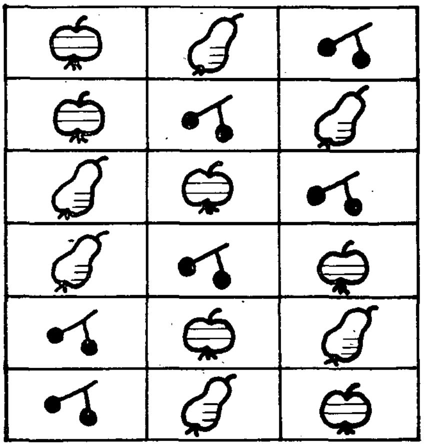
KISS ISTVÁNNÉ—BORSODI ISTVÁN
Baja, Tanítóképző Intézet

Az új tanterv szerinti kombinatorikai alapozó munka néhány tapasztalata

Emlékezetes kép: Az órának már régen vége, a gyerekek többsége a tízóraiját fogyasztja, vagy futkározik az udvaron. Három-négy kisgyermek azonban még mindig a táblai applikáció előtt vitatkozik, érvel. Egymást szeretnék meggyőzni. – Az volt a feladatuk, hogy a gyümölcsöket különböző sorrendben helyezzék el a kirakó táblán. (1. ábra) Ki talál többféle sorrendet? Hány különböző sorrend lehetséges? Négy,



1. ábra.

öt, hat, vagy talán több is? – Egyik gyerek a vita hevében a tanító nénire hivatkozik, mire a másik így válaszol: „Hát azért ezt majd még otthon kirakom, mert a *Rózsi néni néha be akar csapni bennünket*..."

Érdekes a kép, s tetszik a gyerekek vitázó kedve is. Ezeknek a gyerekeknek már van önálló véleményük a dolgokról? S milyen szenvedélyesen védik a maguk igazát!

Ezzel a kis történettel válaszolnánk legszívesebben arra a kérdésre, hogy miben hoz újat *a most bevezetésre kerülő korszerűsített matematikai tanterv.* Talán a szemléletében különbözik a leginkább a régitől. A számolási készségnek az eddig megszokott ütemű fejlesztése mellett – sőt bizonyos könnyítésekkel a követelményszintre vonatkozóan – a tanulói aktivitásnak és önállóságnak az eddiginél erőteljesebb felhasználása feltétlenül újszerű. Sok érdekes, játékos feladattal a gondolkodás fejlesztésének a formái lényegesen különböznek a megszokott formáktól. És még valami új: széleskörű tapasztalatgyűjtés szervezett formában, melynek célja a magasabb osztályokban megtanítandó fogalmak előkészítése, vagy nem tisztán megértett fogalmak érlelése éveken keresztül, s ezáltal az iskolai matematikatanításnak az eddiginél jobb alapozása.

*

A pedagógus társadalom nagy érdeklődéssel várja az új matematikai tantervet, melyet a művelődésügyi kormányzat rendelkezései szerint a következő tanévekben fokozatosan be kell vezetni az általános iskolák mindkét tagozatában. A nagy érdeklődést jelzi, hogy gyakran lehetünk tanúi – vagy részesei – szaktárgyi, ill. módszertani vitáknak, melyek az új tantervi koncepciókról, vagy azok gyakorlati megvalósításáról folynak.

Ma még az új tantervek csak körvonalaikban ismeretesek. Mindenki tudja azonban, hogy az elsődleges cél az elmúlt években már sok helyen végzett matematikatanítási kísérletek által felvetett szaktárgyi és metodikai problémák megoldása. Az új tanterv azonban nem csupán a hazai, hanem külföldi kísérletek tapasztalataira is épül.

Tíz-tizenöt éves kísérletező munka után nemrég vezettek be új tantervet a Szovjetunióban, s több szocialista, sőt egyes kapitalista országokban is. Más helyeken pedig az új tantervek bevezetése folyamatban van. Az új tanterveknek a tudományos és technikai forradalom korszakában szükségszerűen jelentkező szakmai igényesség problémáját kell összeegyeztetniük az általános iskolák meglevő adottságaival, s a gyermek teherbíró képességével.

A közelmúltban megjelent *párthatározat* is felhívja a figyelmet ezekre a tényezőkre. *Az új tanterv nem eredményezheti a tanulók túlterhelését: Az eredményesség fokozását úgy kell elérnünk, hogy közben könnyítsük a tanulók munkáját.* Ezt csak jobb tanítási módszerekkel, a tanulók munkájának jobb szervezésével, aktivitásuk, kezdeményezőkészségük, önállóságuk jobb kihasználásával lehet elérni.

*

Eddigi kísérleteink alapján a módszertani szempontból vitatott kérdések egyikéről-másikáról mondjuk el a véleményünket. Ilyen például *a kombinatorikai alapozás* problémája.

A tárgyak, személyek, számok (ún. „elemek") különböző sorrendbe való elhelyezése, vagy különböző feltételek mellett meghatározott csoportok alkotása öncélú munkának tűnik. A pszichológiai vizsgálatok mégis azt mutatják, hogy a matematikai problémák könnyed megoldásához, ill. megközelítéséhez szükséges gondolkodásmód kialakításának nagyon fontos eszköze ez a munka. A játékos kombinatorikai feladatok megoldásával a rugalmas gondolkodásmód kialakítása az elsődleges cél. Nagyon *hibázna tehát az a nevelő, aki megoldási sablonokat tanítana a kombinatorikai feladatokhoz.* Sok ilyen feladat megoldása után valamiféle megoldási sablon valóban kialakul, azonban ez csak következmény, s számunkra nem ez a fontos.

Egy-egy feladat megoldásától természetesen nem lehet csodákat várni, sőt ennek a gondolkodás fejlődésére való hatását is nehéz lenne lemérni. Eredmény csak akkor várható, *ha a tanítás egészét átszövik a kombinatorikus elemek,* mégpedig nem egy-két órán, hanem a tanítás egész ideje alatt, az első osztálytól a középiskoláig.

Mielőtt a konkrét módszertani kérdésekre térnénk, röviden összefoglaljuk az előírt kombinatorikai tantervi követelmények lényegét:

Első osztályban a kisgyerek szerezzen jártasságot egyszerű feltételeknek megfelelő minél több különböző elemből összetett alakzatok készítésében, s ezek megkülönböztetésében. (Pl. adott számjegyekből számok, színes kockákból tornyok stb.) *A második osztályban* szerezzen jártasságot adott feltételeknek megfelelő kombinatorikus lehetőségek megkeresésében. (Pl. az összes olyan kétjegyű szám felírása, amelyekben csak 6-nál nagyobb számjegyek fordulnak elő.) *A harmadik osztályban* tudjon egyszerű kombinatorikai feladatokat tevékenységgel, vagy rajzzal megoldani, a lehetőségek számát megállapítani. *A negyedik osztályban* tudjon különféle típusú és fogalmazású kombinatorikai problémák megoldásához fa-diagramokat, ill. út-diagramokat készíteni, s róluk a lehetőségek számát leolvasni.

*

A kombinatorikus játékokat igen szívesen végzik az első osztályosok. Színes gyöngyöt, golyót fűztek már az óvodában is. Színes kockákból tornyot, házat, várat építettek. Ekkor még csak az alkotás volt a játéknak a célja. Az elsősök ilyen feladatok végzése közben már gondolkodnak, összehasonlítanak, mérlegelik a lehetőségeket.

Pl. 4–4 gyerek ül egy csoportban. Mindenki nyakláncot fűz magának piros, sárga, kék, zöld, fehér golyókból. Az első alkalommal a tanító nem tesz semmi kikötést. A csoportok által elkészített nyakláncokat közösen vizsgálják. Felsorolják a gyöngyök színét, megmondják, hogy miről ismerik fel a saját gyöngysorukat. – Itt tantervi feladatunk a kísérlet eredményének a lejegyzése is, amit lerajzoltatással végezünk. A gyerekek lerajzolják a saját munkájukat, majd a csoporttársaik által készített gyöngysorokat is.

A legközelebbi gyöngyfűzésnél már kérhetjük a csoport tagjaitól, hogy ne legyen a csoportban egyforma gyöngysor. A kívánalomnak eleget tudnak tenni, ha a munka közben minden golyó felfűzése előtt megtekintik egymás munkáját is, s összehasonlítást végeznek. – A befejező mozzanat minden esetben az, hogy ellenőrizzük, a játékszabályoknak sikerült-e eleget tenni. Ha nem, akkor közösen javítja a csoport a munkát.

Ennek a játékos tanulásnak *igazi értéke, hogy a tanító csak helyzetet teremt a megfigyelendő tárgyi ismeretanyaghoz.* Így válik a gyerekből a későbbiek során kíváncsi szemlélő, majd kételkedő, kérdéseket felvető, cselekvő „játszótárs". Így lesz belőle a kezdetleges sejtések meghallgatója, megfogalmazója, és egyben elraktározója.

*

Az első osztályban gyűjtött tapasztalatok alapján képes lesz a gyerek már *másodikos* korában a kombinatorikus esetek minden lehetőségének megtalálására egyszerű feltételek között. Bemutatunk egy másodikos példát.

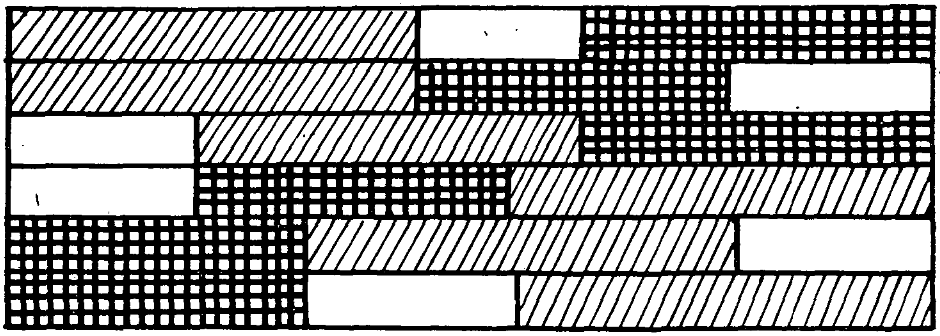
A gyerekek már jól ismerik a színes rúdkészletet. Sokféle gyakorlatot végeztek vele a bontások, az összeadás, kivonás, pótlás, sőt a szorzás és osztás fogalmának előkészítése céljából is. Most olyan *szőnyegezést* mutatunk be, melyhez jellegzetes kombinatorikai probléma (sorrendezés, permutáció) kapcsolódik.

Kirakját a gyerekek például a 20-at három különböző színnel. Az egyik gyerek választása: sötétkék (9), piros (4), fekete (7). (2. ábra.) A három rúd hossza együtt valóban 20, összeadással ellenőrzi az osztály:

$9+4+7=20$

Más választási lehetőség is van: citromsárga (5), bordó (8), és fekete (7), vagy fehér (1), sötétkék (9) és narancssárga (10) stb. Néhány gyerek elmondja, hogy milyen színeket választott, s az összeadás gyakorlására gondolva a tanító ellenőrizteti minden esetben a munkát összeadással. Ezután kiadja a szőnyegezésre vonatkozó utasítást:

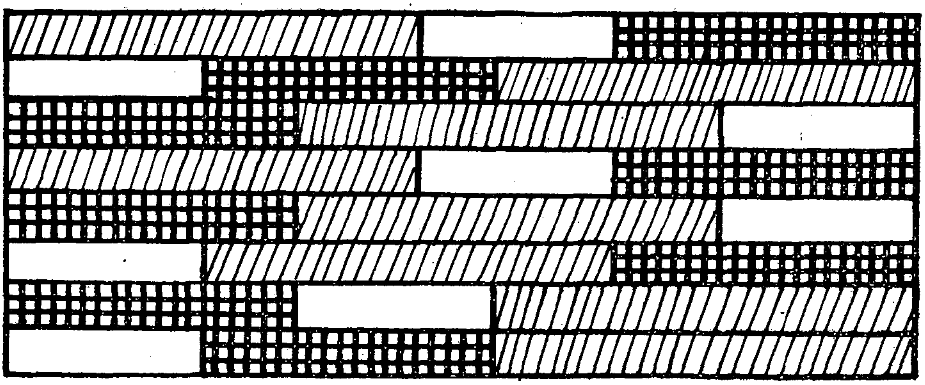
Feladat: *Csináljunk színes szőnyeget! Mindenki csak a saját maga által választott színeket használhatja fel, s a szőnyeg minden sorában legyen benne mindhárom*



2. ábra.

szín. Közben gondolkodjatok azon is, hogy vajon hány különböző sort lehet kirakni a három színből!

Mivel most még nem kötöttük ki, hogy minden sor különbözzék az előzőtől, a megoldásokban előfordul, hogy például a negyedik sor megegyezik az elsővel. (3. ábra.) Most ezt még megengedjük, s emiatt nem bontatjuk le a gyerek „szőnyegét". Sok gyerek annak örül, ha minél hosszabb szőnyeget csinálhat, s egyesek figyelmét el is kerüli, hogy ismétlődő sor van. Munka közben azonban mind gyakrabban megemlíti a tanító, hogy jó lenne minél több *különböző* sort találni. A kijelölt idő leteltével bemutatják a végzett munkákat. Megkérdezzük, kinek hány különböző sort sikerült kirakni. Általában négy, öt, hat féle kirakási lehetőséget találnak.



3. ábra.

A többség még ötletszerűen dolgozik, szabályszerűség, a sorok közötti összefüggés még alig található egy-egy tanuló munkájában. Tulajdonképpen ezt még nem is vártuk a gyerekektől. A gyakorlatnak csupán az volt a célja, hogy lehetőleg minél több változatot találjon meg mindenki önállóan, segítség nélkül. Nem baj, ha nincs meg minden permutáció.

*

Egyik következő órán ismét szőnyegezést végez az osztály, vagy egy-egy csoport. Ugyanaz *a feladat, mint az előbb volt, de a tanító a munka megkezdése előtt megkérdezi, hogy vajon hány különböző sort találhatunk majd.*

A becslést a tanulók beírják a füzetükbe, s a gyakorlat elvégzése után a kirakással kapott eredményeket majd összehasonlítják a becsült számmal. – Hogyan becsül a gyerek? Sokan emlékeznek az elmúlt órán végzett hasonló munkára, mások otthon is elvégezték már a kirakást, s előfordult, hogy otthon többet találtak, mint itt az iskolában az előző órán. Vannak, akik az óra után a szünetben a társaikkal beszélgettek a feladatról. A becslések ennek figyelembevételével alakulnak ki. Az elvégzendő feladat végiggondolása nélküli találgatásról időben igyekszünk leszoktatni a gyerekeket. Semmiféle munka eredményének becslésekor sem engedhetjük meg a teljesen ésszerűtlen, irreális adatok bemondását.

A megoldásokat vizsgálva észrevesszük, hogy több gyerek már nem ötletszerűen változtatja a számokat. Ilyen felsorolásokat találunk a feladatlapokon:

$$\begin{array}{ccc} 9+4+7 & & 9+4+7 \\ 4+9+7 & & 4+7+9 \\ 4+7+9 & \text{vagy:} & 7+9+4 \\ 9+7+4 & & 4+9+7 \\ 7+9+4 & & 9+7+4 \\ 7+4+9 & & 7+4+9 \end{array}$$

Az első tanuló mindig csak két rudat cserélt egyszerre, a harmadikat a helyén hagyta. A második pedig valamiféle ciklikus permutációt vett észre, általában az első rudat vette ki, és a sor végére helyezte, majd mindent fordított sorrendben is leírt. Ezek az „okoskodó" gyerekek, akik már rendszert keresnek a munkájuk megkönnyítése céljából.

Az egyik tanuló a munkájának indoklásakor elmondta, hogy a piros rúd kétszer lehet az első helyen, mert a másik kettőt kétféle sorrendben lehet mögötte elhelyezni. Nagyon meglepő, hogy a többi négy sorrend meghatározásakor azonban nem tudta alkalmazni ezt a logikát. Az általánosítást, hogy nemcsak a piros rúd, hanem bármelyik másik is két esetben lehet első helyen – nem tudta még önállóan megtenni. Ehhez még további tapasztalatszerzés szükséges. Ilyenkor mégsem egészítjük ki a gyerek félig jó észrevételét. Helyette inkább egyik következő órán ismét elvégeztetjük ezt a munkát, csak más tárgyak, vagy táblai applikáció felhasználásával. Meghagyjuk a gyereknek a lehetőséget, hogy ő maga vegye észre a teljes szabályt.

*

A harmadik osztályban már hasonló sorrendezést a rúdkészlet, vagy egyéb segédeszköz használata nélkül számokkal végeznek a tanulók. A feladatot például így tűzzük ki:

Képezz háromjegyű számokat a 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával!

Az előző évi tapasztalatok alapján minden gyerek megtalálja a hatféle lehetőséget, azonban egyéni utakon járnak. Többféle egyéni módszer alakul ki a sorrendezésre. Ha megfigyeljük egy-egy tanuló munkáját a feladattípusnak különböző számokkal történő kijelölése esetén, észrevesszük, hogy mindig a sajátmaga által felismert szabályt alkalmazza. Célszerűnek látszik a munka összehangolása ebben az osztályban. Ezért most azt kívánjuk a tanulóktól, hogy *a kapott számokat rendezzék nagyság szerinti sorozatba:*

$$345 < 354 < 435 < 453 < 534 < 543$$

Megfigyeltetjük, hogyan lehet egyből ezt a sorozatot képezni. Hangsúlyozni kívánjuk azonban, hogy itt sem a permutálás szabályának a megfogalmazását és megtanítását tartjuk a tanítás elsődleges céljának. Feladatunknak sokkal inkább a sorrendváltoztatásnak minél gyakoribb használatát tartjuk. Erre sok lehetőség van a szöveges feladatok megoldásakor, de még elvont számokkal adott készségfejlesztő gyakorlatok végzése közben is. (Pl. három tagú összeadások végzésekor az ésszerű sorrendet kerestetjük, vagy a háromjegyű számokkal végzett írásbeli szorzáskor a részletszorzatokat minden lehetséges sorrendben képeztetjük egy-egy gyakorló órán, s ezáltal a helyértékelés biztonságát fejlesztjük.)

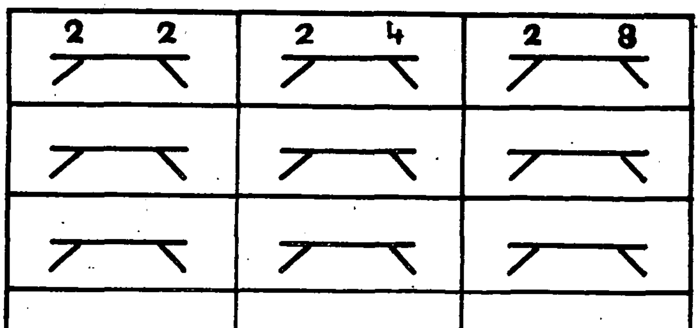
Eddig tárgyalt példáinkban a személyek, vagy tárgyak, sok esetben a számok különböző sorrendben való elhelyezése volt a kapcsolástani probléma. Háromnál több elem sorrendezését nem nagyon végezzük még az alsó tagozaton, mert sok sorrendi lehetőség van. Ha megpróbálkozunk pl. négy elem különböző sorrendben való elhelyezésével, akkor sem kívánjuk meg a gyerekektől az összes lehetőség megkeresését. (Ismeretes, hogy négy elemnek huszonnégy, ötnek százhúsz, hatnak hétszázhúsz permutációja van stb.)

*

Vannak olyan kombinatorikai feladatok is, amikor különböző feltételek mellett egy-, két, három-, négy stb. elemű komplexiókat képezünk adott halmaz elemeiből. (Az ilyen feladatok egyik formáját *variációnak,* a másikat *kombinációnak* nevezi a matematikai szaknyelv. Az alsó tagozaton azonban ezekre az elnevezésekre nincs szükség.)

Tekintsük a következő példát, melyet a második osztályban a *szorzótáblák gyakorlásával* kapcsoltunk össze. Az új tanterv szerinti oktatásban a kettes szorzótábla után a négyes táblát, ezt követően a nyolcas táblát tanítjuk. A gyerekek tehát hamarabb tanulják meg a 4-nek, sőt a 8-nak a többszöröseit, mint pl. a 3-nak a szorzatait. Ennek az a magyarázata, hogy a kettes, négyes és a nyolcas szorzatok kapcsolódnak legjobban egymáshoz, hiszen ezek egymás többszörösei. A kettes tábla minden második szorzata a négyes táblában is benne van stb. Így a szorzatok közötti kapcsolatok, s a táblák közötti összefüggések tanítása könnyebbé válik.

A gyakorlathoz tehát a 2, 4, 8 számokat választottuk, s ezeket felírtuk a táblára. Minden gyerek kapott egy-egy feladatlapot is. (4. ábra.)



4. ábra.

Feladat: Ültesd a táblán látható számokat a kispadokra! A pad mindkét végén üljön egy-egy szám. Egyezzünk meg abban, hogy ugyanaz a szám lehet a pad mindkét végén is. Kíváncsi vagyok, hogy ki hány padra tudja leültetni ezeket a számokat. Két padon egyforma ültetés azonban nem lehet, minden padon valami más, a többitől különböző számpár legyen.

Munka közben észrevesszük, hogy egy-két gyerek nehezebben érti meg, hogy mi a teendője. Ezeknek külön is segít a tanító. Rávezeti a helyes munkára: Hogyan tudnád másképpen fogalmazni a kérdést? Hány különböző számpárt lehet alkotni a felírt számokból? stb.

A tapasztalat hasonló az egyszerű sorrendezésnél végzett munka során szerzett megfigyelésekhez. Kezdetben a legtöbb gyerek ötletszerűen ír egymás mellé számokat. Néhányat megtéveszt még az is, hogy a feladatlapra több padot rajzoltunk, mint ahány különböző számpár képezhető a három számból. Sokan úgy vélik, hogy minden padra írni kell valamit, s ezért vannak ismétlődések. A munkára adott idő leteltével a csoportok együtt elemzik egy-egy tanuló munkáját. Olyan légkört alakítottunk ki, hogy a gyerekek bátran mondják el észrevételeiket. Így aztán jól megbírálják egymás munkáját. A tanító néhány feladatlap megoldását gyorsan lemásolja és az írásvetítővel ki is vetíti az osztálynak. Most minden csoport ezt figyeli és értékeli. Bemutatunk néhány ügyes megoldást is.

2,2	4,2	8,2
2,4	4,4	8,4
2,8	4,8	8,8

Az értékelések befejezése után számolásra használjuk fel ezeket a számpárokat: tegyünk közéjük összeadás, majd kivonás, szorzás jeleket! A kivonás végzésekor találunk olyanokat is, melyeket még nem tudunk elvégezni. Kitűzzük a feladatot: Keress olyan párokat, amikor a kivonást nem tudod elvégezni! (Felsorolják ezeket: 2–4, 2–8, 4–8.)

*

Konklúzió. Az új tanterv által kijelölt kombinatorika alapozó feladatok jól szolgálják a gondolkodás fejlesztését. Különösen alkalmasak a kiscsoportos, differenciált foglalkozások szervezésére. A tanulók munkáját nem nehezítik, sőt a játékos manipulatív tevékenységből fakadó motiváló erejük miatt igen szívesen foglalkoznak ilyen feladatokkal a gyerekek. Igen jól kapcsolhatók a számtani és mértani készségfejlesztő gyakorlatokhoz, s így a legkülönbözőbb formákban használhatók a gyakorló órákon.