

## A természetes számok tanítása az általános iskola 5. osztályában

Az 5. osztályos általános iskolai tankönyv kéziratában Kelemen Jánosné és Mosonyi Kálmán kidolgozott egy új eljárást a természetes számok tanítására. Ez az eljárás változatlan tananyagot teljesen új csoportosításban tárgyalta volna. A bírálók az eljárást figyelemreméltó elgondolásnak minősítették, de kipróbálás, kellőszámú kísérlet eredményének ismerete nélkül az egész országra kiterjedő mértékben való bevezetését nem javasolták, így a tankönyv az eddig szokásos csoportosításban tárgyalja a természetes számokat.

A bírálók óvatossága teljes mértékben indokolt kipróbálatlan újításokat bevezetni nem vallana komoly felelősségérzetre. Az új eljárást előbb kísérletileg meg kell vizsgálni, hiszen a módszertani újítások próbája mindig a gyakorlat, s bevezetésüket csak akkor lehet elhatározni, ha jogosultságuk, életképességük kísérletileg igazolva van. Ezért határoztuk el, hogy az elgondolást — amely nem írászтал mellett felvetődött ötlet volt, hanem sok évi tapasztalat leszűrt eredménye — kísérletileg kipróbáljuk, s amennyiben a kísérlet döntően pozitív eredménnyel zárulna, az elgondolást nyilvánosságra hozzuk.

A Tanterv által előírt anyagon semmit sem változtattunk, az újítás lényege az anyag más csoportosítása. A természetes szám fogalmának és alaptulajdonságainak felújítása után *egy tanítási órán* újítjuk fel a négy alpműveletet, majd a feladatok megoldását, a műveletek gyakorlását, ellenőrzését, egymással való kapcsolatát párhuzamosan végezzük a négy alpművelettel. Elhagyjuk tehát azt a hagyományos gyakorlatot, hogy több tanítási órán át csak összeadást, csak kivonást, csak szorzást, csak osztást tanítunk: a mi elgondolásunk szerint a gyakorlás és az alkalmazás végig párhuzamosan halad. A műveletek egymással való kapcsolatának tanításánál a műveletek hagyományos sorrendjét is megváltoztattuk, hogy az összeadás és szorzás illetve a kivonás és az osztás azonos tulajdonságait az eddigieknél plasztikusabban mutathassuk be a gyermeknek.

Az újítás célja természetesen a munka eredményesebbé tétele. Részletezve ezt a célt az újítás lehetőséget ad a tanárnak, hogy mind a négy alpműveletet — tehát az osztást is! — már az év elején felújíthassa, s az egyes műveletek gyakorlására fordított időt bármikor az osztály tudásának megfelelően határozhassa meg, s ha szükséges, eredeti tervét menet közben módosíthassa. Az eddigi gyakorlat különösen az osztással bántik mostohán, hiszen későn kerül rá a sor, s ha az osztási órán elő is fordulnak más műveletek a feladatok megoldása során, pl. az összeadási és kivonási órán osztási feladat nem fordul elő még véletlenül sem. Így — még ha a tanár évek tapasztalata alapján óvatos is volt, s tananyagbeosztásában több időt is hagyott az osztásra — az osztály, amely számolástechnikailag a legnehezebb a négy alpművelet közül a gyermek számára, gyakran begyakorlatlan maradt.

Az eddigi gyakorlat mellett könnyen előfordulhatott, hogy a gyermek már a feladat feladása előtt tudta, hogy milyen művelettel fogja megoldani, hiszen azon a héten a szorzást tanulták, tehát — függetlenül attól, hogy mi lesz a feladat szövegében — tudta, hogy ma szorozni fog. A párhuzamos tárgyalás ezt a gondolkodási restséget eleve lehetetlenné teszi, rákényszeríti a gyermekek közül a kényelemre hajlamosakat is, hogy minden feladat szövegét elemezzék, keressék a mennyiségek közötti összefüggéseket, s

azok felismerése alapján készítsék el a megoldási tervet, határozzák el a végzendő műveletet.

A javasolt csoportosítás lehetővé teszi a függvényszerű gondolkodás fejlesztésének eredményesebbé tételét is azzal, hogy az eddiginél jóval kedvezőbb lehetőséget ad az összehasonlításokra. A műveletek külön-külön való tanítása esetén ugyanis pl. a műveletek eredményének változása a komponensek változásakor a legjobb tanítás mellett is menthetetlenül „függelék-jellegű” lesz, olyan valami, amit úgy melleleg megnézünk.

Ha viszont együtt vizsgáljuk a négy alpműveletnél, az összehasonlítás segítségével sokkal mélyebb ismeretet nyújthatunk. Megállapítja a gyermek, hogy pl. a komponensek növelése a két direkt műveletnél növeli az eredményt, a két indirekt műveletnél viszont attól függ, melyik komponenst növeltük. Az ismeret így már megszerzésekor is mélyebb lesz, megjegyzése, rögzítése könnyebben megy, s tartósabb eredményre vezet.

Mindezek azonban csak előzetes feltevések voltak, kísérletünknek éppen annak az eldöntése volt a feladata, hogy mit mond az elképzelésünkre a gyakorlat. A kísérletet a Szegedi Tanárképző Főiskola I. sz. Gyakorló Általános Iskolája 5/b osztályában Süli Dezső szakvezető tanár hajtotta végre 1966. szeptembertől decemberig. Elkészítettük a tananyagbeosztást, stencillel sokszorosítva minden gyermek megkapta a kísérletnek megfelelően csoportosított anyagot tankönyvszerű feldolgozásban, csak éppen a képek és a rajzok hiányoztak. Nagyon gondosan ügyeltünk arra, hogy az a tény, hogy saját elgondolásunkat próbáljuk ki, ne befolyásolja a kísérlet eredményét: nem fordítottunk több tanítási órát, több energiát a tanításra, mintha a tanítás hagyományos módszerrel történt volna, a gyermek megterhelése sem volt nagyobb, mint a kísérlet nélkül lett volna. A kontrollt biztosítottuk azzal, hogy Süli Dezső az előző iskolai évben hasonló összetételű és képességű osztályban hagyományos módszerrel tanította ugyanezt az anyagot, s az ott nyert tapasztalata volt az összehasonlítás fő bázisa. A kísérlet végén pedig olyan iskolai dolgozatot íratott, amelynek feladatai az előző iskolai évben is szerepeltek az említett osztályban.

Gondosan feljegyeztük teljes részletességgel elgondolásunk eredményeit, még azokat az észrevételeket is összegyűjtöttük, amelyek nem tartoznak szorosan a kísérlet anyagához, de a munka további javítása szempontjából hasznosak lehetnek. Mivel előzetes kísérlet nélkül dolgoztunk, a tananyag előzetes időben felosztását is rugalmasan kezeltük, megengedve magunknak az esetleges menet közbeni változtatásokat.

A kísérleti anyag vázlatos feldolgozását az alábbiakban közöljük, s feltüntetjük nagy vonásokban az előre tervezett időbeosztást is:

### 1. rész.

### I. A TERMÉSZETES SZÁMOK

Szeptember

#### 1. *A természetes számok.*

1. hét.

Számlálás, nagy számok elképzelése.  
Tárgyak csoportosítás 10—100-val. Átváltás.  
7 feladat.

#### 2. *Tízes számrendszer. Alaki és helyi érték.*

Számok csoportosítása 10—100-val.  
Nagy szám elemzése. Nagy szám összerakása.  
Tízes számrendszer. Számok elemzése.  
Alaki és helyi érték. Nagysági vizsgálatok.  
Lehetséges más csoportosítás is. Más számrendszer is.  
Helyiérték-táblázat. Elemzés.  
12 feladat.

2. hét.

3. *A számok nagysága.*

Nagysági összehasonlítás: a) 12 324 és 8246, b) 7942 és 8124, c) 23 436 és 23 491, d) hat szám sorbaállítása. 10 feladat.

4. *Becslés, kerekítés.*

Becslés jelentősége a gyakorlatban.  
Szám kerekítése. (Iskolai létszám 500 körül)  
Népszámlálási és gazdasági adatok.  
Mikor szabad és mikor tilos kerekíteni?  
Kerekítés 10, 100, 1000-re.  
15 feladat.

2. rész.

II. MŰVELETEK TERMÉSZETES SZÁMOKKAL

3. hét.

1. *A négy alpművelet.*

Összeadás. Tag, összeg.  
Kivonás. Kisebbitendő, kivonandó, különbség.  
Szorzás. Tényező, szorzat.  
Osztás. Osztandó, osztó, hányados.

2. *Szóbeli és írásbeli műveletek.*

Szóbeli összeadás. (Tárgykör: úttörők pénze)  
Írásbeli összeadás. (Tárgykör: úttörővasút utasai)  
Szóbeli kivonás. (Tárgykör: egy diófa termése)  
Írásbeli kivonás. (Tárgykör: almatermés, értékesítés)  
Szóbeli szorzás. (Tárgykör: cipővásárlás)  
Írásbeli szorzás. (Tárgykör: ruhavásárlás)  
Szóbeli osztás. (Tárgykör: átlagszámítás: 396:3; 441:3)  
Írásbeli osztás. (Tárgykör: munkabrigád jövedelme)  
52 feladat, többségében szöveges.

4. hét.

3. rész.

Október

3. *Mértékegységek.*

1. hét.

Hosszúságmérés. Méter és részei. Kilométer. Mérőeszközök. Mértékegység, mérőszám. Példák változásokra.  
Ürmértékek. Liter és részei. Hektoliter. Mérőeszközök. Mértékegység, mérőszám. Példák változásokra.  
Tömegmérés. Mértékegységek, mérőeszközök. Különböző mérlege.  
Mértékegység, mérőszám. Példák változásokra  
Pénz.  
51 feladat.

2. hét.

3. hét.

4. *Szorzás, osztás kerek számmal.*

Három szöveges példa: szorzás 10-, 100-, 1000-rel.  
Három szöveges példa: osztás 10-, 100-, 1000-rel.  
18 feladat szöveg nélkül.

4. hét.

5. *Időmérés.*

Óra, perc, másodperc. Menetrend, sportverseny, stopperóra.  
Nap, hét, hónap, év.  
31 feladat.

6. *Mennyiségek ábrázolása. Számegyenes.*

Mennyiségek jelölése egyenes szakaszokkal.  
Számok jelölése. Számegyenes.  
10 feladat.

4. rész.

November

1. hét.

7. *A műveletek alaptulajdonságai.*

Felcserélés. (Összeadás, szorzás) Szöveges példán.  
Társítás. (Összeadás, szorzás) Szöveges példán.  
5 feladat.

8. *Műveletek ellenőrzése.*

Kivonás ellenőrzése összeadással és megfordítva.  
Szöveges példán.  
Szorzás ellenőrzése osztással és megfordítva. Szöveges példán.

2. hét.

9. *Elvégezhető-e a művelet?*

Összeadás és szorzás mindig.  
Kivonás.  
Maradék nélkül és maradékos osztás. 0-val nem lehet osztani.  
11 feladat.

5. rész.

3. hét.

10. *Hogyan változik a műveletek eredménye?*

A/1. Tárgykör: gyümölcsös.  
Összeadás: a) egyik tag növelése, b) mindkét tag növelése.  
Szorzás: a) egyik tényező növelése, b) mindkét tényező növelése.

A/2. Tárgykör: gyümölcszedés, értékesítés.  
Kivonás: a) kisebbítendő, b) kivonandó növelése.  
Osztás: a) osztandó, b) osztó növelése.

B/1. Tárgykör: textilüzlet.  
Összeadás: a) egyik tag csökkentése,  
b) mindkét tag csökkentése.  
Szorzás: a) egyik tényező csökkentése,  
b) mindkét tényező csökkentése.

B/2. Tárgykör: textilüzlet.  
Kivonás: a) kisebbítendő, b) kivonandó csökkentése.  
Osztás: a) osztandó, b) osztó csökkentése.

4. hét.

C/1. Összeadás: tagok változnak, összeg nem.  
Szorzás: tényezők változnak, összeg nem.  
Szöveges példák.

26 feladat (csak 4 szöveges)

Képes összefoglaló a műveletek eredményének változásáról.

December

11. *Műveletek összeggel, különbséggel, szorzattal.*

Összeg hozzáadása, kivonása, szorzása, osztása.  
Tárgykör: úttörőélet.

A célszerűség erős hangsúlyozása.  
Numerikus példákhoz szöveg készíttetése.  
Különbség hozzáadása, kivonása, szorzása, osztása.  
Tárgykör: utazás.

A célszerűség erős hangsúlyozása.  
Numerikus példákhoz szöveg készíttetése.  
Szorzat szorzása, osztása.

2. hét.

Tárgykör: munka, jövedelem.  
A célszerűség erős hangsúlyozása.  
19 szöveg nélküli és 11 szöveges feladat.  
Képes összefoglaló.

Két szám kiszámítása összegükből és különbségükből.  
 Három szám kiszámítása részösszegükből.  
 Két szám kiszámítása összegéből és változott összegéből.  
 Két szám kiszámítása összegéből és arányából.  
 Kiküszöböléssel megoldható feladatok.  
 Helyettesítéssel megoldható feladatok.  
 Feltevésével megoldható feladatok.  
 Numerikus feladatoknál hiányzó számjegyek pótlása.  
 Numerikus feladatoknál szorzási érdekességek.

A kísérlet végrehajtásában semmi zavaró körülmény nem befolyásolta az eredményt. A sokszorosított kézirat — bő táblai vázlatokkal kiegészítve — jól töltötte be a tankönyv szerepét, kivéve november 4. hetében és december 2. hetében a képes összefoglalót, amit nem lehetett pótolni rajzzal vagy szemléltetéssel. A képes összefoglaló gondolatát az idegen nyelvek tanításának modern könyveiből kívántuk a matematika-tanításba átültetni. (Lásd pl. Eckersley: Essential English c. tankönyvének szemléletes, jól rögződő ábráit.) Például az összeadás eredményének változását három képen ábrázolva foglalja össze: Mindhárom képen kettős villamoskocsi áll. Az elsőn felszállnak az utasok, alatta szöveg: „Ha a tagokat növeljük, az összeg növekszik.” A másodikon leszállnak az utasok, mellette az előbbivel analógszöveg. A harmadik képen az első kocsi két utas leszáll, a másodikra két utas felszáll s a szöveg: „Ha az egyik tagot ugyanannyival növeljük, amennyivel a másikat csökkentjük, az összeg nem változik.” — E képes összefoglaló hatása véleményünk szerint feltétlenül pozitív lenne, s kísérletünk vele együtt még jobb eredménnyel zárult volna.

A kísérlet a fő területeken elérte a célját. Az alsó tagozatban szerzett ismeretek tudatosítása jól sikerült, a műveleti mechanizmusok készséggé szilárdulása, a gyenge tanulóknál a hiányok pótlása igen jó eredménnyel zárult. A szöveges feladatok megoldásakor az osztály aktív volt, a gyermekek a megoldási tervek elkészítésekor erősebb munkára kényszerültek, s ennek az előnyös hatása az eredményben megmutatkozott. A műveletek párhuzamos tárgyalása egyetlen tanítási egységnél sem állította nehézség elé a gyermekeket, nem okozott zavart, igazolta előzetes feltevésünket, hogy a ti. az alsó tagozatból hozott ismeretek lehetővé teszik a tananyag fenti módon való csoportosítását. Külön kiemelkedőnek tartjuk, hogy jól sikerült a II./10. fejezet: Hogyan változik a műveletek eredménye? Itt a tapasztalatunk az, hogy az eredmény sokkal szilárdabb és mélyebb, mint az eddigi tanítási mód mellett.

Tapasztalataink közé tartozik az is, hogy az időbeosztás kissé bőnek bizonyult a tervezésnél óvatosak voltunk, s az egyes anyagrészekre több időt hagytunk, mint amennyire a gyakorlatban szükség volt. Így decemberben az összetett feladatokra több idő jutott, mint amennyit mi terveztünk. A kéziratban összesen 30 feladatot vettünk fel, ennek kb. a háromszorosa volt a gyakorlatban szükség, tehát menet közben kellett bővítenünk.

A kísérlet tehát határozottan pozitív eredménnyel zárult. Egyes pontokon tapasztalatunk alapján kisebb módosításokra van szükség. Ezek a módosítások előreláthatóan még jobbá teszik majd az eredményt, de szükségesnek tartjuk hangsúlyozni, hogy az eredmény ezek nélkül is jó. Az említett írásbeli dolgozatot a jelen kísérleti osztály feltűnő könnyedséggel, jobb számszerű eredménnyel és lényegesen rövidebb idő alatt készítette el, mint az előző évi kontrollosztály.

1. A tárgyak más (nem tizedes) alapon való csoportosítása előbb lenne szükséges, nem a tízes számrendszer kialakítása és rögzítése után. A mi eredeti elgondolásunk az volt, hogy a tízes számrendszer kiépítése után mutatjuk meg, hogy a csoportosítást más alapon is elvégezhettük volna, s ezzel a sorrenddel kiemeljük, hogy — bár a számrend-

szerek elvileg egyenrangúak — a tízes számrendszernek a megszokás és a nemzetközi méretekben való elterjedtség miatt kiemelt szerepe van. A tapasztalatunk viszont arra mutatott rá, hogy így a más csoportosítási lehetőség túlságosan mellékes szerepre szorult, helyesebb eljárás lett volna, ha a különböző csoportosítási lehetőségek közül emeljük ki a tízest, s ugyanígy a lehetséges számrendszerek közül a tízest.

2. Kéziratunkban a tízes számrendszer tudatosítását egy nagy szám elemzésével kezdtük. Helyesebb lett volna, ha előbb elemeiből felépítünk egy-két számot, s csak azután analizálunk egy nagy számot. Az eljárás azonban így is úgy is analízis-szintézis marad.

3. A számok kerekítésére kidolgozott szöveget menet közben módosítottuk, mert egy példatípus a vártnál nagyobb mértékben volt eredményes. Az I. fejezet feladatai közül kitűnően bevált a következő típus:

1848-nak melyik a természetes számok közül a két szomszédja? A két páros szomszédja? A két tízes szomszédja? A két százas szomszédja? A két ezres szomszédja?

Az ilyen feladatok után a kerekítés már „magától ment”, csak a lefelé és felfelé szavak bekapcsolása jelentett valami kis újat. Az ilyen módon való tanítás megfelel annak az átlagos törekvésünknek, hogy a matematikát ne szabálygyűjteménynek tekintsük, a matematikai problémák, feladatok megoldása gondolkodás útján történjék, nem pedig szabályok alkalmazása után. Amikor ugyanis a 43 879-et 44 000-re kerekítjük, akkor a közelebbi ezres szomszédjával helyettesítjük. Az, hogy a 8-as szám nagyobb az 5-nél, csak külső jele annak a ténynek, hogy a 44 000 közelebb áll hozzá, mint a 43 000.

Szükséges ezen kívül a kerekítésnél a közelítő egyenlőség jelének ismertetése, amiről a tervekészítéskor elfeledkeztünk.

4. Az időmérés egységét indoklás nélkül adtuk meg, s a tanítást a Budapest—Szolnok vasúti menetrend adatainak vizsgálatával kezdtük. Ez az eljárás nem bizonyult célszerűnek, éreztük az indoklás hiányát, menet közben kellett pótolnunk. A menetrend vizsgálatát — tapasztalatunk szerint — célszerűbb lett volna a tárgyalás végére hagyni, s a megtanult időmértékek alkalmazására felhasználni. Ebben az esetben ugyanis a mellékes tényezők (távolságok, gyors és sebesvonatok más jelölése, több vonat, kísérő megjegyzések, csatlakozások) zavaró hatása jobban kiküszöbölhető lett volna.

5. A műveletek ellenőrzése során kiderült, hogy az összeadást kivonással, a szorzást osztással ellenőrizni nem célszerű. (Nem is alkalmazzák a gyakorlatban.) Helyesebb, ha csak az inverz műveleteket ellenőrizzük a direkt műveletekkel, a direkt műveletek ellenőrzése pedig a tagok ill. tényezők felcserélésével történik. Az ellenőrzés összes lehetőségének kihasználására való törekvés a közepeseket is megzavarta, hiszen a homogén elemek időben közeli megjelenése a tudatban a Ranschburg féle gátláshoz vezethet. (L. Műcsinszákja kísérleteit.)

6. A II/11. fejezet (Műveletek összeggel, különbséggel, szorzattal) megírásakor túlságosan körülményesek voltunk, a szöveget menet közben egyszerűsíteniünk kellett.

Szükségesnek tartjuk a kísérlet eredményéről való beszámolóhoz hozzáfűzni még azt a néhány gondolatot, amelyek mintegy melléktermékei kísérletünknek; nem tartoznak szorosan a célunkhoz, az eredményt nem befolyásolják, de a természetes számok tanítása terén figyelemre méltóak.

1. Az írásbeli kivonás felújításánál nem vettük újra a tízes kör átlépésének magyarázatát:

47 118

— 26 545 (A kisebbítendőhöz adunk 10 tízest, a kivonandóhoz 1 százast, majd analóg magyarázat a másik körátlépésénél.) Akár a hagyományos tárgyalási mód mellett maradunk, akár alkalmazzuk a mi új felosztásunkat és csoportosításunkat, tapasztalati alapon el kell dönteni azt a kérdést, hogy a magyarázatnak a tankönyvben

szerepelnie kell-e vagy a tanár oldja meg a kérdést órán magyarázattal. Mi az utóbbi felé hajlunk.

2. A többjegyű szorzóval való szorzásnál kezdhethük a szorzást az egyesekkel is, a legmagasabb helyi értékű számmal is.

$\underline{786 \cdot 228}$	$\underline{786 \cdot 228}$
6288	1572
1572	1572
$\underline{1572}$	$\underline{6288}$
179208	179208

Matematikai szempontból egyik eljárás ellen sem merül fel semmi kifogás, módszertani szempontból is hiba volna a kettő közül bármelyiket is „betiltani”. A formai tényezők azonban a legmagasabb helyi értékű számmal való szorzást előnyösebbé teszik, s tapasztalatunk szerint ezeknél kevesebb is a számolástechnikai hiba. A fenti példákon is látszik, de ha a szorzó nem három jegyű, hanem ennél több jegyű, akkor még feltűnőbb, hogy a leírt művelet az első esetben egy ferdeszögű általános paralelogrammába foglalható be, az utóbbi esetben pedig egy téglalapba. Az egymás alá írás is nehezebb, ha az egyesekkel kezdjük a szorzást, az írás iránya is a megszokással ellentétben jobbról balra halad. Annak hangsúlyozásával, hogy alapvető elvi okokból szó sem lehet arról, hogy csak az egyik „irányt” tanítsuk, a numerikus hibák csökkentése érdekében célszerűnek látszik a második eljárás előnyben részesítése.

3. A szóbeli osztásnál nehéznek bizonyult az osztó szétbontása a következőképpen:  $441:3=?$   $300:3=$   $120:3=$   $21:3=$  . Helyesebb lett volna ugyanazt a logikai utat követni, amelyet az írásbeli osztásnál végeztünk. Ugyancsak nem bizonyult célszerűnek az az eljárás, amikor a kerek számmal való szorzásnál először 10 hatványával szoroztunk.  $3124 \cdot 2000$  szorzásnál a  $3\ 124\ 000 \cdot 2$   $6\ 248\ 000$  út helyett helyesebb a  $6248 \cdot 1000 = 6\ 248\ 000$  út követése.

4. Feladataink között sok volt a mezőgazdasági, kertészeti, stb. jellegű, s kevés a technikai vonatkozású.

Kísérletünk végeredményben határozottan igazolta eredeti elgondolásunkat: az V. osztályban a természetes számok tanításánál a párhuzamos tanítás nemcsak lehetséges, de eredményes is, az ilyen tárgyalásmódból semmi kár sem származik, előny viszont annál több. Természetesen egyetlen kísérlet nem döntő. Mi a saját munkánkat ezzel a kísérlettel befejezettnek tekintjük, s eredményünk nyilvánosságra hozatalával az a célunk, hogy mind a módszertan fejlesztésével hivatalból foglalkozó kartársak, mind a mindennapi munkájuk mellett kísérletezésre kedvet érző, jobb módszerek után kutató kartársak figyelmét felhívjuk ennek a csoportosításnak a lehetőségére és általunk előnyösnek tapasztalt voltára.

