948. Egyetemi Nyomda.
   Ajánlott fejezetek: Papírhajtogatás.
   Tengelyes tükrözés.
   Középpontos tükrözés.
   Eltolás és elforgatás.
   Paralelogrammák tulajdonságai.
   Leképezések összetevése és felbontása.
   Leképezések tulajdonságai.
   Szerkesztések.
6. *Varga Elemér:* Eszköz a szögek, háromszögek és négyszögek szemléltetésére, valamint szerkeszthetőségükre az általános iskolában.
   Művelődési Tájékoztató. 1963. dec. szám.
7. *Varga Tamás:* Kis geometria, Bp. 1965. Művelt Nép. Ajánlott fejezet: Másolás.
8. *Vigassy Lajos:* Geometriai transzformációk. Bp. 1963. Tankönyvkiadó.