Példák: — Egyszerűsítsd a következő törteket: . . . . — Színezd be az adott szakasz (adott téglalap) $^3/_5$ részét! — Számítsd ki az ábrán feltüntetett méretek alapján a téglatest felszínét! (térfogatát!).

Az említett típusok azonban ritkán jelennek meg a maguk teljes tisztaságában. Legtöbbször keverten, bonyolultan fordulnak elő egy-egy feladatban. Vagyis a mérőlapok általában összefonódott kérdéseket tartalmaznak, logikai szempontból különböző jellegű, funkciójú részfeladatokból tevődtek össze.

Pl. az „Egy óra hatoda hány perc?" feladatból tulajdonképpen csak a „hatoda" szó elhagyásával kapunk olyan kérdést, amelyre vitathatatlanul ráillik az egyszerű ténykérdés elnevezés.

Azt is láthatjuk, már e néhány példából is, hogy a megoldandó feladatok a tanulók számára, különféle *kérdésformákban* jelennek meg (pl. rákérdezés, utasítás, kiegészítéses kérdés stb.). Ezekkel itt nem foglalkozunk, ehelyett utalunk a vonatkozó irodalomra [6].

Bizonyos fenntartásokkal azt mondhatjuk, hogy a témazáró mérőlapok és a javítókulcsok együttese által felölelt ismeret-feladat-halmaz izomorf a felsőtagozati matematika tankönyvek kötelezően elvégzendő fejezeteiben foglalt ismeret-feladat-halmazzal (tehát, ha a tankönyvek feladattárához hozzászámítjuk a különböző megjelenési formájú definíciókat, szabályokat, kiegészítő megjegyzéseket és utalásokat is; utóbbiakból azonban csak a témák szempontjából lényegeseket, a tartós emlékezetbentartásra érdemeseket).

(Következik a befejező rész)

DR. MOSONYI KÁLMÁN
Szeged, Tanárképző Főiskola

Fogalomalkotás és fogalombővítés az általános iskolai matematikaórákon

A matematikatanítás korszerűsítésével kapcsolatos törekvések és világszerte folyó kísérletek mind szélesebb formában vetik fel a ma még sokfelé uralkodó műveletközpontú szemlélet megváltoztatásának szükségességét. Progresszív felfogású kutatók részéről ilyen igény már régebben is felvetődött, a mai törekvések azonban ennél egy lépéssel tovább mennek: szembefordulnak azzal a felfogással, hogy a természetes szám fogalma az iskolai matematikatanítás kizárólagos kiindulópontja kell legyen. A konzervatív álláspont ezzel szemben azon a címen, hogy a gyakorlati életben elsősorban erre van szükség, a négy alapművelet minél erősebb készségi fokon való elsajáttításását tekinti legfontosabb feladatának, esetleg megelégedve a gépies, idomítás határát súroló eljárással, lemondva még a belátásról, megértésről is.

Elég egy kicsit jobban ismerni a matematikát, annak az életben, a társadalomban játszott szerepét ahhoz, hogy a konzervatív szemlélet káros, fejlődést akadályozó voltát belássuk. Vizsgáljuk először úgy kérdést, hogy a természetes számnak az iskolai matematikaoktatásban jelenleg meglevő domináns szerepét nem bolygatjuk, majd továbblépve, a mai korszerűsítési törekvések jegyében nézzük meg azt is: Helyes-e a természetes számokat az egész matematikatanítás kiindulópontjának tekinteni?

A matematika az emberi gondolkodás jellegzetes terméke. A gyakorlati élet problémái hozták létre, a társadalom igénye fejlesztette, az absztrakció révén emelkedett a mai magas fejlettségi fokra. „Egyesíti magában a logikát és a szemléletet, az analízist és a szerkesztést, a jelenségek individualizálását és a megjelenési formák absztrakcióját." [2]

A matematikatanítás már kezdettől fogva absztrakt fogalmakkal dolgozik: már a természetes szám is absztrakció eredménye. Látunk az életben 5 almát, 5 diót, 5 széket, 5 gyermeket s. i. t., s ezekből az 5 elemet tartalmazó halmazokból absztraháljuk magát az 5-öt. Ez az absztrakció nem is olyan egyszerű, az egyén gondolkodásának elég magas szinten kell lennie ahhoz, hogy a számnak absztrakt jellege tudatos legyen. Gyakran tapasztaljuk gyermekeknél, hogy szavakban már az elvont természetes számokkal számolnak, de gondolatban az absztrakt vázat „felöltöztetik", szemléltetik önmaguknak ujjakon, pálcikákon, golyókon. Ez a társítás egészen természetes, a számfogalom ekkor még nem elég tiszta, világos.

Szemléltetéssel és absztrakcióval megkapjuk a hagyományos módon felépített matematikatanítás alapfogalmát, a természetes számot. A fogalom a megismerés terméke s egyben a megismerés eszköze is: a gyermekek megállapítják egyes véges halmazoknak azt a tulajdonságát, hogy mindegyikben ugyanannyi elem van, eltekintenek a halmazokban levő tárgyak egyedi tulajdonságaitól, kiemelik közös tulajdonságukat, egyenlő számosságukat, s eljutnak az absztrakt természetes szám fogalmáig. Ez a fogalom természetesen sohasem lesz teljes, először csak annyit tudnak pl. a 6-ról, hogy $5+1$, azután, hogy $4+2$, $3+3$, ... $10-4$, $8-2$, ... majd megtudják, hogy $3 \cdot 2$, később azt is, hogy $\frac{12}{2}$ és így tovább, de már régen azt hiszik, hogy ismerik a 6-ost, amikor megtanulják, hogy $\sqrt{36} = 6$, majd azt, hogy $\log 1\,000\,000 = 6$. A megismerés magasabb fokán a régi fogalmak ponosabbakká válnak, új tulajdonságaikkal, új összefüggéseiket ismerjük meg. A tanítás bizonyos fokozatain csak az a fontos, hogy alaposan ismerjék a gyermekek a fogalomnak annyi tulajdonságát, amennyi a továbbhaladáshoz, új ismeretek szerzéséhez elegendő.

A természetes szám fogalmát tehát úgy ismerik meg a gyermekek, mint a véges halmazok egy tulajdonságát, a számosságát. Ugyanakkor a matematikus a természetes számokat a Peano axiomákkal definiálja, s e ponton úgy látszik, mintha az iskolai matematika ellentétbe kerülne a matematika tudományával. Ez az ellentét azonban csak látszólagos. Az iskolában a gyermekek életkora miatt nem használhatjuk a Peano axiomákat, a matematikában viszont nem ez az egyetlen mód a természetes számok definíciójára. Erre példát mutat Herbert Lugowski potsdami professzor munkája [6].

Az absztrakt fogalmak, amelyekkel már az első osztályban dolgozunk, azt a kötelességet róják a pedagógusokra, hogy a fogalmat a matematikaórákon igen gondosan alakítsák ki, elég tiszta és világos legyen ahhoz, hogy a gyermekek továbbhaladását biztosítottnak tekinthessük. Jó tradíciója a magyar oktatásügynek, hogy ezt a munkát az első osztályban dolgozó pedagógusoknak túlnyomó többsége gondosan és alaposan végzi. Amikor azonban a felső tagozatban a fogalom bővítésére kerül sor, újabb problémák vetődnek fel, amelyeket nem tekinthetünk megoldottaknak.

Az ötödik osztályban vezetjük be a törtszám fogalmát, mégpedig a jelenlegi Tanterv szerint időben ugyan kissé elkülönítve, gyakorlatilag azonban párhuzamosan a közönséges és a tizedestört alakot. (Természetesen itt még csak véges tizedestörtekről van szó.)

Az első probléma az, hogy új fogalom bevezetéséről beszélünk, pedig matematikai szempontból nézve fogalombővítést hajtunk végre. A szorzás korlátlanul és egyértelműen elvégezhető a természetes számok halmazában, de nem invertálható, azaz az osztás csak bizonyos esetekben végezhető el. (Az oszthatóság problémája.) Az invertálhatóság érdekében definiáljuk a törtszámokat, ez a definíció azonban a permanencia elvnek megfelelően úgy történik, hogy az új fogalom tartalmazza a régit, mint speciális esetet. Ilyenformán nem új fogalmat alkotunk, hanem a régit bővítjük, a természetes számok helyett a pozitív racionális számokat ismerjük. A gyermekek viszont hajlamosak arra, hogy frissen szerzett új ismereteiket élesen elválasszák régi ismereteiktől, amelyekben már jártasságok és készségek birtokában vannak. A halmazok éles szeparálása azt eredményezi, hogy a gyermekek meglepődnek pl. azon, hogy két tizedestört szorzata esetleg egész szám is lehet. Éppen ezért komoly hibát vét az a tanár, aki gyakorlatiasság ürügyén elnagyolja a fogalom kialakítását, a régi fogalmak átértékelését, esetleg még a nagysági relációkra sem tér ki, hanem igyekszik minél előbb megkezdeni a műveleteket. A halmazok éles elkülönítése még abban is megnyilvánul, hogy a gyermekek a törtszám két alakját, a közönséges és a tizedestörtet is elválasztják egymástól, még azoktól a feladatoktól is idegenkednek, amelyekben a törtszámok mindkét alakban előfordulnak.

Tartalmában ugyanezzel a problémával állunk szemben a nyolcadik osztályban is a negatív számok bevezetésénél. A negatív számot is mint új fogalmat vezetjük be, pedig itt is a régi fogalom bővítéséről van szó. A kivonás (az összeadás inverz művelete) korlátlan és egyértelmű elvégezhetősége érdekében definiáljuk a negatív számokat. Természetesen ennél a definíciónál is tartalmazza az új fogalom a régit, mint speciális esetet. Az ötödik és a nyolcadik osztályban végrehajtott két fogalombővítéssel jutunk el a természetes számok halmazától a racionális számtestig. A nyolcadik osztályban végrehajtott második fogalombővítésnél is számítanunk kell a halmazok szeparálásának bekövetkezésére, ami pl. abban nyilvánul meg, hogy a gyermekek nem értik, hogyan lehet két negatív szám szorzata pozitív szám. A régi és az új fogalom magasabb egységbe való összeolvasztása tehát itt is szükséges, itt sem kezdhetünk hozzá azonnal a műveletekhez, nem kerülhetjük el a fogalmak összekapcsolásával járó aprólékos munkát.

Ugyancsak gondot okoz a fogalom és annak jele közötti összhang kérdése. A természetes számok jelölésére használt tíz jel segítségével a többjegyű számok leírása, értelmezése gondos munkát kíván, de jól szemléltethető, s általában miatta nem kerül sor tömeges hibázásra. A törtszám $\frac{a}{b}$ alakú jelölése azonban azt a képet alakíthatja ki a gyermekekben, hogy a törtszám nem egy szám, hanem kettő, hiszen két számmal jelöltük. Ezt a hamis képet alátámasztja az az eléggé elterjedt téves és megtévesztő állítás, hogy a tört kijelölt osztás. Ezzel a megtévesztéssel a gyermekek a legjobb indíttatást kapják affelé, hogy azt gondolják, hogy $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, vagy hogy $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{bc}$.

Komoly nehézséget kell a tanárnak legyőznie akkor, amikor a gyermekek ismereteit aritmetikai szintről algebrai szintre akarja emelni. Ha ez az átvezetés formálisan, a gyermekek életkorának nem megfelelő módon történik, akkor a gyermekek az algebrai szimbolika világában idegenül fognak mozogni. Ez természetes, hiszen éppen a nagysági relációk kapcsolódnak ki, amelyek az aritmetika első lépéseinél a vezető szerepet játszották, s azóta is éveken át erős hangsúlyt kaptak tanításban és gyakorlatban egyaránt. Az algebrai jelöléssel kapcsolatos nehézségek az algebra alapfogalmainak tisztázatlan voltából erednek. Az algebratanítás kezdeti szakaszának sok hibája, valamint az emberek jelentős részének az algebrától való idegenkedése az algebrai alapfogalmak megalapozatlanságában leli magyarázatát. A matematikatanítással foglalkozó magyar nyelvű szakirodalomból kiemelkedik Faragó László e témával foglalkozó tanári segédkönyve [5] és cikke [4]. Előbbi I. sz. függelékében részletesen kidolgozott módszert is ajánl a gyakorló pedagógusok figyelmébe. Az algebrai alapfogalmak gondos kialakítása segítségével felszámolhatjuk azt a súlyos szakadékot, amely ma még sok ember tudatában az aritmetikai és algebrai ismeretek között megvan.

A fogalom és jele közötti összhang kérdésének egy speciális esete az is, amikor az elnevezés okoz gondot a tanításban. Ez különösen akkor nagy gond, amikor az elnevezés nem szemléletes vagy ha matematikai tartalma nem azonos azzal, amit a szó a mindennapi életben jelent. Az elsőre példa a „hányados" szó, amelyet az osztás eredményének jelölésén kívül semmire sem használunk. Tapasztalhatjuk, menynyire nem tiszta ez a fogalom a gyermekek tudatában, ha a szöveges feladatnál belefogalmazzuk a szövegbe a hányados szót, s a hibás megoldások száma nagymértékben megemelkedik [7]. A másikra példa a „hasonlóság" szó, amelynek más értelme van a geometriában, mint a mindennapos szóhasználatban, s ez a mértanórákon sorozatos hibák forrása [7].

Szólni kell még a fogalomrendszerekről, a fogalmak egymással való kapcsolatairól. Ez lényegében a fogalomalkotás és fogalombővítés problémája, amiről már az előzőkben szó esett: a gyermekek gyakran nem értik bele az új fogalomba a régit, mint speciális esetet. Ha a tanítás során nem hangsúlyozzuk elég határozottan a fogalmak összefüggéseit, akkor az általános iskolánál magasabb fokon is találkozunk azzal a jelenséggel, hogy a tanulók a valós szám fogalmába nem értik bele a racionális számokat, a komplex szám fogalmából kirekesztik a valós számokat s. i. t. Ugyanez a téves felfogás a matematikatanítás más területein is tapasztalható, pl. általános iskolai fokon a síkgeometriai idomok egymással való kapcsolatának félreértésénél.

Befejezésül térjünk ki röviden arra a problémára: Helyes-e a hagyományos matematikatanításnak az az elgondolása, hogy a természetes szám fogalmára építi fel az iskolai matematika tantárgyat, s ha válaszunk nemleges, hogyan fog módosulni tanításunk a közeljövőben.

Az iskolai matematika szétválik aritmetikára, algebrára, geometriára, analízisre. Ezeken belül további elágazások vannak, gondoljunk pl. a geometria különböző részeire. A differenciálódás mellett azonban jelentkeznek az átmenetek, a kapcsolatok is, pl. a területszámítás geometria-e, aritmetika-e vagy a képlet felírásával az algebrába vezet át bennünket? A Tantervekben jóval később szereplő analízis elemei is korán megjelennek, pl. a szakaszos tizedestörteknél, a kör területénél, a gyökvonásnál és még sok más helyen. Jellemző Kolmogorov megjegyzése: „A középiskolában tanított ‚algebra' megközelítő gyökvonásaival, logaritmusaival stb. szinte inkább az analízis (vagy az analízisbe való bevezetés) első fejezete, mintsem sajátosan tiszta algebra." [3] A szétválások és összekapcsolódások akarva akaratlan felvetik a szintézis szükséges voltát.

A probléma nem sajátosan iskolai jellegű, a matematika tudományában is felvetődik az egységesítés, a szintézis keresésének az igénye. Elegendő, ha e kérdésnél a Bourbaki-csoport* ilyen irányú törekvéseire gondolunk. Bourbaki törekvése a szétágazó matematika különböző területeinek összefogására, a közös nyelv megtalálására, a matematika jobb áttekintésére az iskolai matematikaoktatás területén is gondolatébresztő: a tananyag ne a részterületek laza összefüggése legyen, hanem egységesen épüljön fel.

Bourbaki a matematika szintézisének lehetőségét a halmazelméletben találta meg, így érthető, ha a matematikatanítás korszerűsítését célzó elgondolások is elvetik a természetes szám primátusát, s a halmazelméletre kívánják építeni az új iskolai matematikát. Nem tagadják a szám alapvető jelentőségét, de állítják, hogy a hagyományos felfogás pontatlanul ítéli meg a szám szerepét az iskolai matematika tantárgyban, a matematikai gondolkodás kialakításának folyamatában. A halmaz, a halmaz eleme, részhalmaz, relációk, rendezés fogalma kialakítható a szám fogalma nélkül is. A szám a halmazoknak egy nagyon fontos tulajdonságát, a számosságát fejezi ki, de nem ez az egyetlen tulajdonsága a halmazoknak. Azok a nehézségek, amelyek a szám meghatározásával kapcsolatban fennállnak, nem jogosítanak fel bennünket arra, hogy a matematikai fogalmak rendszerében elsődlegesnek tekintsük a számot.

Nem célja ennek a munkának, hogy a matematikatanítás korszerűsítése érdekében polemizáljon a reform ellenzőivel. Amikor azonban az iskolai matematikaórák fogalomalkotásairól, fogalombővítéseiről írunk, gondolnunk kell arra is, hogy a jövő iskoláiban más lesz a matematikai fogalmak rendszere, mint a maiban, több fogalom szerepel, ezek időrendben sem lesznek olyan közel vagy távol egymástól. E téren utaljunk csak arra, hogy a jelenleg folyó kísérletekben a számfogalom bővítése lényegesen korábban megtörténik, s az érési idő jelentősen meghosszabbodik. A változásokra való felkészülés jegyében is tudnunk kell, hogy a fogalmakat mindig a gyermekek életkorának megfelelően kell kialakítanunk, kapcsolataikat, összefüggéseiket felfedeztetnünk. A hagyományos matematikatanítás mellett is káros a műveletközpontú szemlélet, módszertani hiba a fogalmak felszínes kialakítása, a korszerűsített matematikatanítás még erősebben aláhúzza a fogalmak és összefüggéseik gondos megalapozásának szükségességét.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése. Budapest, 1972.
[2] Courant—Robbins: Mi a matematika? Budapest, 1966.
[3] Elkonyin—Davidov: Életkor és megismerés. Budapest, 1972.
[4] Faragó: Az absztrakció és az elemzés nehézségei az algebra tanításának kezdeti szakaszában. Pszichológiai Tanulmányok IV. Budapest, 1962.
[5] Faragó: Szöveges feladatok megoldása egyenlettel. Budapest, 1960.
[6] Lugowski: Eine axiomatische Grundlegung des anschaulichgenetischer Aufbaus der Arithmetik in der Schulmathematik. Potsdam, 1962.
[7] Mosonyi: Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórákon. Budapest, 1972.

* Bourbaki nem egy ember neve, hanem francia matematikusok egy csoportjáé, akik ezen az álnéven közösen publikálják a munkáikat. Időnkint új tagokat vesznek fel, a 40 évet elértek viszont kiválnak a csoportból, így a csoport életkora átlagában nem növekszik.