6. Írjátok le betűrendben, elválasztva az alábbi szavakat!
ősszel, eggyel, annyi, öccse, üggyel, ússzon

....

....

....

II. Ellenőrző tollbamondás az elválasztásra:

Szövege:

1. piac, diós, vajas, teás, kályha.
2. Tavasszal földbe kerül a mag. Előtte traktorral felszántják a földet.

VARECZA ÁRPÁD
Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

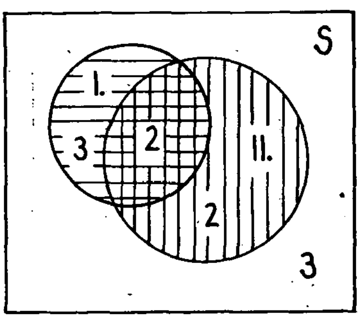
Halmazok alkalmazása szakköri feladatok megoldásában

(Befejező rész)

4. foglalkozás

1. Van két számunk, melynek jegyei különbözőek. Az I. szám 5 számjegyből áll, de van két olyan számjegye, mely a másikban is szerepel. A II. szám 2 olyan számjegyet tartalmaz, mely nincs az elsőben. Hány jegyű a II. szám? Hány különböző számjegyet tartalmaz a két szám? Hány számjegyet nem használtunk fel? Írj fel néhány ilyen számkettőst!

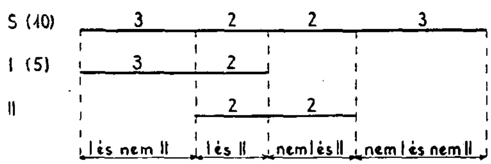
Jelölje: S a számjegyek halmazát, I. az egyik szám számjegyeinek a halmazát, II. a második szám számjegyeinek halmazát. (21. ábra)



21. ábra

Az I. szám számjegyeinek a száma 5 és ebből 2 jegy a II. számban is szerepel. (Kétszeresen vonalkázott rész) így $5 - 2 = 3$ olyan számjegye van, mely nincs a II-ben (csak vízszintesen vonalkázott rész). A II. szám viszont két olyan számjegyet tartalmaz, melyet az első rész nem tartalmaz (csak függőlegesen vonalkázott rész), így ez $2 + 2 = 4$ számjegyből áll. Az első számhoz 5 számjegy kell, s a második még kettő olyat tartalmaz, melyet az I. nem, így összesen a két számhoz $5 + 2 = 7$ számjegy szükséges, s ezért $10 - 7 = 3$ azon számjegyek száma, melyet sem az egyik, sem a másik nem tartalmaz. Ilyen két szám például: 12 345 és 4567.

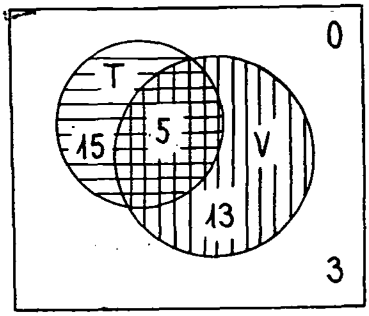
Készítsünk a 20. ábrához hasonló ábrát is. (22. ábra)



22. ábra

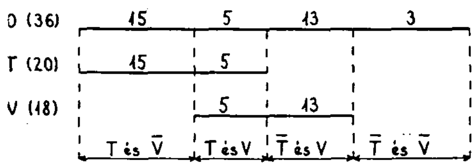
2. Egy osztálykiránduláson számháborút játszottak. Első esetben a támadók nagyon erősek voltak, így néhányan a következő játékban átálltak a védőkhöz. A kirándulás után, melyen 36-an vettek részt, megállapították, hogy 20 tanuló volt támadó és 18 tanuló védő és 3 tanuló nem vett részt a játékban. Menynyien voltak azok, akik csak támadók voltak; azok, akik csak védők voltak; azok, akik támadók és védők is voltak? Hány tanuló vett részt a játékban?

Jelölje: O az osztály tanulóinak halmazát, T a „támadó" (vízszintesen vonalkázott), V a „védő" tanulók halmazát (függőlegesen vonalkázott). (23. ábra) Azon tanulók száma, akik nem vettek részt a játékban 3, így $36 - 3 = 33$ tanuló *vagy* védő, *vagy* támadó



23. ábra

játékos volt, esetleg mindkettő. (Legalább egyszeresen vonalkázott rész.) Támadó játékos volt 20 és védő 18, s mivel összesen 33-an játszottak, ezért $18 + 20 - 33 = 5$ tanuló volt támadó is *és* védő is. (Kétszeresen vonalkázott rész.) Ekkor viszont csak támadó volt $20 - - 5 = 15$ tanuló (csak vízszintesen vonalkázott rész) és csak védő volt $18 - 5 = 13$ tanuló (csak függőlegesen vonalkázott rész). Készítsük el a 24. ábrát is s végezzük el rajta az elemzést!

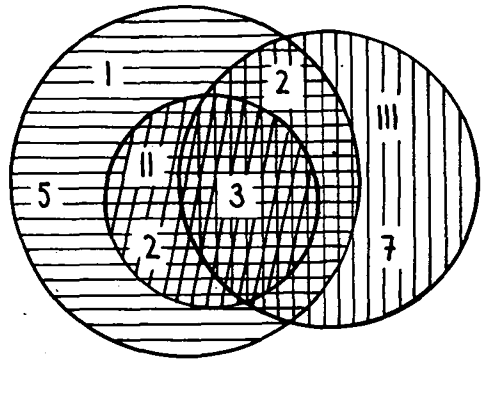


24. ábra

(Helyhiány miatt „nem támadó"-t $\bar{T}$-val jelöljük, s hasonló a jelentése a $\bar{V}$-nak is. A továbbiakban tagadásra ezt a jelet használjuk.)

3. Egy könyvkiadó három ifjúsági könyvsorozat kiadását tervezi (I. II. III.) melyek közül kettő 12 köteles, egy pedig 5 kötetes. Az I. sorozat kötetei közül válogatja a II. sorozat köteteit is és van három olyan kötet, amely mindhárom sorozatban szerepel. Azon kötetek száma, mely az I. és III. sorozatban is szerepelnek: 5. Hány különböző könyv jelenik meg e három sorozatban? Mennyi azon kötetek száma, amelyek csak egy, illetve csak két sorozatban jelennek meg?

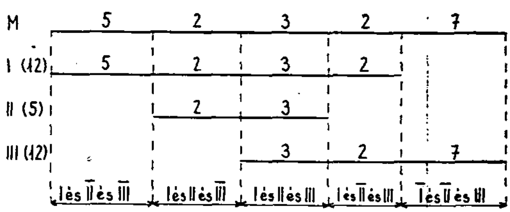
Jelölje az egyes sorozatok könyveinek halmazát I., II. és III. Mivel az I. sorozat 12 kötetből áll a II. 5 kötete ezekből kerül ki, ezért $12 - 5 = 7$ azon kötetek száma, melyek az I. sorozatban benne vannak, de a másodikban nincsenek. A II. sorozat köteteinek a száma 5 és tudjuk, hogy 3 kötet minden sorozatban benne van (háromszorosan vonalkázott rész), ezért 2 olyan kötet van, mely I. *és* II-ben benne van, *de* nincs benne a III-ban. Viszont 5 azon kötetek száma, melyek az I. *és* III-ban is benne vannak, ezért azon kötetek száma, melyek I. és III-ban benne vannak, *de* a II-ben nincsenek $5 - 3 = 2$. Így csak a III. sorozatban levő kötetek száma $12 - 5 = 7$ és csak az elsőben levő kötetek száma $12 - 7 = = 5$. (25. ábra) Az egyszeresen vonalkázott



25. ábra

részek, azon kötetek számát adják, amelyek csak egy; a kétszeresen vonalkázott részek azon kötetek számát adják, amelyek két sorozatban jelentek meg, így csak egy sorozatban jelent meg $5 + 7 = 12$, két sorozatban jelent csak meg $2 + 2 = 4$. A három sorozatban összesen $5 + 2 + 3 + 2 + 7 = 19$ különböző kötet jelent meg.

Készítsük el a 26. ábrát is, s végezzük el rajta az elemzést! (M a megjelent különböző kötetek halmaza.)



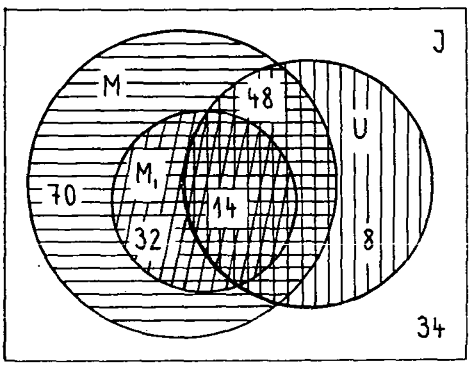
26. ábra

5. foglalkozás

1. Egy iskola tanulói közül 164 rendszeresen olvassa a Magyar Ifjúság c. hetilapot (jelöljük M-mel) és ezek közül 46 a IM magazint is. (M_1). Az Úttörő c. lapot (U) 70 tanuló olvassa rendszeresen, de csak 8 olyan tanuló van, aki csak ezt és 48 tanuló az U mellett az M-t is olvassa.

Hány tanuló olvas rendszeresen három, kettő, egy lapot? Hányan nem olvassák ezeket a lapokat, ha 206 tanuló jár az iskolába? A 27. ábrán M, M_1, U jelöli a Magyar Ifjúságot, IM magazint, Úttörőt olvasók halmazát és I az iskola tanulóinak a halmazát. Vonalkázzuk ezeket rendre vízszintesen, ferdén, függőlesegen, akkor a vízszintesen és függőlegesen vonalkázott rész az M-t és U-t olvasókat; vízszintesen és ferdén vonalkázott rész az M-t és M_1-t olvasókat stb. jelöli. Mivel az M_1-t olvasók az M-t olvasók közül kerülnek ki és ezek száma 46, ezért azok száma, akik M-t olvassák *és* M_1-t nem, $164 - 46 = 118$. Az U-t 70-en olvassák és 8 tanuló csak ezt, így $70 - 8 = 62$ tanuló az U-n kívül valamelyik másikat is olvassa, s így az újságolvasók száma $164 + 8 = 172$.

Azon tanulók száma, akik nem olvasnak újságot $206 - 172 = 34$. Az U mellett 48 tanuló a M-t is olvassa, így U-t, M-t és M_1-t olvasók száma $62 - 48 = 14$, azaz 14 tanuló mindhárom újságot rendszeresen olvassa. A ka-



27. ábra

pott értékeket feltüntetve a 27. ábrán a kérdésekre adandó válaszok könnyen leolvashatók.

Csak egy újságot olvasók (egyszeresen vonalkázott részek).

$$70 + 8 = 78$$

Két újságot olvasók (kétszeresen vonalkázott részek).

$$32 + 48 = 80$$

Három újságot olvasók (háromszorosan vonalkázott rész).

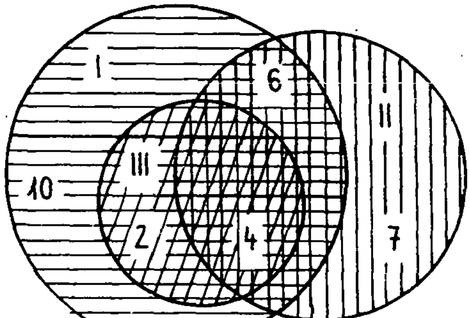
$$14$$

Újságot nem olvasók (vonalkázatlan rész).

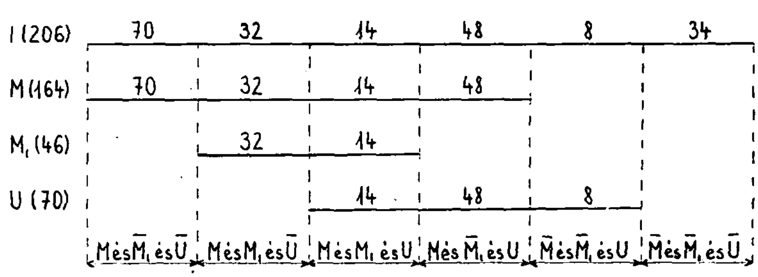
$$34$$

A 28. ábráról is könnyen leolvashatóak a kérdésekre adandó válaszok!

2. Három üzem 29 országba exportál. Az üzemeket jelöljük I., II., III. jelekkel. Az I. üzem 10, a II. üzem 7 olyan országgal van exportkapcsolatban, amelyekbe a többi nem exportál. A III. üzem csak olyan országba exportál, amelybe az I., s van 4 olyan ország, amelybe mindhárom és 2 olyan, amelybe csak I. és III. exportál. Hány olyan ország van, amelybe csak I. és III. exportál. Hány olyan ország van, amelybe legalább két vállalat; legfeljebb két vállalat exportál? Hány olyan ország van, amelybe csak I. és II. exportál árut? Hány országgal van exportkapcsolata a III. vállalatnak? (29. ábra)



29. ábra

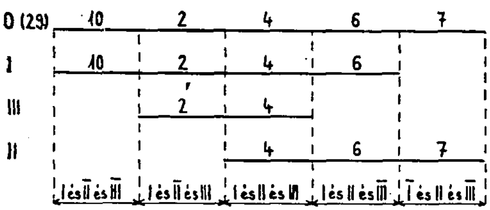


28. ábra

Vonalkázzuk vízszintesen azon országok halmazát, amelyekbe az I., függőlegesen, amelyekbe a II.; ferdén, amelyekbe III. exportál. amelyekbe a I. és mivel 4 olyan ország van, amelyekbe mindhárom és 2 olyan, amelyekbe csak I. és III. ezért a III. üzem $2 + 4 = 6$ országba exportál. 10 olyan ország van, amelybe csak I. és 7 olyan, amelybe csak II. exportál, s mivel összesen 29 országba exportálnak, ezért $29 - 10 - 2 - 4 - 7 = 6$ azon országok száma, melybe I. és II. exportál, de III. nem. Ennek alapján azon országok száma, amelyekbe csak egy üzem exportál (egyszeresen vonalkázott részekbe írt számok összege) $10 + 7 = 17$. Azon országok száma, amelyekbe két üzem exportál (kétszeresen vonalkázott részekbe írt számok összege) $2 + 6 = 8$, így azon országok száma, amelyekbe legfeljebb 2 üzem exportál (egyszeresen és kétszeresen vonalkázott részek) $17 + 8 = 25$; és azon országok száma, amelyekbe legalább két üzem exportál (legalább kétszeresen vonalkázott részek) $2 + 4 + 6 = 12$. Azon országok száma, amelyekbe I. és II. exportál, de III. nem, $10 + 6 + 7 = 23$.

Készítsük el a 30. ábrát s végezzük el rajta is az elemzéseket.

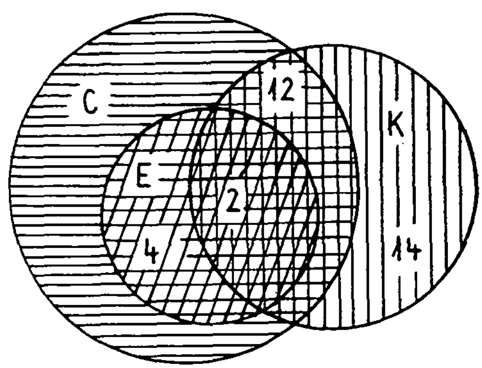
O jelöli azon országok halmazát, melybe legalább egy üzem exportál.)



30. ábra

3. A Gelka szervizben csőhibás, ellenálláshibás és kapcsolóhibás készülékek vannak. A csőhibások harmada ellenálláshibás is, és minden ellenálláshibás készülék csőhibás, s 2 készülékben mindhárom hiba előfordul. Viszont 14 készülék csak kapcsolóhibás s ez fele azon készülékek számának, melyekben kapcsolóhiba is van. Mennyi azon készülékek száma, melyben két hiba van, ha a csőhibások száma 18?

Jelölje: C, E, K a csőhibás, ellenálláshibás, kapcsolóhibás készülékek halmazát (31. ábra) s vonalkázzuk ezeket vízszintesen, ferdén, függőlegesen. Mivel 2 készülékben mindhárom hiba előfordul, ezért a háromszorosan vonalkázott rész 2 készüléket tartalmaz. 14 készülék csak kapcsoláshibás, tehát a csak függőlegesen vonalkázott részben 14 készülék van, viszont ez fele az összes kapcsolóhibás készülékek számának és 2 készülékben mindhárom hiba előfordul, ezért



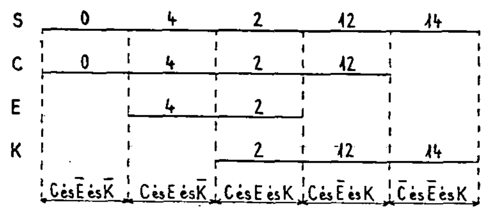
31. ábra

$14 - 2 = 12$ azon készülékek száma, amelyekben kapcsoló- és csőhiba van, de ellenálláshiba nincs. Mivel a csőhibás készülékek száma 18, és ezek harmada ellenálláshibás, ezért az ellenálláshibások száma 6, s ezek közül 2-ben mindhárom hiba előfordul, így 4 olyan készülék van, amely csak ellenállás- és csőhibás, ekkor viszont ezek megadják a 18-t s így nem lesz olyan készülék, mely csak csőhibás volna (sűrűn vonalkázott rész üres, s így az üres halmazhoz jutottunk).

Ezek után az ábráról a kérdésekre adandó válaszok könnyen leolvashatók.

Azon készülékek száma, melyben két hiba van: $4 + 12 = 16$. A feladat elemzésével a 31. ábra alapján több kérdésre is könnyen választ adhatunk:

Pl. legalább két hibája van $4 + 2 + 12 = 18$ készüléknek; legfeljebb két hibája van $4 + 12 + 14 = 30$ készüléknek stb. Érdemes ezen lehetséges kérdéseket is elemezni. Készítsük el a 32. ábrát, s végezzük el rajta is az elemzést! (S jelöli a készülékek halmazát.)

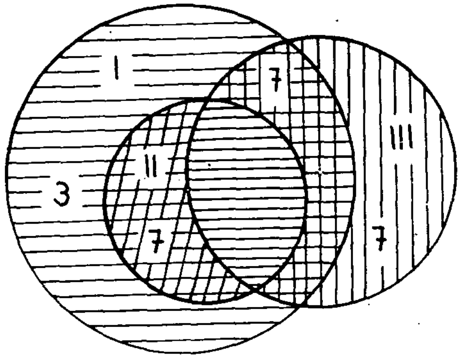


32. ábra

6. foglalkozás

1. Egy medencét 24 óra alatt töltenek meg három csapon keresztül. Jelölje a csapokat I., II., III. Az első csap 17, a III. 14 órát töltött, s mindhárom egyszerre nem működött,

s a II. csak akkor töltött, mikor I. és feleannyi időt, mint a III. Hány órát töltött egyedül az I., illetve a III. csap? Mennyi ideig töltött kettő, illetve csak egy csap? (33. ábra)

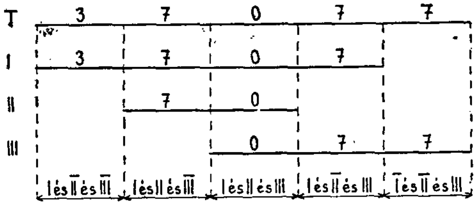


33. ábra

Vonalkázzuk a I., II., III. csapok óráinak halmazát vízszintesen, ferdén, függőlegesen. Mivel mindhárom egyszerre nem működött, ezért a háromszorosan vonalkázott rész üres (sűrűbben vonalkázott).

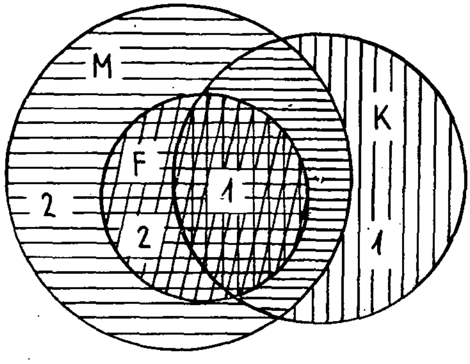
Mivel I. 17, a III. 14 órát töltött, és 24 óra alatt telt meg a medence, ezért $14+17-24=7$ órát működtek egyszerre (függőlegesen és vízszintesen vonalkázott rész) s így 7 órát egyedül működött a III. Mivel a II. fele annyi időt működött, mint III., ezért II. töltési ideje 7 óra, s ebből következik, hogy az I. $17-7-7=3$ órát töltött egyedül. Azon órák száma, mikor két csap töltött (kétszeresen vonalkázott részek) $7+7=14$, és azon órák száma, mikor csak egy töltött $7+3=10$.

Készítsük el a 34. ábrát is és végezzük el rajta az elemzést, ahol T a töltéshez szükséges órák halmaza.



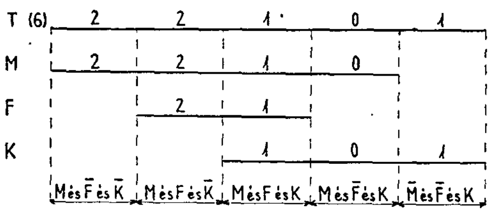
34. ábra

2. Egy iskolában a matematikát, fizikát és kémiát 6 tanár tanítja. Azon tanárok száma, akik legalább két tárgyat tanítanak, megegyezik a csak egy tárgyat tanítók számával. A kémiát ketten tanítják, s van olyan, aki mindhármat, de olyan nincs, aki csak matematikát és kémiát tanítana. Viszont a fizikát tanítók matematikát is tanítanak, és van olyan is, aki csak kémiát. Hányan tanítják az egyes tárgyakat? (35. ábra)



35. ábra

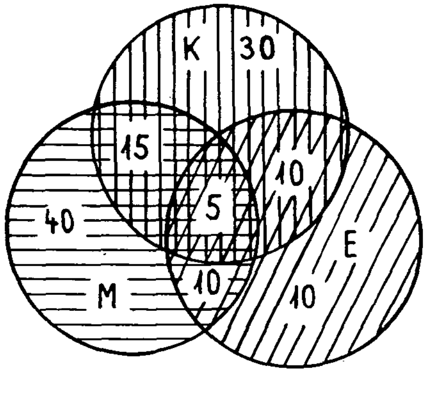
Jelölje: M, F, K a matematikát, a fizikát, a kémiát tanító tanárok halmazát. Mivel azok száma, akik csak egy tárgyat tanítanak, megegyezik azok számával, akik legalább kettőt (azaz kettőt vagy hármat), ezért a csak egy tárgyat tanítók száma 3, a legalább kettőt tanítóké szintén 3. A legalább két tárgyat tanítók vagy matematikát és fizikát vagy matematikát, fizikát és kémiát tanítanak. A kémiát tanítók száma 2, s mivel van olyan, aki mindhármat, s olyan is aki csak kémiát tanít, ezért ezek száma csak 1—1 lehet, de akkor csak matematikát 2 tanár tanít; csak matematikát és fizikát 2. Így a 35. ábráról leolvasható, hogy matematikát 5, fizikát 3 tanár tanít. Készítsük el a 36. ábrát, s végezzük el az elemzést! (T a tanárok halmazát jelöli.)



36. ábra

3. Egy iskola tanulói három — Móricz (M), Katona (K), Erkel (E) bérletet vásárolhatnak. 120 tanulónak van bérlete, s az M bérletet 70-en vásárolták meg, ebből 20-nak K-ból és 15-nek E-ből is van bérlete, 5 tanulónak mindháromból. Azon tanulók száma, akiknek E-ből van bérletük, fele azok számának, akiknek M-ből van bérletük és 10 tanulónak csak az E bérlete van. Hány azon tanulók száma, akiknek K bérlete; akiknek csak egy; akiknek két bérletük van?

Vonalkázzuk az M, K, E bérlettel rendelkezők halmazát vízszintesen, függőlegesen, ferdén. (37. ábra) Mivel az M-es bérletet 70-en



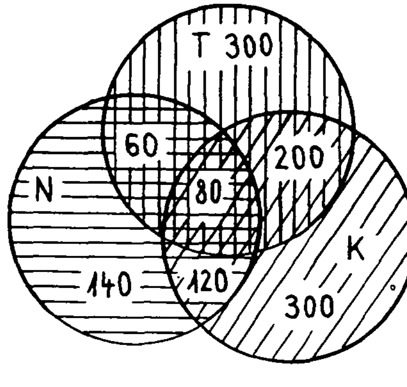
37. ábra

vásárolták meg és 20 a K-t is és 15 E-t is és 5 mindháromból vásárolt, ezért azon tanulók száma, akiknek M-ből és K-ból van bérletük, de E-ből nincs $20 - 5 = 15$, s hasonlóan azon tanulók száma, akiknek M és E-ből van bérletük, de K-ból nincs, $15 - 5 = 10$. Így csak M bérlettel rendelkezők száma, $70 - 15 - 5 - 10 = 40$. Az E bérletet vásárlók száma fele M-t vásárlókénak, így ezek száma $70 : 2 = 35$, s mivel 10 tanulónak csak ebből van bérlete, ezért azon tanulók száma, akinek K és E bérlete van csak $35 - 5 - 10 - 10 = 10$. Összesen viszont 120 tanuló vásárolt bérletet, így a csak K bérletet vásárlók száma $120 - 40 - 15 - 5 - 10 - 10 - 10 = 30$.

A feladatra adandó válaszok az ábráról leolvashatók: K bérletet vásárló tanulók száma $30 + 15 + 5 + 10 = 60$. Egy bérlete van $40 + 10 + 30 = 80$ tanulónak. Két bérlete van $15 + 10 + 10 = 35$ tanulónak. (Itt szakaszokkal való szemléltetésre nincs lehetőség.)

7. foglalkozás

1. Egy exportra termelő üzem dolgozói közül 640 törzsgárdatag, s ezek közül 140 tud németül. Összesen 400 dolgozónak van német nyelvtudása, s ezek közül 200 szerelő. A szerelők száma 700 és ezek közül 280 tagja a törzsgárdának. Ha 1200 olyan dolgozója van az üzemnek, aki vagy törzsgárdatag vagy képesített szerelő, vagy tud németül, akkor hány olyan dolgozó van, aki képesített szerelő, törzsgárdatag és németül is tud? (38. ábra). Jelölje: N, T, K a németül tudók; a törzsgárdatagok; a képesített szerelők halmazát és vonalkázzuk ezeket vízszintesen, függőlegesen és ferdén. Mivel 640 törzsgárdatag, 400 németül tudó és 700 szerelő van, s ezek közül az, aki kettőbe tartozik kétszer, aki mindháromba tartozik, az háromszor szerepel, ezért $640 + 400 + 700 - 1200 = 540$ azon dolgozók száma, akik legalább kettőbe beletartoznak. A háromba beletartozók a háromszorosan vonalkázott részben vannak. A függő-



38. ábra

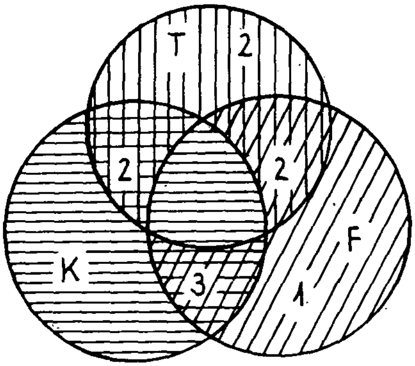
legesen és vízszintesen vonalkázott részben 140, vízszintesen és ferdén vonalkázott részben 200, a ferdén és függőlegesen vonalkázott részben 280 dolgozó van, így a legalább kétszeresen vonalkázott részek $200 + 280 + 140 = 620$ dolgozót adnak, s ezek közül azok, akik mindháromban benne vannak, háromszor szerepelnek. A legalább kettőbe tartozók száma 540. $620 - 540 = 80$ azon dolgozók száma, akik mindháromban benne vannak, vagyis azon dolgozók száma, akik törzsgárdatagok, szerelők és németül is tudnak.

2. Egy úttörőcsapat a járási sportversenyre futásból, távolugrásból és kislabdahajításból indít versenyzőt. Futásból 6, távolugrásból 6, kislabdahajításból 5 tanuló indul és egy legfeljebb két számból indulhat. A futásból és távolugrásból indul 2, futásból és kislabdahajításból indul 3, távolugrásból és kislabdahajításból indul 2 tanuló.

Hány főt indít a csapat a versenyen?

Jelölje: F, T, K a futásból távolugrásból, kislabdahajításból indulók halmazát és vonalazzuk ezeket vízszintesen, függőlegesen és ferdén. (39. ábra) Mivel három számból egy versenyző sem indulhat, ezért a három halmaz közös része üres (sűrűbben vonalkázott rész). Futásból és távolugrásból 2, futásból és kislabdahajításból 3, távolugrásból és kislabdából 2 tanuló indul, így ezeket beírhatjuk a 39. ábrába. Mivel K-ból 5 tanuló indul összesen, ezért olyan tanuló nincs, aki csak kislabdahajításból indulna, hiszen az 5-t már az előbbiek alapján megkaptuk. Csak T-ből indul $6 - 2 - 2 = 2$ és csak F-ből $6 - 3 - 2 = 1$ tanuló. Az ábráról leolvasható, hogy az induló tanulók száma $2 + 2 + 2 + 3 + 1 = 10$. Sőt az is leolvasható, hogy csak egyből 3, kettőből 7 tanuló indul.

3. Egy osztály tanulóinak a fele fotó, matematika, és fizika szakkörbe jár. A fotószakkörben (O) 8, a matematika (M) szakkörben



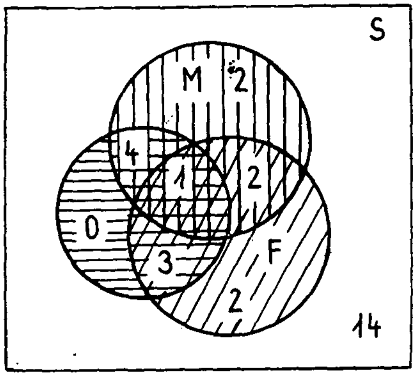
39. ábra

9, a fizika (F) szakkörben 8 tanuló vesz részt. 4 tanuló csak O-ban és M-ben, 3 tanuló csak O-ban és F-ben, és 2 tanuló csak F-ben és M-ben vesz részt és egy mindháromban. Mennyi az osztály létszáma? Jelölje: S az osztály tanulóinak a halmazát, akkor a 40. ábra adódik. Mivel 1 tanuló mindháromban részt vesz és 4 tanuló csak O-ban és M-ben, és 3 tanuló csak O-ban és F-ben, ezért nincs olyan tanuló, aki csak O-ba járna; mert ezek száma 8. Viszont 2 csak F-be, és M-be jár és F-be összesen 8-an járnak, így csak F-be $8 - 2 - 3 - 1 = 2$ tanuló jár és mivel M-be 9-en járnak, így csak M-be $9 - 4 - 1 - 2 =$ $= 2$ tanuló jár. (40. ábra) Ezek szerint legalább egy szakkörbe $4 + 2 + 1 + 2 + 3 +$ $+ 2 = 14$ tanuló vesz részt és ez az osztály fele, így az osztály létszáma $14 + 14 = 28$. A tanulókról a 40. ábra alapján több információ is leolvasható. Olvassunk le ezek közül néhányat!

8. *foglalkozás*

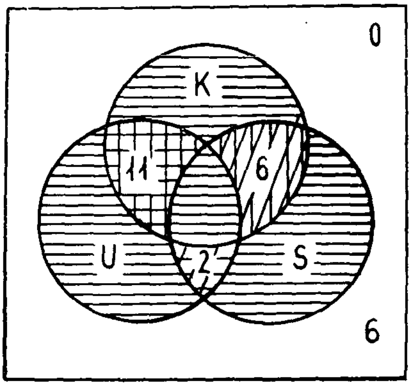
1. Egy osztály 25 tanulója közül 17-en kerékpároznak 13-an úsznak és 8-an síelnek. Egy tanuló sem űzi mindhárom sportágat, de mindegyiknek matematikából jó, vagy elégséges osztályzata volt. 6 tanuló kapott az osztályból matematikából elégtelent. Hány tanulónak van jelese matematikából, mennyi úszó tud síelni?

Jelölje: U, K, S, O az úszók, kerékpározók, síelők és az osztály tanulóinak halmazát. Mivel egy tanuló sem űzi mindhárom sportágat, ezért legalább annyi sportoló van, mint $17 + 13 + 8 = 38$-nak a fele azaz, 19. (41. ábra.) Viszont 25 az osztálylétszám és 6 tanulónak volt elégtelenje matematikából, így $(25 - 6 = 19)$ minden sportoló két sportágat



40. ábra

űz, s ezért matematikából senkinek sincs ötöse. Azon tanulók száma, akik síelnek 8, s akik úsznak 13, s ha a kettőt összeadjuk, akkor ebben benne lesznek a kerékpározók is, mert azok még vagy úsznak, vagy síelnek és az úszók és síelők számának kétszerese szerepel ebben.

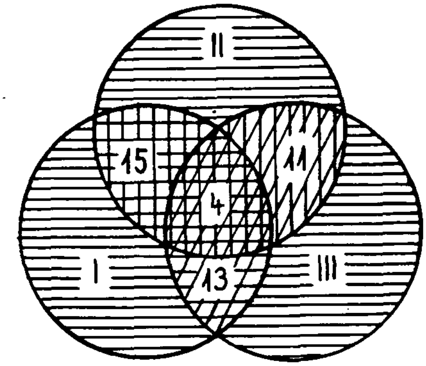


41. ábra

Ha ebből levonjuk a sportolók számát, megkapjuk az úszók és síelők számát, azaz $8 + 13 - 19 = 2$ tanuló síel és úszik. Ezek után a síelők és kerékpározók, az úszók és kerékpározók száma is könnyen adódik (6; 11).

2. Az iskolában olyan növénygyűjteményt kell készíteni a tanulóknak, amelyben legalább 25 növénynek kell szerepelnie. Három tanuló (I. II. III.) összehasonlítja a gyűjteményét, melyekben 32, 30 és 28 növény van és azt tapasztalják, hogy a gyűjtött növények mind-

egyike legalább két gyűjteményben szerepel és I. és II. tanuló gyűjteményében 19 közös van, 11 olyan növény van, amely csak II. és III. gyűjteményében szerepel. Hány különböző növényt gyűjtött a három tanuló? (42. ábra.)

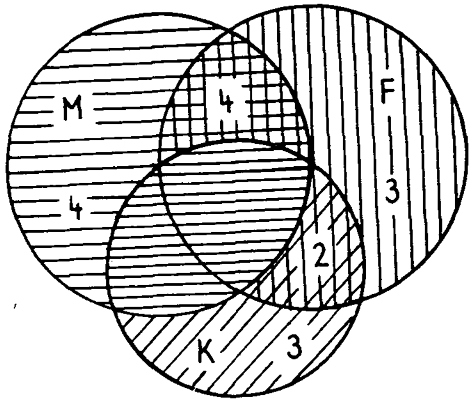


42. ábra

Mivel minden növény legalább két gyűjteményben szerepel, ezért az egyszeresen vonalkázott részek üresek (ezt sűrűbben vonalkáztuk). Az I. és II. gyűjteményben 19 közös van s I-nek összesen 32 növénye van, ezért $32 - 15 = 13$ azon növények száma, melyek II-vel nem közösek. (De III-mal ezek közösek.) 11 növény csak II. és III. gyűjteményben szerepel, így $28 - 11 - 13 = 4$ azon növények száma, amelyek mindháromban megtalálhatók, így viszont azon növények száma, amelyek csak I. és II-ban vannak benne: 15. A különböző növények számát pedig az ábráról könnyen leolvashatjuk. $13 + 4 + 11 + 15 = 43$.

3. Egy osztályban azon tanulók száma, akiknek matematikából (M), vagy kémiából (K), vagy fizikából (F) ötöse van (legalább egyikből) 16. Azon tanulók száma, akiknek kettőből van ötösük 6 és nincs olyan tanuló, akinek M-ből és K-ból ötöse lenne. Azt azonban tudjuk, hogy azon tanulók száma, akiknek M és F-ből ötöse van, kétszerese azon tanulókénak, akiknek K-ból és F-ből van ötösük és azon tanulók száma, akiknek M-ből ötöse van, kétszerese azokénak, akiknek M-ből és F-ből ötöse van. Hány tanulónak van ötöse csak fizikából, ha kémiából öt tanuló kapott ötöst. Mennyinek van csak egyből ötöse? (43. ábra.)

Jelölje M, F, K a matematikából, fizikából, kémiából ötös jegyet kapott tanulókat. Mivel olyan nincs, akinek M-ből és K-ból is ötöse lenne, ezért olyan sincs, akinek mindháromból ötöse van. (43. ábra.) A kettőből ötös tanulók száma 6, s ezeknek vagy M és F-ből vagy F és K-ból van ötöse, s tudjuk, hogy az M-ből és F-ből ötös tanulók száma kétszerese az F-ből és K-ból ötös tanulók számának, így M-ből és F-ből 4, F-ből és K-ból 2 tanulónak van ötöse. Viszont azon tanulók



43. ábra

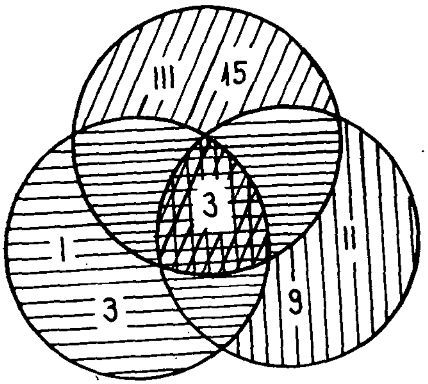
száma, akiknek M-ből ötösük van, kétszerese az M-ből és F-ből ötöst kapott tanulók számának, így csak M-ből 4 tanulónak van ötöse. Kémiából 5 tanuló ötös és ezek közül F-ből is ötös 2, így csak K-ból $5 - 2 = 3$ tanuló kapott ötöst. 16 tanulónak legalább egyből ötöse van, így a csak fizikából ötöst kapott tanulók száma $16 - 4 - 4 - 2 - 3 = 3$. Csak egyből $4 + 3 + 3 = 10$ tanulónak van ötöse.

Olvassunk le mindent, amit csak lehet az ábráról.

9. foglalkozás

1. Három brigád egy munkát 30 nap alatt végzett el, s a munkán eltöltött idejük aránya $1 : 2 : 3$. A brigádok 3 napot együtt dolgoztak, de nem volt olyan nap, melyen csak két brigád dolgozott volna. Hány napot dolgoztak külön-külön a brigádok a munkán?

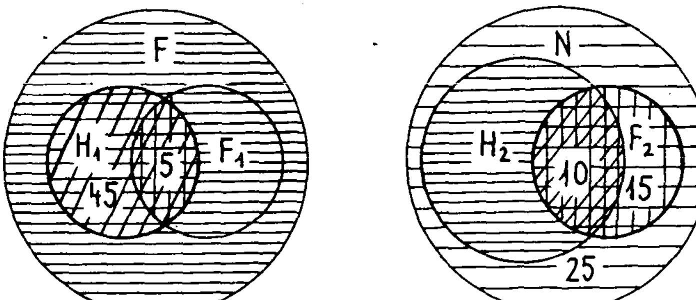
Jelölje a brigádokat I. II. és III. s vonalkázzuk ezeket vízszintesen, függőlegesen, ferdén. Mivel egyszerre két brigád nem dolgozott, ezért a kétszeresen vonalkázott részek üresek. 3 napot együtt dolgoztak, így a háromszorosan vonalkázott részbe 3 kerül. (44. ábra.) A három brigád 30 nap alatt végezte el a munkát, de három napot együtt dolgoztak, így ha nem lett volna olyan nap, melyen mindhárom dolgozik, 36 nap kellett volna a munka elvégzéséhez. Ezt, mivel a napok arányai $1 : 2 : 3$, osztva 6-tal, $36 : 6 = 6$, kapjuk az I. brigád munkanapjainak a számát, s ebből 3 napot egyedül dolgozott; III. brigád $2 \cdot 6 = 12$ napot dolgozott, s ebből 9 napot egyedül; a III. brigád 18 napot s ebből 15 napot egyedül.



44. ábra

2. Egy 100 tagú kirándulócsoportról a következőket tudjuk: minden férfi 20 évnél idősebb. A kirándulók között 50 nő van és 60 személy idősebb 20 évnél. Van 25 férjezett nő és 15 olyan 20 évnél idősebb személy, akinek van házastársa, de nem biztos, hogy részt vesz a kiránduláson. Hány olyan személy van, akinek van házastársa? Hány lány idősebb 20 évnél? Hány 20 évnél fiatalabb nőtlen férfi van? Hány férfi nős? Hány személy fiatalabb 20 évnél? Jelölje: F, N a férfiakat, illetve nőket; H_1, H_2 a húsz évnél idősebb férfiakat, illetve nőket; F_1 F_2 azon férfiakat, illetve nőket, akinek van házastársa. Mivel 50 nő van, ezért a férfiak száma is 50. (45. ábra.)

Minden férfi 20 évnél idősebb, így a bal oldali ábrán a H_1-en kívüli rész üres, 25 férjezett nő van, ezért F_2-be 25 kerül és ezek közül 10-nek van házastársa, így a jobb oldali ábrán 10 kerül a háromszorosan és 15 a kétszeresen vonalkázott részbe, mert H_2-nek F_2-n kívüli része üres, hisz 60 húsz évnél idősebb személy van, s ebből 50 férfi és 10 férjezett nő, ebből viszont következik, hogy az egyszeresen vonalkázott részbe a jobb oldali ábrán 25 nő kerül. De 15 azon 20 évnél idősebb személyek száma, akiknek van házastársa, ha ebből 10 nő, akkor 5 férfi (baloldali ábrán háromszorosan vonalkázott rész), s ezért 45 olyan 20 évnél idősebb férfi van, akinek nincs házastársa. A 45. ábráról a kérdésekre adandó válaszok ezek után könnyen leolvashatóak.



Férfiak (50) Nők (50)

45. ábra

A feladatsorban olyan feladatok is szerepelnek, melyek példatárban, vagy más irodalomban megtalálhatók. Ezek tárgyalásával is azt szeretnénk kiemelni, hogy itt nemcsak a feladatok megoldását, hanem a kialakítandó szemléletmódot is fontosnak tartjuk, mert ezzel a függvények tanítását, az egyenlőtlenségek megoldását stb. készítjük elő. A szemléletmód az egyes anyagrészeknél a rendszerezést is könnyebbé teszi. Nagymértékben elősegíti a logikus gondolkodás készségének fejlődését. Alfred Knuth a Módszertani Közlemények 1971. 1. számában „Az NDK 10 osztályos általános iskoláiban folyó matematikatanítás korszerűsítéséről" c. cikkében rámutat ezen szemléletmód hatékonyságára: „A tanulók megtanulnak elemkapcsolatokat képezni és felismerni, elemkapcsolatokat és részhalmazkapcsolatokat találni. Ezt a felismerést alkalmazzák a tanulók az aritmetikai, geometriai és ezen túli összefüggések leírásánál és bizonyos feladatok megoldásakor. Ezáltal megtanulják a matematikai lényeget megtalálni."

IRODALOM

1. Kalmár László: A matematika alapjai (Egyet. jegyzet)
2. G. Klaus: Bevezetés a formális logikába
3. Lilly Görge: Halmazok, relációk, függvények
4. A. I. Popov: A matematikai logika elemei
5. K. A. Rupaszov: 100 logikai feladat
6. Ruzsa I.—Urbán J.: Matematikai logika
7. Ruzsa I.: A logika elemei (Egyet. jegyzet)
8. Dr. Szendrei J.: Halmazelmélet és matematikai logika (Főisk. jegyzet)
9. A. A. Sztoljár: A matematikatanítás módszerei
10. A. A. Sztoljár: A matematikatanítás logikai problémái
11. Varecza László: Konkrét és absztrakt struktúrák
12. Varga Tamás: Matematikai logika (kezdőknek)

Dr. SZABÓ PÁL, Budapest, Országos Közegészségügyi Intézet,
POPRÁDI TIBOR, MÜM Országos Pályaválasztási Szolgálat,
Dr. STANCZ ÉVA, Fővárosi Gyermekegészségügyi Szolgálat

Komplex vizsgálatok fontossága iskoláskorú gyermekeknél

Hazai és külföldi szerzők egyre nyomatékosabban mutatnak rá arra, hogy a személyiség jóval összetettebb, bonyolultabb, mintsem egyirányú vizsgálatokkal megismerhető volna. Jelentős ez a felismerés a pedagógus számára is, mivel a gyermeki személyiségre a fenti megállapítás még fokozottabban áll.

Ha a nevelő érdemben akar foglalkozni azokkal a problémákkal, amelyek az iskolásoknál előfordulnak, minden eszközzel törekednie kell a tanulók minél sokoldalúbb megismerésére. Csak így tárhatja fel a problémák gyökereit, és végezhet megelőző — nevelőmunkát.

Az ötvenes években Nyugat-Németországban jelent meg *Coerper, Hagen* és *Thomae* monográfiája, mely a II. világháború után német gyermekekről kívánt képet adni. Tizezer gyermek vizsgálata alapján próbálták megoldani ezt a nagy feladatot a szerzők. Már a bevezetőben hangsúlyozták, hogy a komplexitás alapján, a kölcsönös összefüggések fontosságának tudatában igyekeztek pszichés, szomatikus és szociológiai oldalról egyaránt megközelíteni a kérdést. Úgy véljük, a nevelőnek is ily sokoldalúan, mindezeknek a területeknek nézőpontjából is meg kell ismernie osztályát, növendékeit. Csak így kap teljes és hű képet, csak így ismeri meg őket valójában.

A gyermek szociális helyzetének, pszichikumának, interperszonális kapcsolatainak megismerése mellett a ma pedagógusának az egészségügyi (orvosi) adatokat is ismernie kell egyes növendékeivel, ill. az osztályával kapcsolatban. Tehát komplex jellegű szemléletre és ebből eredően komplex vizsgálatokra van szükség. Ezeket