A fogalmak aktív feldolgozásáról, elsajátításáról elmondottakat a következő szavakkal foglalhatjuk össze:

„A fogalmak tanulók általi elsajátításának folyamata nem abból áll, hogy a tanulók megjegyzik a pedagógus által mondott tárgyi sajátosságokat, hanem lényege a tanulók megfeszített munkája a pedagógus irányítása alatt." (4)

Az elmondottak világosan szemléltetik, hogy az ismeretszerzés folyamatában feltétlenül szükség van a tanulók aktivitására. Ez az aktivitás nem korlátozódhatik csak az intellektuális aktivitásra, szükség van a cselekvésekben megnyilvánuló aktivitásra is. Az oktatás folyamán a gondolati tevékenység és a cselekvés szerves egységét kell megvalósítanunk, vagyis az egész személyiség aktivitását.

FELHASZNÁLT IRODALOM:

1. Lénárd Ferenc: A gondolkodás fejlesztése. Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Akadémiai Kiadó. Bp. 1958. 284. old.
2. Zukovits Imre: Az általános iskolai fizika tanításának időszerű követelményei egy tanítási óra tükrében. A fizikatanítás néhány módszertani kérdése. III. OPI. Bp., 1968.
3. Kelemen László: A 10—14 éves tanulók tudásszintje és gondolkodása. Akadémiai Kiadó. Bp., 1963.
4. Okoń: A tanulók fogalmainak kialakítása. Tanuljunk a Szovjet Pedagógusoktól. III. évf. 12. sz.

VARECZA ÁRPÁD
Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

Közönséges törtek összeadása és a halmazok a 6. osztályban

A matematika leglényegesebb fogalmai közé tartozik a halmaz fogalma. Ennek a fogalomnak kialakítására több lehetőség is adódik az általános iskola matematikai anyagának keretei között. A tanulók rendelkeznek a halmaz fogalmához szükséges tapasztalatokkal, így megvan e fogalom kialakításának a reális alapja. Tulajdonképpen találkoznak, foglalkoznak vele — természetes számok halmaza, négyszögek halmaza, háromszögek halmaza stb. —, csak nem emeljük ki kellőképpen — életkori sajátosságok figyelembevételével, s főleg a szemléletesség fokán —, pedig segítségével az összefoglalások, rendszerezések könnyebbé, szemléletesebbé tehetők, s előkészíthetjük a korszerű függvényfogalom kialakítását. Az alábbiakban egy lehetőséget mutatunk be e fontos fogalom kialakítására a 6. osztály anyagával kapcsolatosan.

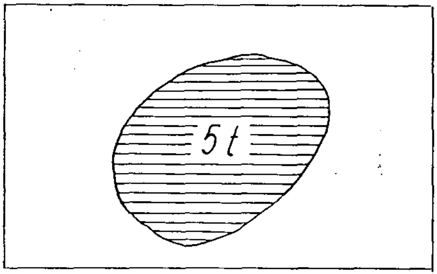
Az 5. osztályban foglalkozunk az egyenlő nevezőjű törtek összeadásával és kivonásával, s a 6. osztályban térünk rá nem egyenlő nevezőjű törtek összeadására. A tanulók ekkor már a törtek bővítésével, egyszerűsítésével és az egyszerűbb oszthatósági szabályokkal megismerkedtek, s ezek után kezdjük a nem egyenlő nevezőjű törtek összeadását, s ehhez szorosan kapcsolódó többszörös fogalmának kialakítását.

Először olyan összeget veszünk, ahol a nevezők megegyeznek, s ezzel felelevenítjük az összeadásról eddig tanultakat, majd olyan kéttagú összeget vizsgálunk, ahol az egyik nevező a másik többszöröse. Hogyan lehetne elvégezni pl. $^2/_5 + ^3/_{10}$ műveletet? Ha a nevezők megegyeznének, akkor az eddig tanultak alapján könnyen elvégezhetnénk a műveletet. Hogyan lehetne visszavezetni az összeadást egyenlő nevezőjű törtek összeadására? Mivel bővíteni tudunk, ezért olyan számot (számokat) kellene keresni, melyre (melyekre) mind a két nevező bővíthető. Ez azt jelenti, hogy olyan számot (számokat) kell keresni, melyben a két nevező maradék nélkül megvan, s erre a számra (számokra) — mint nevezőre — bővíthetjük a törteket. (Közös nevezőre hozunk.) Írjunk fel tehát olyan számokat, melyekben az 5, illetőleg a 10 maradék nélkül megvan. Ezeket a következőkbe 5, illetőleg 10 többszöröseinek nevezzük.

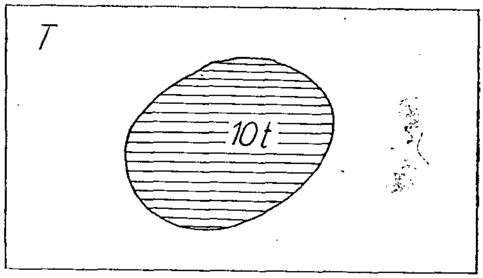
5 többszörösei: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

10 többszörösei: 10, 20, 30, 40, 50, ...

A természetes számok között tehát vannak olyanok, amelyekben az 5, s olyanok, amelyekben a 10 maradék nélkül megvan, s ezek 5, illetőleg 10 többszörösei. (A továbbiakban 5 többszöröseit 5t, 10 többszöröseit 10-t-vel jelöljük.) Ha az 5t és 10t számokat a természetes számok között „elkerítjük", kapjuk az 1. és 2. ábrát. A „természetes számok" helyett T-t írhatunk. A vonalkázott rész tehát az 1. ábrán 5t, 2. ábrán 10t



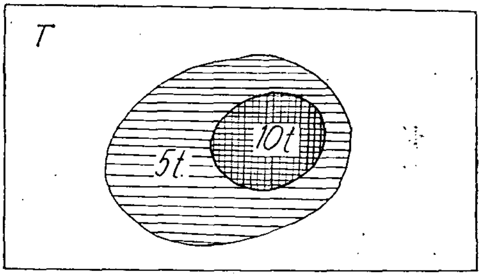
1. ábra



2. ábra

számokat tartalmazza. (Ezáltal tehát az 5t $\subset$ T és 10t $\subset$ T halmazművelethez jutottunk.) Célszerű az 1. és 2. ábrán is feltüntetni pár számot, mivel a jelölések szokatlanok a tanulók részéről s ezzel az „eleme", „nem eleme" relációkat is szemléltetjük. Pl.: 15 $\in$ 5t, 12 $\notin$ 5t, 20 $\in$ 10t, 25 $\notin$ 10t stb. Ha a többszöröseket jól megfigyeltetjük, könnyen adódik az az észrevétel, hogy 5 többszörösei között minden 10 többszörös, de 10 többszörösei között nem minden 5 többszörös szerepel, azaz van olyan 5 többszörös, mely 10-nek nem többszöröse, de nincs olyan 10 többszörös, mely 5-nek ne lenne többszöröse. Ezen észrevételből adódik, hogy közös nevezőnek 10 bármely többszöröse választható. Ezek után könnyen elkészíthetjük a 3. ábrát, ahol egyszeresen vonalkázott rész azokat az 5 többszöröseket tartalmazza, melyek 10-nek nem többszörösei, s a kétszeresen vonalkázott rész azon 5 többszörösöket tartalmazza, melyek 10-nek is többszörösei.

Az 1. és 2. ábrán feltüntetett számokat a 3. ábrán is feltüntetjük. A 3. ábrával tehát az 5t $\supset$ 10t, illetőleg T $\supset$ $\supset$ 5t $\supset$ 10t relációkat szemléltettük, vagyis 10 többszöröseinek halmaza 5 többszöröseinek halmazának részhalmaza.

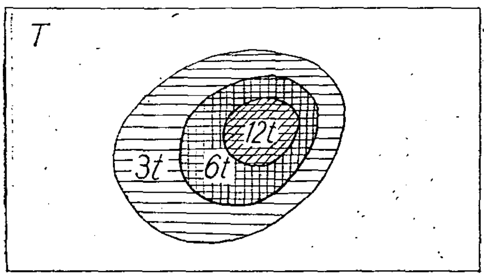


3. ábra

Vegyünk ezután olyan háromtagú összeget, melynél a nevezők egymás többszörösei. Pl.: $\frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{2}{3}$. Közös nevezőre hozáshoz keresni kell olyan számot (számokat), melyben a 6, 12, és a 3 megvan maradék nélkül. Írjuk ki az egyes nevezők többszöröseit.

6 többszörösei: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
12 többszörösei: 12, 24, 36, 48, ...
3 többszörösei: 3, 6, 9, 12, ..., 21, 24, ...

Mivel 12 és 24 mind a három számnak többszöröse (közös többszörös), tehát ezek választhatók közös nevezőnek. Ha kis figyelmet szentelünk a többszörösöknek, akkor a tanulók a következő megállapításokat teszik: 3 többszörösei között minden 6 és 12 többszörös, és 6 többszörösei között minden 12 többszörös szerepel. Azaz nincs olyan 6, illetőleg 12 többszörös, mely 3-nak ne lenne többszöröse és nincs olyan 12 többszörös, mely 6-nak ne lenne többszöröse, de 6 többszörösei között nem minden 3 többszörös és 12 többszörösei között nem minden 3 és 6 többszörös fordul elő. (9, 15 stb., illetőleg 18, 30, 21 stb.) Azaz van 3-nak olyan többszöröse, mely 6-nak és 12-nek nem többszöröse, s 6-nak van olyan többszöröse, mely 12-nek nem többszöröse. Ezen elemzés és a 3. ábra alapján készítjük el a 4. ábrát, ahol egyszeresen vonálkázott rész 3 többszöröseit, kétszeresen vonalkázott rész azon 3 többszörösöket, melyek 6-nak is többszörösei, a háromszorosan vonalkázott rész pedig 3-nak azon többszöröseit tartalmazza, melyek 6-nak és 12-nek is többszörösei. Ezzel újabb részhalmazhoz jutottunk, hiszen T ⊃ ⊃ 3t ⊃ 6t ⊃ 12t.

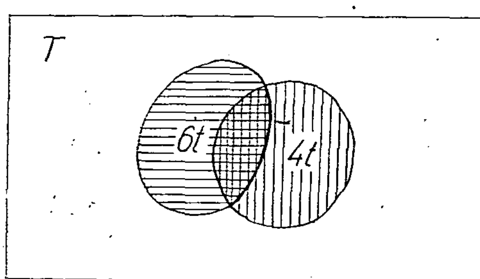


4. ábra

Nézzünk ezután olyan kéttagú összeget, melynél a nevező nem többszörösei egymásnak. Pl.: $^3/_4 + ^5/_6$. Írjuk fel a nevezők többszöröseit.

6 többszörösei: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
4 többszörösei: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

A többszörösökből következik, hogy közös nevezőnek 12, vagy 24 választható, s az is, hogy a többszörösök között az előzőektől lényegesen eltérő összefüggés áll fenn. Igaz ugyan, hogy 6 többszörösei között vannak olyanok, melyek 4-nek is többszörösei, és 4 többszörösei között is vannak olyanok, melyek 6-nak is többszörösei, de 6 és 4 többszörösei között vannak olyanok is, melyek 4-nek, illetőleg 6-nak nem többszörösei. (18, 6, 30 stb., illetőleg 8, 16, 20 stb.) Ezen megállapítások alapján elkészíthetjük az 5. ábrát, ahol a vízszintesen, illetőleg a függőlegesen vonalkázott részek 6, illetőleg 4 többszöröseit, míg a kétszeresen vonalkázott rész 6 és 4 közös többszöröseit tartalmazza, s ez 4t, illetőleg 6t-nek a közös része, mely 12 többszöröseit tartalmazza. Ezzel tulajdonképpen új halmazrelációhoz jutottunk (6t ∩ 4t = 12t). Mivel 4 és 6 közös többszörösei megegyeznek 6 és 4 közös többszöröseivel, azért az is adódik, hogy a metszetképzés kommutatív művelet (6t ∩ 4t = = 4t ∩ 6t).

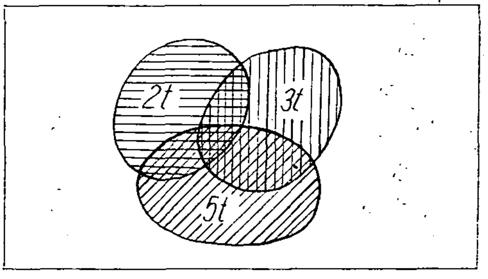


5. ábra

Vizsgáljuk ezután olyan háromtagú összeget, melynél az egyik nevezője sem többszöröse a másiknak. Lehet egy ilyen összeg pl. $1/2 + 2/3 + 4/5$. Írjuk fel a nevezők többszöröseit.

2 többszörösei: 2, 4, . . . 10, 12, 14, . . . 24, 26, 28, 30 . . .
3 többszörösei: 3, 6, 9, 12, . . . 24, 27, 30, 33, . . .
5 többszörösei: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, . . .

A többszörösökből 30 adódik közös többszörösnek, tehát 30 lehet a közös nevező. A többszörösöket a tanulókkal jól megfigyeltetve a következő észrevételek adódnak: 2 többszörösei között vannak olyanok, melyek 3-nak többszörösei, de 5-nek nem. (Pl.: 6, 12) s olyanok, melyek 5-nek többszörösei, de 3-nak nem, (pl.: 10, 20 stb.), s olyanok, melyek 3-nak és 5-nek is többszörösei (pl.: 30, 60 stb.). Hasonló észrevételeket tehetünk 3, illetőleg 5 többszöröseire is. Miután ezen összefüggéseket feltártuk, készítjük el a 6. ábrát, ahol a 3-szorosan vonalkázott rész 2, 3 és 5 közös többszöröseit, 2-szeresen vonalkázott részek 2 és 3, 2 és 5, 3 és 5 közös többszöröseit, míg az 1-szeresen vonalkázott részek 2, 3, illetőleg 5 többszöröseit tartalmazza. (Ezzel tulajdonképpen $2t \cap 3t \cap 5t$ halmazművelethez jutottunk.)

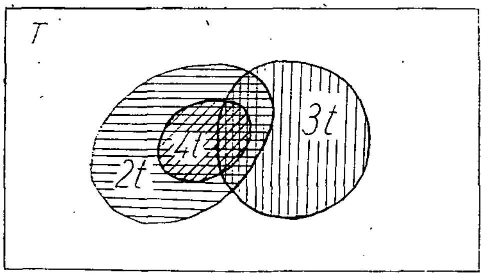


6. ábra

Vegyünk ezután olyan háromtagú összeget, ahol egyik nevező a másik többszöröse, s a harmadik ezekhez relatív prím. Ilyen összeg pl. $1/2 + 2/3 + 3/4$. Írjuk fel a nevezők többszöröseit.

2 többszörösei: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 . . .
4 többszörösei: 4, 8, 16, 12, 20 . . .
3 többszörösei: 3, 6, 9, 12, 15 . . .

A többszörösökből következik, hogy közös nevezőnek 12 választható, s – az előzőekhez hasonlóan – a többszörösöket elemezve, a következő megállapításokat nyerjük: 2 többszörösei között 4 minden többszöröse, de 3 nem minden többszöröse szerepel. Azaz van olyan többszöröse a 3-nak, mely a 2-nek nem többszöröse, s nincs olyan többszöröse a 4-nek, mely 2-nek ne lenne többszöröse: 3 többszörösei között vannak olyanok, melyek 2-nek és 4-nek is többszörösei, de 3 többszörösei között vannak olyanok is, melyek 2-nek és 4-nek nem többszörösei. Ezen észrevételekből és a 3., illetőleg 5. ábra alapján készítjük el a 7. ábrát, ahol a háromszorosan vonalkázott rész 2, 3 és 4 közös többszöröseit, kétszeresen vonalkázott részek 2 és 4, illetőleg 2 és 3 közös többszöröseit, egyszeresen vonalkázott részek 2, illetőleg 3 többszöröseit tartalmazza. (Ennél az esetnél tehát tartalmazás és metszetképzés is szerepel.)



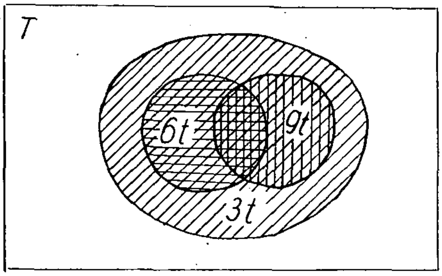
7. ábra

Érdemes még azzal az esettel foglalkozni, amikor két nevező a harmadik többszöröse, de egymásnak nem többszörösei. Pl. $2/3 + 5/6 + 7/9$. A nevezők töbszöröseit kiírva:

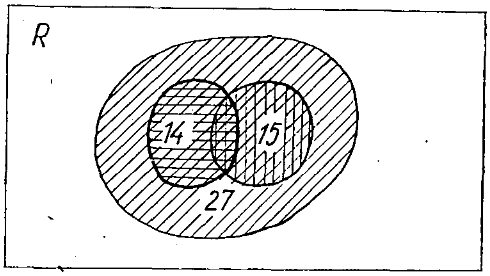
3 többszörösei: 3, 6, 9 . . . 15, 18, 21 . . . 33, 36 . . .

6 többszörösei: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42...
9 többszörösei: 9, 18, 36, 45...

közös nevezőnek 18, 36 stb. adódik. A többszörösök között most a következő összefüggések állnak fenn: 3 többszörösei között 6-nak és 9-nek minden többszöröse szerepel, de vannak olyanok, melyek 6-nak, illetőleg 9-nek többszörösei, de 9-nek, illetőleg 6-nak nem (12, 24 stb., illetőleg 9, 27 stb.), s vannak olyanok a 6 többszörösei között, melyek 9-nek is többszörösei, s olyanok is, melyek 9-nek nem többszörösei. Hasonló megállapítást tehetünk 9 többszöröseire. Ezen elemzés és az 5. ábra alapján készítjük el a 8. ábrát, ahol a háromszorosan vonalkázott rész 3, 6 és 9 közös többszöröseit, kétszeresen vonalkázott részek 3 és 6, illetőleg 3 és 9 azon közös többszöröseit, melyek 9-nek, illetőleg 6-nak nem többszörösei, míg az egyszeresen vonalkázott rész 3 azon többszöröseit tartalmazza, melyek 6-nak, illetőleg 9-nek nem többszörösei.



8. ábra



9. ábra

Ezzel egy lehetőséget mutattunk be a halmaz fogalmának kialakítására, mely lehetőséget az anyag kínál, hiszen a többszörösök felírása után már csak egy lépés elkészíteni a megfelelő ábrát, s szemléletesen, de mégis elvontan feltárni a többszörösök közötti kapcsolatokat. Ezenkívül alkalmazhatjuk az anyag más részeinél is a halmaz fogalmát, mivel a logikai kapcsolatok segítségükkel szemléletessé tehetők. Pl.: a deltoid, rombusz, négyzet tanításakor segítségükkel világosabbá tehetjük a közöttük levő összefüggéseket, s mivel a halmazábrájuk megegyezik a negyedik ábrával, ezért közöttük ugyanolyan logikai kapcsolat áll fenn, mint a negyedik ábra problémájánál. Ezzel tulajdonképpen az anyag két, elég távol eső része között állapítunk meg logikai azonosságot.

Végül megemlítjük, hogy egyes feladatok megoldásánál célszerű a halmazok alkalmazása. Pl.: dolgozat írásakor 3 feladat volt kitűzve. Az első feladatot 14-en, a másodikat 15-en oldották meg helyesen, s az, aki az elsőt vagy a másodikat megoldotta, az a harmadikat is. 27-en legalább egy feladatot s 20-an az első és második közül legalább egyet megoldottak. Hányan oldottak meg 3, 2 és 1 feladatot?

Megoldás: a feladatból következik, hogy a 3. feladatot megoldók között vannak azok, akik az elsőt, illetve a másodikat, esetleg mind a kettőt megoldották, azaz nincs olyan tanuló, aki az elsőt, vagy a másodikat megoldotta volna, s a harmadikat nem. De lehet olyan, aki a harmadikat megoldotta, s az elsőt vagy a másodikat, esetleg egyiket sem oldotta meg a kettő közül. Ezek alapján készítsük el a 9. ábrát. Az ábráról a megoldott feladatokra és a megoldók számára a következő értékek adódnak:

Megoldott feladatok	Megoldók száma
1, 2, 3	9
1, 2 —	0
1, — 3	5
— 2 3	6
— — 3	7

Ebből következik, hogy három feladatot 9, két feladatot 11 és egy feladatot 7 tanuló oldott meg.

ÉRFALVY FERENCNÉ
Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

A csoportmunka lehetőségei az ötödik osztályos számtan—mértan tanításban

A Tanterv és Utasítás tantárgyakra előírt követelményeit úgy kell felfognunk, hogy az ismeretnyújtás kapcsán olyan személyiségjegyek, képességek kialakítása a fő feladatunk, amelyek képesekké teszik tanulóinkat később is arra, hogy a társadalom mindenkori igényének megfelelő ismereteket önállóan is megszerezhessék. A problémamegoldó készség tudatos fejlesztése; az önálló, tervszerű, figyelmes, kitartó és pontos munkavégzésre szoktatás; a kezdeményező készség kibontakoztatása; a gazdasági és társadalmi élet figyelemmel kísérésére való ösztönzés stb. mind eszköz lehet a korunk igényeinek megfelelő embertípus kialakításában.

A jelzett személyiségjegyek, képességek kialakításának fő területe az oktató-nevelő munka. Amennyiben ezt a bipoláris folyamatot helyesen szervezzük, hozzájárulhatunk a kívánatos emberi tulajdonságok megalapozásához, kialakításához.

Az oktató-nevelő munka eddigi gyakorlatában kialakultak különböző hasznos módszeres eljárások, különféle szervezési formák, amelyek változatos, céltudatos és pedagógiailag megalapozott alkalmazása a mindennapi oktató-nevelő munka gyakorlatában elősegítik a tanulók sokoldalú fejlesztését.

Egyik már használt óraszervezési forma a *csoportmunka*. Ennek lehetőségeit kívánom elemezni az ötödik osztályos számtan-mértan tantervi anyag vonatkozásában eddigi tapasztalataim alapján.

Az ötödik osztályban a számtan-mértan tanítását *„A természetes számokról tanultak ismétlése és kiegészítése"* című témakörrel kezdjük. Ez a tantervi anyagrész zömmel az alsótagozatban tanultakat tartalmazza, ezért jó lehetőséget ad arra, hogy tanulóink megismerkedjenek a csoportmunkával, azt eredményesen végezzék. Ebben a témakörben csak néhány olyan anyagrész van, amelyet nem tartok alkalmasnak arra, hogy csoportmunka keretében dolgozzuk fel. Ezek a következők: