tősek az ilyen *elemzések, összehasonlítások, módosítások*. Az eszköz jellegű eljárások variálását azonban mindig *csak akkor* tartjuk megengedettnek, amikor egyféle módon a készség már kifejlődött, hiszen ezeket a számításokban rutinosan, szinte automatikusan kell alkalamznia a tanulónak, hogy a gyakorlati problémák megoldásánál energiáját ne a számítási eljárások mikéntjére, hanem a tényleges feladatmegoldásra tudja összpontosítani.

Ugyanez a véleményünk a *mértékegységek váltásának*, vagy az *írásbeli szorzás tanításánál* a részletszorzatok leírásának módjával kapcsolatos vitában. Helyesnek tartjuk megmutatni a negyedik osztályban gyakorló órákon a részletszorzatok aláírásának azt a módját is, amikor mindig a szorzó megfelelő helyértékű jegye alatt kezdünk, vagy az angol iskolákban használatos módot is, amikor a szorzandó, szorzó és részletszorzatok mind helyérték szerint egymás alá kerülnek. Ezt is azonban csak az érdeklődés felkeltésére, a gondolkodás aktivizálására tesszük. A folyamatos készségfejlesztésnél *semmi esetre sem térhetünk el a tantervi előírástól.*

A gondolkodásra nevelés szempontjából más elvek vezérelnek bennünket a tantervi anyag másik részénél, a *problémamegoldásoknál*, szöveges feladatoknál. Itt nem taníthatunk típusmegoldásokat, megoldási sablonokat. A feladatok feltételeinek elemzésénél a gondolkodási műveletek változatos alkalmazására törekszünk. *Itt már a gondolatmenet indokolása is minden alkalommal követelmény*, és ezzel a logikai megoldás megkeresése, megfogalmazása. Örülünk annak, ha ilyen feladatot többféle módon is meg tudnak oldani a gyerekek, s a többféle megoldási javaslatból közösen kiválasztjuk a legegyszerűbbnek látszót. Törekszünk a feladatok feltételeinek variálására is, mint ahogyan azt egy fentebbi problémával kapcsolatban megvizsgáltuk.

ERHARDT IMRE
Tanárképző Főiskola, Pécs

Javaslatok a hetedik osztályos közelítő számítások tanításához

A tantervi reform során a külföldi országokhoz hasonlóan nálunk is bevezetésre kerültek a közelítő számítások.* A kísérlet célja az volt, hogy tájékoztatást nyújtson arról, hogy a közelítő számításoknak az új tantervbe megjelölt keretei hogyan tölthetők meg tartalommal a tanulók túlterhelése nélkül. Négy év kísérleti munkájából a 7. osztályos anyaggal kapcsolatban — a túlterhelés elkerülését és az eredményes oktatást figyelembe véve — az alábbi tapasztalatokat szereztük, és ezek alapján a tanítás tervezésénél a következőket javasoljuk:

1. A hetedik osztályos anyag megértésének feltétele hogy az év eleji ismétlésnél a közelítő pontosságú számok és mennyiségek fogalmát, összeadását és kivonását egy, de lehetőség szerint két órában 3 fő részre tagolva végezzük el.

a) *Első főrész:*

A közelítő értékek fogalmának kialakításával kapcsolatos ismeretek és jelölések. Ezen belül:

* A bevezetést az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Tanszéke által irányított kísérletek előzték meg. A kísérletezésben a Pécsi Tanárképző Főiskola Gyakorló Iskolájának egy osztálya is részt vett.

— Kisebb, nagyobb egyenlő fogalmának ismétlése, és az összehasonlítások felírása színbolumokkal.

— Fokozottabb gondolkodást igénylő összehasonlítások végzése. Pl. kipontozott — hiányzó számjegyekből álló — számok összehasonlítása, mint x 6x; 6xx stb.

— Olyan közelítések elvégzése, amikor a mérendő nagyság pontos értéke nagyobb a mérendő nagyság közelítő értékénél, amikor a mérendő nagyság pontos értéke kisebb a mérendő nagyság közelítő értékénél. (Ezzel az abszolút hiba fogalmát is előkészítjük).

— Meg kell értetni tanulóinkkal, hogy pl. 5,00 azt jelenti, hogy a mérés az 5,005 és a 4,995 közé esik. (4,995<5,00<5,005).

— Feladatokon keresztül érzékeltessük, hogy a közelítő érték utolsó számjegyét kétféleképpen kaphatjuk meg:

A megadott helyiértéknél kisebb helyiértékű számjegyek elhagyásával.

A kerekítési szabály alkalmazásával.

Mutassunk rá a két eljárással kapott hiba nagyságára. A tanulók észreveszik, hogy az utóbbi módon kapott közelítő érték hibája nem haladhatja meg az utolsó számjegy helyi értékének felét, míg az előbbi módon nyert közelítő érték hibája elérheti, de nem haladhatja meg az utolsó számjegy helyi értékét.

— Az értékes számjegy fogalmának tisztázása érdekében példákon keresztül értessük meg tanulóinkkal, — s ne csak szavakban mondják el, — hogy egy szám utolsó értékes számjegyének nevezzük, azt a számjegyet, amely balra áll azoktól a nulláktól, amelyek a szám végén az ismeretlen, vagy az elhagyott számjegyek helyén állnak, első értékes jegynek nevezzük balról jobbra haladva az első 0-tól különböző jegyet. Az első és az utolsó értékes jegy közé eső számjegyek mind értékesek. Értessük meg, hogy lehet a „0" is értékes jegy. Pl. 8904 cm $\sim$ 8900 cm esetén a tizesek helyén álló „0" is értékes jegy.

b) *Második főrész:*

Összeadás és kivonás közelítő értékű természetes számokkal és tizedes törtekkel. Mivel a szorzás indoklásánál erre kell építenünk, ezért ismétléssel a tanterv által kívánt jártassági szintet el kell érnünk.*

Tapasztalatunk szerint a legtöbb probléma a kiigazítással kapcsolatos. A tanulók kb. 40%-a nem értette, hogy minden összeadandóból miért hagyjuk el azokat a számjegyeket, amelyek a legkevésbé pontos tag legkisebb helyiértékű értékes számjegyétől jobbra állnak. Magyarázzuk meg, hogy azoknak a helyiértékeknek megfelelő számjegyeket tartjuk meg, amely helyiértékekre minden megadott szám értékes számjeggyel rendelkezik.

Alapos diszkusszióval a megértést segíthetjük és beláttathatjuk, hogy nem mindegy, hogy a kerekítési szabályt hogyan alkalmazzuk! Pl.

$$\begin{array}{r} 28\,900 \\ 550 \\ 260 \\ +\ 2\,950 \\ \hline \end{array}$$

Összeadásnál a tizesek számát összeadva 16 tízest, azt kerekítve 2 százast kapunk. Így az eredmény 32 700 lesz, de ha minden tagot kerekítek százas helyiértékűre, akkor az eredmény 32 800 lesz.

$$\begin{array}{r} 28\,900 \\ 600 \\ 300 \\ +\ 3\,000 \\ \hline \end{array}$$

(Az előbbi eljárás a pontosabb).

* Ennek hogyanjára részletes utasítást találunk az 5. osztályok számára írt „Tanári kézikönyvben" és a Pécsi Tanárképző Főiskola 9. számú Módszertani Kiadványában Dr. Huszti Sándornétól.

c) Harmadik főrész: Az átlag számítás. Rövid felújítást kíván. Kapcsoljuk össze méréssel. Mérési átlagok kiszámításával tudjuk legjobban megértetni. (Ilyen felosztással és meggondolásokkal végzett előkészítéssel az ismétlés előtti 52%-os eredményességet 74%-ra sikerült emelnünk.)

2. A közelítő értékek szorzásának tanításakor a szabályelvonáshoz felhasználható indukciós feladatokat 2 részre tagolva 15%-kal jobb eredményt értünk el, mint tagolás nélkül.

— Közelítő értékek szorzásra pontos értékkel pl. Tk. 46. old. 1. p.

— Közelítő értékek szorzása közelítő értékkel. pl. Tk. 47. old. 2. p. 48. old. 3. p.

Az utóbbit a megértés elősegítésére tovább bonthatjuk. Első részben azokat a szorzásokat végezzük el, amelyekben a tényezők különböző számú értékes számjegyeket tartalmaznak, majd azokat, amelyek egyenlő számú értékes számjegyeket tartalmaznak. Mutassuk meg, hogy a különböző számjegyek esetében megállapított törvényszerűség alkalmazható olyan számokra is, amelyek egyenlő számú értékes számjegyeket tartalmaznak. Az új anyag tárgyalásakor az indukciós feladatok alábbi tárgyalásmódját tartottuk legjobbnak:

Az óra új anyag tárgyalási részét probléma felvetéssel — a tankönyv 46. old. a) feladatának felolvasásával — indítottuk. Megkérdeztük: Milyen szám a 16 ezer, az 1,2? Hogyan számítjuk ki, hogy hányan laknak a városban? Milyen számot szorzunk milyen számmal? Eredményül milyen számot kapunk? Ebből adódott a célkitűzés:

A mai órán megtanuljuk, hogyan szorzunk közelítő értékű számokat pontos és közelítő értékű számokkal.

Az új anyag tárgyalását az osztály bevonásával az alábbiak szerint végeztük:

Melyek a 16 ezer határai? (15 500<16 000≤16 500). Ha a 16 ezret pontos értéknek tekintjük, mennyi az 1,2-szerese? (16 000+3200=19 200) Ha a 16 ezer közelítő érték milyen határok közé esik az 1,2 szerese? (15 500 · 1,2<16 000 · 1,2<16 500 · 1,2). A 18 600 és 19 800 közé eső számokról mit állíthatunk?

Hány értékes számjegy volt a szorzandóban? Milyen szám volt a szorzó? Hány értékes jegy lett a szorzatban?

Végezzük el a szorzást úgy is, hogy a 16 000-et megszorozzuk a pontosnak tekintett 1,2-del. Írjuk kérdőjellel azokat a számjegyeket, amelyekről nem tudjuk pontosan, hogy mivel egyenlők!

```
16 ? ? ? · 1,2
 3 2 ? ? ?
-----------
19 ? ? ? ?
```

Ha tizeddel szorzok egyest, eredményül milyen helyi értékű számot kapok? (Tizedet). Így minden egyes részletszorzathoz tartozó számjegy értékét megállapítjuk. Majd megkérdezzük: Hogyan adunk össze közelítő értékű számokat? Melyik a legkevésbé pontos érték? (16 000). Miért? (Mert a százasok alaki értékét sem ismerjük). Tehát a szorzat értéke mivel egyenlő?

Hány értékes számjegy volt a szorzandóban? Hány értékes számjegy lett a szorzatban?

Vizsgáljuk meg, hogyan szorzunk közelítő értékű számot közelítő értékűvel, amelyben az értékes számjegyek száma különböző! (A tankönyv erre az indukciós feladatok között nem tárgyal példát).

```
0,143? · 0,45?
---------------
  572?
  715?
   ????
---------------
0,064????
```

0,4-del szorozva tízezreddel mit mondhatunk; (Nem tudjuk mennyi lesz (Jelöljük kérdőjellel, stb.) A részszorzatok összeadását hogyan végezzük el? (A legkevésbé pontos taghoz igazodva). Melyik részletszorzatot tekintjük legkevésbé pontos tagnak? (????)

Hány értékes számjegyünk volt a szorzandóban ?(3) A szorzóban ?(2) Hány értékes számjegy lett a szorzatban ?(2) Még egy hasonló feladat feldolgozása után az elvonást a következő kérdések alapján végezhetjük!

Hogyan szorzunk eltérő pontosságú közelítő értékeket? (Az eredményben hány értékes számjegyet kell megtartanunk? (Amennyit a kevésbé pontos szám tartalmaz). Melyik számot tekintjük itt kevésbé pontosnak? (Amelynek kevesebb értékes számjegye van).

Ezt követően feldolgoztuk a tankönyv 2. indukciós feladatát az előzőekhez hasonlóan. Megállapítottuk, hogy a négyzet területe 8,1225 és 8,7020 közé eső érték. Megbeszéltük, hogy ha több értékünk van, hogyan állapítjuk ebből meg a viszonylagosan való értéket.

Kiszámítottuk a két érték számtani közepét, majd elvégeztük a 2,9 ? · 2,9? szorzást. Megállapítottuk, hogy mekkora hibát követünk el, ha a 2,9-et pontos értéknek tekintjük, s megbeszéltük, miért nem lehet a 8,41 cm^2-ben az egy század pontos érték.

(Itt készüljünk fel arra, hogy a tanulók felvethetik, hogyha a kérdőjel helyén 4-es számjegy áll, akkor a tankönyvi három kérdőjel nem jó, azaz az utolsó szorzat lesz a legkevésbé pontos tag, s így a 8,4-ben a négy tized értékre is bizonytalan érték).

Elvégeztük az általánosítást, hogy hogyan szorzunk egyenlő értékes számjegyet tartalmazó közelítő értékeket, és az eredményt összehasonlítottuk az előző megállapításunkkal. (A különböző értékes számjegyet tartalmazó tényezők esetében kapott eredménnyel.

Az osztály adottságaitól függően, — ha lehetőségünk van rá — mutassuk be, — a tankönyv 48. oldalán található 3. indukciós feladat segítségével — ha a szorzatban „n" számú értékes jegyet akarunk kapni, akkor jó a szorzást „n+1" jegyre elvégezni, így pontosabb értéket kapunk.

Pl. 3,4 · 3,4=11,6 ahol két értékes számjegy van a tényezőkben és a szorzatban mégis 3 jegyet hagytunk éppen a pontosság miatt. Bragyisz a 10,49 · 9,949 példával kimutatja, hogy a közelítő értékek szorzásánál az eredményül kapott utolsó számjegy elég nagy hibát tartalmazhat.

3. A közelítő értékű számok osztásának tanítását is két részre tagoltuk:

a) Az osztandó és az osztó nem egyenlő számú értékes számjegyet tartalmaznak.

b) Az osztandónak és az osztónak azonos számú értékes számjegye van.

A tankönyv feladatai az *a)* esetre vonatkoznak. A *b)* esetre fogalmazzunk feladatot. Pl.: Egy 1,15 hosszú acélszalag tömege 6,16 kg. Hány kg 1 m hosszú szalag tömege? stb. A közelítő számok osztását feldolgozó óra új anyag tárgyalási részét az alábbi vázlat alapján dolgoztuk fel:

Feladat:

Egy drótból 2,6 cm-es darabokat vágnak le mm pontossággal. Milyen határok közé esik a drótdarabok hossza. (2,55 cm<h<2,65 cm). Ha 25 db-ot vágunk le, a 25 db együttes hossza milyen határok közé esik?

2,55 cm · 25<együttes hosszúság<2,65 · 25 cm
63,8 cm <együttes hosszúság<66,3 cm

Problémafelvetés

67,7 cm hosszúnak mért dórtdarabból hány 2,6 cm-es drótdarabot vághatunk le?

65,7 : 2,6

Milyen számokkal kell osztást végezni?

Célkitűzés: A mai órán a közelítő értékű számokkal való osztással foglalkozunk.

Osztás közelítő értékű számokkal:

Hány db drótot tudtunk levágni 65,7 cm drótból, ha a levágandó drót hossza 2,6 mm?

65,7 · 2,6=657 : 26=25
197
7

Miért nem megbízható maradék a 7?

Milyen határok közé esik az osztandó, az osztó?

65,65 cm<osztandó<65,75 cm
2,55 cm<osztó < 2,65 cm

Mi történik a hányadossal, ha az osztandót növeljük, ha csökkentjük; ha az osztót növeljük, ha az osztót csökkentjük? Mikor kapjuk a legkisebb; a legnagyobb hányadost?

legkisebb: 65,65 : 2,65=24,7
legnagyobb: 65,75 : 2,55=25,7

A levágható drótdarabok száma milyen határok között ingadozhat? Tehát az első hányadosban a 2. számjegy, az ötös milyen számjegy? A 65,7 cm és 2,6 cm közül melyik mennyiség a kevésbé pontos? Hány értékes jegyet tartalmaz? Hány értékes jegyet érdemes a hányadosban számítani?

2. A puska lövedéke 620 m-t tesz meg másodpercenként. Mennyi idő alatt tesz meg 1000 m-t?

1000 : 620=1,6 (sec)
3800
080

Milyen számokkal végeztünk osztást?

Milyen mértékben kerekített az 1000 m? (tízesekre)

Hány értékes jegye van?

Hány értékes jegye van a 620 m-nek?

Vizsgáljuk meg, milyen határok közé esik a megtételhez szükséges idő?

995 : 625=1,57
1005 : 615=1,63

Az 1,6 (sec) milyen eredmény tehát?

Hány jegyet érdemes kiszámítani?

Vizsgáljuk meg, mindkét feladatban hány értékes jegyet tartalmaz a kevésbé pontos szám! Vizsgáljuk meg, hány értékes jegyet számítottunk a hányadosban!

Általánosítás: Hogy végezzük el a közelítő számokkal az osztást? Ha az egyik (szám) tényező pontos, hány értékes jegyet számoljunk a hányadosban?

4. A Matematika szakkörön bemutathatjuk a rövidített szorzás egy eljárást (mechanizmusát), valamint a megszabott pontosságú osztások elvégzését.

a) a rövidített szorzás:

0,2862 · 378
873

A szorzót fordított sorrendben írjuk a szorzandó alá úgy, hogy a szorzó egyes helyiértékű jegye a szorzandónak azon helyiértékű számjegye alá kerüljön, amilyen pontosságúnak választom a szorzatot. (Jelen esetben a közelítő érték 4 pontos jegyet tartalmaz, a szorzat utolsó számjegye tized lesz, 8 egyes · 2 tized éppen tizedet ad).

0,2862 · 378
873
858
1
859

A szorzást pl. a fordított sorrendben felírt szorzó utolsó számjegyével kezdjük. (Jelen esetben 3-mal). A fordított sorrendben felírt szorzó jegyeivel a szorzandó fölötte és tőle balra álló jegyeit szorozzuk: pl. 6 · 3; 8 · 3; 2 · 3; Mivel azok adják az egyes, tizes, százas helyiértékű jegyeket. (Előbb meg kell néznünk, hogy a századpontosság miatt nem kell-e kiegészítést alkalmazni. 3 százas 2 tízezred = 0,06, tehát ~ 0,1; a 8 tizedet 1 tizeddel ki kell egészíteni.

0,2862 · 378
873

859
200
22

108,1

Így tovább folytatva a részlet szorzatok jegyét egymás alá írjuk és összeadjuk.

Ezen eljárás áttekintéséhez a helyi érték biztos tudása a feltétel. Hibaként előfordul, hogy az aláírt szorzótól jobbra eső szám szorzatának kerekített értékét nem vesszük figyelembe.

Érdemes megmutatni a tanulóknak, hogy nem szükséges a szorzó legnagyobb helyiértékű számjegyével kezdeni a szorzást. Bármelyikkel kezdhetjük, az eredmény ugyanaz lesz. A tanulók azért kedvelik ezt a formát, mert a részletszorzatoknál nem kell a helyiértékeket figyelembe venni.

b) A megszabott pontosságú osztásokat a csonkított részlet maradékok segítségével végezhetjük el az alábbiak szerint:

1. Megállapíthatjuk a gyakorlat igényének megfelelően, hogy hány értékes jegyre van szükségünk a hányadosban.

2. Az osztóból annyi jegyet tartunk meg, mint ahány értékes jegyből áll a hányados. Az osztandóból annyit, hogy el tudjuk kezdeni az osztást (az az a kijelölt osztó legalább egyszer, de legfeljebb 9-szer meglegyen benne).

3. Kiszámítjuk a hányados első jegyét. Megállapítjuk a maradékot.

A maradék lesz az új osztandó. Az osztó utolsó számjegyét elhagyva kapjuk az új osztót. (Az elhagyott jegyből kerekítünk). Az eljárást addig folytatjuk míg marad jegy az osztóban pl.

65,225 000 000 1 : 5,3422 = 12 209389. Osztást ezred pontossággal.
11 803 0
1 118 60
50 1600
2 08020
477540
501641
20843

65,225 : 53422 = 1
11 803

11803 : 53422 = 2
1119

1119 : 53422 = 2
=15

51 : 53422 = 0

51 : 53422 = 9. tehát 65, 225 : 53442 = 12,209

A közelítő értékek tanításakor az indukciós anyag segítségével eljutunk a szabályok megfogalmazásáig, de igazán az a tanuló érti meg a közelítő értékekkel való műveleteket, aki alkalmazza azt munkájában. Ezért tanításkor a hangsúlyt, ne a szabályok elmondására, hanem az alkalmazásra helyezzük. Így tanítva a közelítő számításokat a tanulók belátják, hogy a közelítő számítások hidat képeznek az elemi matematika és annak alkalmazott kérdései között és alapot szereznek a középiskolai a közelítő számítások tanulásához.