

6. Az *értelmi* jellegű feladatok többnyire a készség eszközzé formálását szolgálják. (Tipikus példa erre a válogató olvasás sok-sok formája.)

7. Az olvasottak *elképzeltetése*, megjelenítése, ábrázolása végeredményben az értelem, pontos olvasást szolgálja, de ez kiemelt, önálló feladata is lehet egy-egy órának. (Pl. dramatizálás, riport készítése, illusztrálás stb.)

8. A gyakorló órákon is feladatunk a tanulók *érzelmi* nevelése, a szöveganyag érzelmi hatásainak elmélyítése. (Pl. komoly tartalmú olvasmányokhoz nem valók a komikus gyakorlási módok.)

9. Végül pedig a *fogalmazási, kifejezési* készség fejlesztésével is törődni kell a gyakorló órákon, márcsak azért is, mert a kifejezés fejlődése visszahat az olvasási készség fejlődésére is.

Az eddigi felsorolás természetesen nem teljes, s nem is mindenütt pontos, arra azonban kiindulásként alkalmas lehet, hogy a gyakorlási lehetőségek, módok, változatok hatalmas tömegében eligazodjunk.

Arra, hogy az egyes feladatok milyen gyakorlatokat tesznek szükségessé, s hogy a fontosabb gyakorlási módoknak melyek a pedagógiai értékei, – konkrét példák kíséretében egy másik alkalommal szeretnénk visszatérni.



BORSODI ISTVÁN

Tanítóképző Intézet, Baja

## Gondolkodási hibák megelőzése és javítása az alsó tagozatos számtantanításban

Tanulóink gondolkodásában gyakran fellelhető hiba a *gondolkodás merevsége*. Erre az *jellemző*, hogy a tanuló képtelen az alkalmazott cselekvési, vagy gondolkodási séma változtatására, a sokszor menetközben szükségessé váló módosítások megtételére, így a célszerűbb formák keresésére is. A tanuló érti, amit csinál, nincs tehát szó formalizmusról, a tartalom és forma kettéválásáról, itt nem beszélhetünk a konkrétum és absztraktum elszakadásáról sem. *A feladatok megoldásakor azonban mindig csak a legmegszokottabb utakon halad.* Ez a gondolkodási hiba nem a gondolatok tartalmával, hanem a gondolatmenet egyes lépéseivel függ össze.

A gondolkodás merevségére vezethet, ha a tanításban bizonyos eljárásokat mindig azonos módon végeztetünk el a tanulóinkkal. Rugalmasságot, aktív gondolkodást akkor érünk el, ha *az eljárásokat variáljuk*. Válasszunk egy első osztályos példát! A feladat 12 csészének a megszámlálása. Először egy tanuló egyesével számlálja meg, majd a másik kettésével, hármasával. Minden esetben 12-t számláltak. A tanító azonban nem elégszik meg az eredménnyel, hanem azt kívánja, hogy olyan csoportokkal számlálják, amelyet mutat. Hol egyet, kettőt, hol pedig hármat választ le a tárgyhalmazból. A gyerekek maguk választhatják meg a csoportokat, a kiszólitott tanuló a számlálás közben szabadon csoportosíthat.

Felfogásunk szerint a *tárgycsoportokkal való hozzászámlálás* és megszámlálás sokféle változatát végig kell csinálnia a tanulóknak, ami után majd nem lesz nehéz például a *tizes átlépése*. A 10 átlépésének tanítása azért megy nehezen, mert a tárgycsoportokkal való hozzászámlálás sok lehetséges variánsát nem végezzük el.

A gondolkodás rugalmasságának, az aktív gondolkodásnak kialakítása szempontjából nagy jelentősége van *azoknak a feladatoknak is, amelyeknek többféle megoldása lehetséges.*

A 2. osztályos tanulók már ismerik a szorzótáblákat. A tanító felmutat a gyerekeknek egy papírlapot, amelyen öt sorban 4-4, összesen 20 karikát rajzoltunk, vagy korongot ragasztottunk. Megszámolás után a tanító letakar ebből például 2 korongot. Nyilván 18 marad.

Hányféle feladatot tudnál ebből csinálni? –

Egyik tanuló mondja: „Látok négy teljes sort, egy-egy sorban négy korong van, és látok még egy darab sort, amelyben 2 korong van. Tehát  $4 \cdot 4 + 2 = 18$  korong van a lapon.” Megtalálják a gyerekek a  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$  valamint a  $4 \cdot 5 - 2 = 18$  megoldásokat is.

Szöveges feladat megoldásánál is többféle lehetőséget keresnek.

Pl. *Tyereskova, az a híres szovjet űrhajósno egy óra híján három napig volt az űrben. Hány órát tartózkodott fenn?* A gyerekek három féle módot is találnak a megoldásra: Egyik azt mondja, hogy első napon 24, a másodikon is 24, a harmadikon 23 órát tartózkodott az űrhajóban, tehát összesen  $24 + 24 + 23 = 71$  órát. A másik  $2 \cdot 24 + 23$  formában számol, a harmadik a  $3 \cdot 24 - 1$  megoldást is indokolni tudja.

Az ilyen típusú feladatok kitűzésével arra neveljük tanulóinkat, hogy vegyék észre, mennyire szükséges a feladatok feltételeinek kellő elemzése. Érdemes különböző megoldásokat keresni, így érdekesek a számtan órák! Így tudjuk a célravezetőbb formákat is megtalálni.

Z. P. *Dienes professzor mutat rá, milyen jelentős a gondolkodásra neveléssel kapcsolatban a tanuló önállóságának szerepéhez juttatása.* Nagyon sok gondolkodási hiba elkerülhető volna a tanulói önállóság biztosításával. A probléma megoldó gondolkodást az segíti legjobban, ha biztosítani tudjuk az iskolai munkában is, hogy a gyermek *a megfigyelésének, kisebb-nagyobb matematikai felfedezésének örülhessen.* Új utak, új eljárások keresése adja meg a lehetőséget a „kisebb-nagyobb matematikai felfedezések”-re. S hogyan örül a gyerek, ha még egy újabb eljárást tud javasolni! Dienes professzor mondja: „Minden gyerek ízlelhesse meg a kis Prometheusz borzadályát, aki ellopta a matematika isteneinek szent tüzét.”

Hasonló elgondolás vezet bennünket a *hiányos, vagy felesleges adatokat is tartalmazó* feladatok kitűzésénél. Pl. Édesanya elment a boltba bevásárolni. 50 forintot vitt magával. Egy kg cukor ára 11 Ft, egy kg hús ára 25 Ft, a kenyér kg-ja 3 Ft. Mit tudott venni? Igen sokféle vásárlási terv fog kialakulni. Persze nem kötelező az 50 Ft elköltése. Ha valamelyik gyerek 2 kg kenyér, 1 kg cukor, 1 kg hús vásárlását ajánlja, akkor azt is ki kell számolnia, mennyi pénze maradt édesanyjának a vásárlás után. A feladat feltételeinek megfelelő gazdag variálási lehetőség különösen értékes a rugalmas gondolkodás kialakítása szempontjából.

A harmadik-negyedik osztályban a gondolkodás megmerevedését jelzi *egy tanuló törekvése arra, hogy a fejbenszámolást minden esetben az írásbeli számolással helyettesítsék.* Az írásbeli műveleteket természetesen azért tanítjuk, hogy ezzel könnyítsünk magunkon, ha a fejbenszámolás végzése már nem könnyű, emiatt sok a hibalehetőség. A tanulónak is látnia kell, hogy a műveletek fejben való elvégzése a nagy számok körében sokszor komoly nehézségekkel jár. Mégis gondolkodási hibához vezet az, ha a későbbiek során teljesen mellőzzük a fejbenszámolást, s minden műveletet kizárólag írásban végeztetünk. Vannak olyan esetek, amikor a fejbenszámolás eredményesebb, illetve gyorsabb, alkalmazása célszerűbb. Láttam már olyan órát is, amikor írásbeli osztás ellenőrzésének végzésekor a maradék 1-et is írásban adták az osztó és hányados szorzatához.

A gondolkodás merevségére jellemzőek az úgynevezett *átkapcsolási hibák* is, amelyek az egyik műveletmódról a másikra való átmenetnél tapasztalhatók. Hiányzik például az összeadásról a kivonásra való átmenetnél az áttérés könnyedsége. Ha a tanuló összeadási feladatok elvégzése után kivonást kap, az új műveleti jelet figyelmen kívül hagyva továbbra is összeadást végez. Az átkapcsolási hibák körébe soroljuk az ún. *perszeverációs hibákat* is, amelyek az előbbi művelet-ismétlődéssel szemben valamely szám ismételtetésében nyilvánulnak meg. Például összeadásnál négy esetben 9 volt az eredmény, akkor az ötödik feladathoz is odairja ezt az eredményt néhány elsős tanuló, jóllehet, most nem az a két szám összege.

Az átkapcsolási hibák vizsgálatához a gyakorló iskolánk egy első és egy második osztályában felmérést végeztünk. Az elsősök az egyjegyű számok körében tíz összeadási illerve kivonási feladatot kaptak vegyesen. A 24 kisgyerekből 6 (tehát 25%) követett el átkapcsolási hibát. A második osztályosok számára olyan feladatlapot állítottunk össze, amely négy kivonási feladat után összeadásra vezető szöveges feladatot, majd négy összeadási számfeladatot tartalmazott.

Célunk annak megvizsgálása volt, hogy az előzőleg végzett számfeladatok milyensége hatással van-e a szöveges feladatok megoldására. Ebben az esetben a szöveges összeadási feladatot nagyobb sikerrel oldanák meg a gyerekek, ha előtte összeadást végeztek volna számokkal. Több lenne a hiba a kivonások után megoldott szöveges összeadási feladatban.

Tapasztalatunk igen érdekes volt. *Az átkapcsolási hiba nem jelentkezett a szöveges feladatoknál.* Ezekre nem vitték át mechanikusan az előbb végzett műveletet. Viszont a 28 tanulóból 2 (tehát 7%) átkapcsolási hibát vétett a második számfeladatsorozat megkezdésekor. Az első oszlopban végzett kivonási feladatok hatására a második oszlopban is kivonást végeztek a kijelölt összeadás helyett noha közben egy szöveges feladatot is megoldottak.

*Hogyan javítsuk az átkapcsolási hibákat?* Mindenesetre helytelen volna a hibázás kiküszöbölése olyan módon, hogy nem adunk tanulóinknak feladatokat, amelyekben különböző műveleteket kell egymás után végezni. Ebből a szempontból hibáztatjuk a tankönyvszerzőket is, akik rendszerint egy művelettel megoldható számfeladatokból álló oszlopokat jelölnek ki. Ellenkezőleg, minél változatosabban és mennél gyakrabban kapjanak a tanulók olyan feladatokat, melyek megkívánják az átkapcsolást. A hiba felbukkanását megfelelő elemzés kövesse. Így tudjuk az előző feladat gátló hatását a minimálisra csökkenteni, ezzel a gondolkodás rugalmasságát fejleszteni.

Az átkapcsolási hibák előfordulásának aránya a magasabb osztályokban ugyan csökken, *de a gondolkodási folyamat nehézkességével* gyakran találkozunk. Gyengébb tanulóknál különösen sokszor megfigyelhető az a törekvés, hogy a *variációs lehetőségek* elkerülésével, lehetőleg *valamiféle sablon szerint* oldhassák meg a feladatokat. S a gondolkodási restség kifejlődéséhez milyen gyakran hozzájárul az a hibás tanítási gyakorlat, hogy a gyerek előre tudja, hogy ezt a feladatot is például írásbeli szorzással kell megoldani, hiszen egész héten, sőt heteken keresztül *csak szorzunk.* Nem tudom tehát helyeselni az ilyenszerű célkitűzéseket sem: „A mai órán az írásbeli szorzást fogjuk gyakorolni” — olyankor, ha problémát tartalmazó szöveges feladatokat is oldunk meg. Ez a közlés ugyanis vagy formálissá válik, és már oda sem figyel a gyerekek, vagy pedig megfigyeli, de akkor nincs tovább probléma...

Iskolai gyakorlatunkban már terjed az a módszertani elképzelés, hogy a tanító vezetésével, irányításával *végezzenek a tanulók változtatásokat a kitűzött és megoldott feladat feltételein.* A gyakorlatban ez sokszor csupán annyit jelent, hogy a megoldott szöveges feladat néhány számadatának változtatását a tanító közli a tanulókkal, s az így kialakult új feladatot azonos logikai menettel megoldják.

A modernebb módszertani elképzelések ezen túlmenően lehetőséget szeretnének nyújtani arra is, hogy *minden gyerek a saját módosítása* szerinti új feladatot oldja meg.

Gyakorló iskolánkban leginkább az a módszertani változat honosodott meg, amikor a szöveges feladat megoldása után a *tanító és a gyerekek együttesen határoznak meg variáns feltételeket*, s utána egy-egy *kijelölt csoport* oldja meg az egyes változatokat. A csoportmunka befejezése után az egyes változatok eredményeinek egybevetése, értékelése, s ezekből lehetőség szerint következtetések levonása már ismét a teljes tanuló-csoport feladata lesz.

A negyedik osztály tanítója például egy Tsz életéből választ feladatot. Megadja azt, hogy hány tehén volt ebben a termelőszövetkezetben, s azt is, hogy a tehenek átlagosan hány liter tejet adtak naponta. A napi tejhozam és a tehenek száma alapján kiszámítják a napi tejtermelést. Utána megállapítják, hogy a feltételek változtatásának egyik lehetősége a tehenek számának növelése, vagy csökkentése. Változatlan mennyiségű állatállomány mellett is lehet azonban többet, vagy esetleg kevesebbet termelni. Az abrakolás és gondozás minősége szerint változik a napi tejhozam. Kijelölt csoportok dolgoznak ezután a variált feltételekkel: Lesz olyan padosor, amely növekvő számú állatállomány tenmelési eredményeit számítja, az osztály másik része pedig variált átlagos tejhozam alapján számítja az összes tejtermelést. A legjobb tanulók még függvényyszerű összefüggést is látnak: Ha nagyobbítottuk a számítás során a tehenek számát, akkor nagyobb szorzatot kaptunk, vagyis a szorzandó növelésével növekedett a szorzat. Hasonlóan történt a szorzó (az egységnyi tejhozam) és szorzat változásának megfigyelése. A változó mennyiségeknek ilyenszerű vizsgálata az alsó tagozati tantervi anyag jó elvégzését jelenti, s a mennyiségek közötti egyszerű belső összefüggések észrevételével a dialektikus gondolkodás megalapozását eredményezi.

A rugalmatlan, merev gondolkodás azért veszélyes, mert kifejlődhet belőle az a súlyosabb eset, amit *mechanikus gondolkodásnak* szoktunk nevezni. A mechanikus gondolkodást is jellemzi egy bizonyos gondolatmenet merev lefolyása, az egyes gondolati lépések olyan merev kapcsolata, amelyen a személy már nem tud változtatni. Ezen túlmenően azonban jellemző rá az is, hogy *a megtett lépések indoklására sem képes a gondolkodó személy*.

Az alsó tagozat tantervi követelménye bizonyos *jártasságok és készségek* kialakítása is. Az előírt alapkészségek és mechanizmusok elsajátíttatása nélkül nem beszélhetünk a matematika megalapozásáról. Nem jelenthet tehát mechanikus gondolkodást az ún. *eszköz jellegű eljárások* rutinszerű alkalmazása, sőt ez az eredményes gondolkodás feltétele. Nem törekedhetünk arra, hogy a tanuló minden lépést minden esetben indokoljon, ami a jártasságok és készségek kialakulását nagymértékben lelassítaná. El kell azonban érniünk, hogy az automatikusan, „gondolkodás nélkül” adott válaszokat felszólításra a tanulóink indokolni, érvekkel tudják alátámasztani. A jártasságoknak és készségeknek ilyenszerű felhasználása jellemző a nem-mechanikus gondolkodásra, ha ez párosul a gondolkodás rugalmasságával, az új utak keresésének képességével.

*Mit tehetünk a mechanikus gondolkodás kifejlődésének megelőzésére?* Hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, osszuk két részre az alsó tagozati számtan-mértan anyagot aszerint, hogy az elsajátítandó ismeretanyaggal mi a célunk. A tantervi anyag jelentős része olyan alapismereteket, eljárásokat tartalmaz, amelyeket eszközként használunk fel a gyakorlati problémák megoldásához. Ilyen eszközjellege van a szóbeli és írásbeli alapműveleteknek, ezen belül egyes részproblémák megoldásának, mint például a tizesátlépés, vagy a mértékegységek átváltásában megtanítandó eljárásnak stb. A másik csoportba pedig azok a feladatmegoldások tartoznak, amelyeknél a fenti eszközjellegű eljárásokat felhasználjuk.

A tanuló gondolkodásának fejlesztésére, az egyes gondolkodási műveletek tudatos:

Felhasználására mindkét típusú anyagrészt tanításánál szükség van. Mégis alapvetően más-más eljárást igényelnek ezek a gondolkodásra nevelés szempontjából.

Foglalkozzunk először az eszközjellegű ismeretanyaggal, és válasszuk például a *tizesátlépés problémáját*. A  $7+8$  összeadás elvégezhető többféle módon is. Általában az eszközjellegű feladatok többféleképpen is végezhetők. Mégis a *tanterv egyféle eljárás megtanítását és készséggé fejlesztését írja elő a számunkra*. A tizesátlépés más lehetőségeinek, variánsainak az első osztályban való megtanítása káros lenne, megnehezítené a készséggé fejlesztést, ez újabb gondolkodási hibához vezetne. Az eszközjellegű ismeretanyagot tehát kezdeti fokon *a variánsok vizsgálata nélkül tanítjuk, a tanított eljárást készséggé alakítjuk*. Ne feledkezzünk meg azonban a többi lehetőségről sem! Később, az első változat automatizálása után, esetleg nem is abban az évben, hanem egy felsőbb osztályban mutassuk meg a gondolkodás fejlesztése érdekében a variáns megoldásokat is!

Az említett  $7+8$  összeadásnak az első osztályban tanított módja:

$$7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$$

Ez az eljárás előnyös a számrendszerre vonatkozó ismeretek elmélyítése céljából. A kétjegyű számok fogalmának szilárdítása szükséges, ami különösen indokolja ennek a formának a tanítását. Kétségtelen viszont, hogy sok hibalehetőség van az összetett eljárásban.

*A feladat azonban másképpen is elvégezhető*: A 7-hez először adjunk 10-et, majd vonjunk ki az eredményből annyit, amennyivel többet adtunk hozzá, mint kellett volna, tehát 2-t. Ez az eljárás a „nehéz esetek”-nek mondott  $7+8$ ,  $8+7$ ,  $9+8$ ,  $8+9$ ,  $7+9$ ,  $9+7$  összeadásoknál könnyebben megy, mint a fent említett tantervi előírás szerinti munka. A 10 hozzáadása ugyanis nem okoz nehézséget a kisgyerek számára, majd a kapott kétjegyűből a 10-től való különbség elvétele is könnyen megy. Az eljárás gyakorlatias is, mert ha a boltba megyünk vásárolni, a 8 forintot rendszerint így fizetjük, hogy 10 Ft-ot adunk, s a boltos visszaad 2 Ft-ot.

Ezt a változatot azonban *a számítás könnyítésére csupán a második osztálytól kezdve alkalmazzuk*, amikor tulajdonképpen ilyen formában kerül sor a felhasználására:

$$47 + 28 = 47 + 30 - 2 = 77 - 2 = 75, \text{ vagy:}$$

$$47 - 28 = 47 - 30 + 2 = 17 + 2 = 19.$$

Rendszerint nagy érdeklődéssel fogadják a gyerekek a második osztályban egy *harmadik változat* bemutatását is. Ezt a szorzótáblák megtanítása után szoktuk megmutatni.

Az eljárás lényege a következő: A szorzás fogalmával és a szorzótáblákkal együtt sokat gyakoroljuk az egyenlő tagból álló párokat; az  $5+5$ ,  $6+6$ ,  $7+7$ ,  $8+8$ ,  $9+9$  összeadásokat. Ezután vegyék észre a gyerekek, hogy minden ilyen „nehéz” tizesátlépéses összeadás, mint pl. a  $7+8$ , vagy  $9+7$  stb. a fentiekből származtatható. Ha ugyanis  $8+8=16$ , akkor  $8+9$  nyilván eggyel több, tehát 17. A százas körben való alkalmazást is szívesen fogadják a gyerekek. Itt azonban meg kell tanulni előbb a  $15+15$ ,  $25+25$ ,  $35+35$ ,  $45+45$  párok összegét, majd ezekre vezethető vissza nemcsak a  $35+36$ -hoz hasonló összeadás, de még a  $34+37$ -szerű eset is. Az egyik eggyel kevesebb, a másik 2-vel több, mint 35, tehát az eredmény 71.

Ez nem tantervi követelmény, de a gyakorló órák anyagát nagyszerűen színezi, s a gyerekek igen hálásak az ilyen „trükkök”-ért. Ez megmozgatja őket, s éppen erre van szükség a rugalmas gondolkodás kialakításához.

Ki ne venné észre, hogy a gondolkodásra nevelés szempontjából mennyire jelen-

tősek az ilyen *elemzések, összehasonlítások, módosítások*. Az eszköz jellegű eljárások variálását azonban mindig *csak akkor* tartjuk megengedettnek, amikor egyféle módon a *készség* már kifejlődött, hiszen ezeket a számításokban rutinosan, szinte automatikusan kell alkalmaznia a tanulóknak, hogy a gyakorlati problémák megoldásánál energiáját ne a számítási eljárások mikéntjére, hanem a tényleges feladatmegoldásra tudja összpontosítani.

Ugyanez a véleményünk a *mértékegységek váltásának*, vagy az *írásbeli szorzás tanításánál* a részletszorzatok leírásának módjával kapcsolatos vitában. Helyesnek tartjuk megmutatni a negyedik osztályban gyakorló órákon a részletszorzatok aláírásának azt a módját is, amikor mindig a szorzó megfelelő helyértékű jegye alatt kezdünk, vagy az angol iskolákban használatos módot is, amikor a szorzandó, szorzó és részletszorzatok mind helyérték szerint egymás alá kerülnek. Ezt is azonban csak az érdeklődés felkeltésére, a gondolkodás aktivizálására tesszük. A folyamatos készségfejlesztésnél *semmi esetre sem térhetünk el a tantervi előírástól*.

A gondolkodásra nevelés szempontjából más elvek vezérelnek bennünket a tantervi anyag másik részénél, a *problémamegoldásoknál*, szöveges feladatoknál. Itt nem taníthatunk típusmegoldásokat, megoldási sablonokat. A feladatok feltételeinek elemzésénél a gondolkodási műveletek változatos alkalmazására törekszünk. *Itt már a gondolatmenet indokolása is minden alkalommal követelmény*, és ezzel a logikai megoldás megkeresése, megfogalmazása. Örülünk annak, ha ilyen feladatot többféle módon is meg tudnak oldani a gyerekek, s a többféle megoldási javaslatból közösen kiválasztjuk a legegyszerűbbnek látszót. Törekszünk a feladatok feltételeinek variálására is, mint ahogyan azt egy fentebbi problémával kapcsolatban megvizsgáltuk.



ERHARDT IMRE

Tanárképző Főiskola, Pécs

## Javaslatok a hetedik osztályos közelítő számítások tanításához

A tantervi reform során a külföldi országokhoz hasonlóan nálunk is bevezetésre kerültek a közelítő számítások.\* A kísérlet célja az volt, hogy tájékoztatást nyújtson arról, hogy a közelítő számításoknak az új tantervbe megjelölt keretei hogyan tölthetők meg tartalommal a tanulók túlterhelése nélkül. Négy év kísérleti munkájából a 7. osztályos anyaggal kapcsolatban — a túlterhelés elkerülését és az eredményes oktatást figyelembe véve — az alábbi tapasztalatokat szereztük, és ezek alapján a tanítás tervezésénél a következőket javasoljuk:

1. A hetedik osztályos anyag megértésének feltétele hogy az év eleji ismétlésnél a közelítő pontosságú számok és mennyiségek fogalmát, összeadását és kivonását egy, de lehetőség szerint két órában 3 fő részre tagolva végezzük el.

a) *Első főrész:*

A közelítő értékek fogalmának kialakításával kapcsolatos ismeretek és jelölések. Ezen belül:

\* A bevezetést az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Tanszéke által irányított kísérletek előzték meg. A kísérletezésben a Pécsi Tanárképző Főiskola Gyakorló Iskolájának egy osztálya is részt vett.