KUNSTÁR JÁNOSNÉ DR.
Szeged, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola

A matematikai feladatokban rejlő lehetőségek kihasználásáról

A legtöbb matematikai feladat több oldalról közelíthető meg, többféle megoldási módja van. Ennélfogva alkalmasak a változatos problémafelvetésre, elősegítik a sokoldalú és mélyebb megértést, hozzájárulnak a következtetések, az általánosítások levonásához és a különböző képességek kibontakoztatásához.

Az ideiglenes matematikai tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához megjelent „MUNKALAPOK" feladatai közül igen sok alkalmas arra, hogy megmutassuk a feladatban rejlő előbb említett lehetőségeket.

Egy feladat ismertetése után célszerű a tanulók figyelmét felhívni újabb összefüggések kerestetésére, és lejegyzésére. Az osztály tanulói nagy valószínűséggel különböző úton indítják el gondolatmenetüket. Az egyéni ötletek megvalósításához szükséges az, hogy önálló munkával jussanak eredményhez.

Az önálló munkát akár a tanítási órán, akár otthon történik, mindenképpen szükséges utána az osztályközösséggel megbeszélni. Az önálló munkának lényeges része a közös megbeszélés eredményeként kapott jóváhagyás, esetleg javítás. A tanuló megtalál egy helyes megoldást, esetleg többfélét. Célszerű a legrövidebb utat is keresni. *Ez fejleszti a számolási készség mellett a matematikai gondolkodási módot is.*

Szükséges megjegyezni, hogy nem kell minden tanulónak mindent észrevennie. A különböző megközelítés, többféle megoldás, a feladat továbbfejlesztése csak mint előforduló lehetőségek szerepelnek.

Minden észrevétel igen értékes lehet. Túlzás is lenne mindent egy feladatba belletömöríteni. Választási lehetőség van – a közvetlen anyagtól függően –, hogy mikor melyik területre térjünk ki részletesebben. Pl.: a számkör bővítésével más-más alaphalmazon vizsgálható egy-egy tulajdonság. Tekintetbe kell venni azt is, hogy egy-egy tulajdonság több, különböző jellegű feladat alapján is tárgyalható. Ezek szolgálják voltaképpen a többoldalú megközelítést.

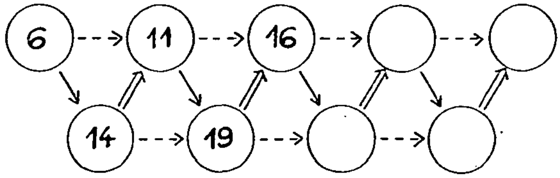
Az alábbiakban néhány feladat kapcsán rámutatunk a bennük rejlő lehetőségek kiaknázására.

Az 5. osztályos 20. munkalap 2. *a)* feladata újszerűségénél fogva feltétlenül figyelemre méltó. Első (felületes) rátekintésre nem sok számolási lehetőséget ígér. Talán még a benne levő lehetőségek sem láthatók át azonnal. Éppen ezért érdemes részletesebben szemügyre venni.

A feladat a következő:

Az üres körökbe írj be olyan számokat, amelyek megfelelnek a nyilak jelentésének! (1. ábra.)

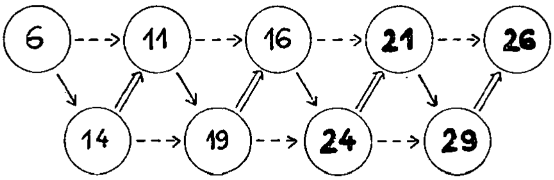
$\longrightarrow$ jelentése: +8
$\Longrightarrow$ jelentése: —3
$\dashrightarrow$ jelentése: ... (?)



1. ábra.

A feladat utasitását végrehajtva bekerülnek a hiányzó számok. (2. ábra.)

A néhány szám beírása még nem eléggé használta ki e feladat adta lehetőségeket. Az ezek után következő szabályosságok és kapcsolatok észrevétele és rögzítése segíti az ismeretek elmélyítését, illetve újak létrejöttét.



2. ábra.

Megjegyzés: a továbbiakban a baloldali oszlopban a feladatban szereplő tényeket ismertetjük. A jobboldali oszlopban a matematikai ismeretanyaggal való kapcsolatát írjuk le.

Minden egy sorban levő tag jobbra 5-tel nagyobb.	*Sorozatok* képzése.
Minden balra következő tag 5-tel kisebb. (A nyilak irányát megfordíthatjuk színessel.)	Az összeadás *fordított művelete* a kivonás.
Megfigyelés: két szomszédos számhoz többféleképpen eljuthatunk. Pl.:	Az összetett kifejezések többféle értelmezése és leírása.
1. 6–11-ig eljuthatunk a megadott utasítás alapján: $(6+8)-3=6+(8-3)=$ első lépés után, ennyit változott $=6+5=11$	Az *összeg* tagjai *csoportosithatók.*
2. A 14-től a 19-ig eljuthatunk így is: $(14-3)+8=14+(-3+8)=$ ↑ első lépés után, ↑ ennyit változott $=14+5+19$	*A zárójel szerepe* az összetett feladatokban.
3. A 6-tól a 26-ig eljuthatunk: *a)* a rövidebb úton: $6+4\cdot5=26$ *b)* cikkcakkban: $6+4\cdot8+4\cdot(-3)=6+32-12=26$	*Alapműveletek* elvégzésének *sorrendje.* *Racionális számok szorzása.* *Előkészíti:* *a)* a távolság fogalmát; *b)* háromszög-egyenlőtlenség fogalmát.
4. A 6-tól a 26-ig eljuthatunk (rövidebben jelölve) a következőképpen: $6+4\cdot8+4\cdot(-3)=6+4\cdot(8-3)=26$	*A szorzás disztributív* tulajdonsága. *A kiemelés* egyszerűbbé teszi a számolást.
5. A 6-tól a 26-ig eljuthatunk így is: $6+8+3\cdot5-3=26$	*Következtetés* más úton. Az eredmények egyenlők. *A megoldás ellenőrzése.* Célszerű más úton is megoldani a feladatot.

Készíthető az előzőhöz hasonló feladat azzal a módosítással, hogy összeadás és kivonás helyett szerepel szorzás és osztás, vagy összeadás és kivonás és osztás. Így lehetőség adódik a disztributív tulajdonságnak az alkalmazására.

A lejegyzett művelet lehet például:

$$(6-4):2=\frac{6}{2}-\frac{4}{2}$$

Számítsuk ki:

a) Az első sor 10. tagját. (A tagokat leírjuk.)

Előkészíti a számtani sorozat n-edik tagjának kiszámítását.

b) Az első sor 75. tagját. (Nem írjuk le a tagokat.)

Az 1. sor minden tagja 5-tel osztva 1 maradékot ad.

A 2. sor minden tagja 5-tel osztva 4 maradékot ad.

Előkészíti a maradékos osztással a kongruenciákat.

Ennyi tag felírása alapján nem célszerű további megállapításokat tenni. Ugyanis egymás alatt és átlósan is csak legfeljebb két szám van, abból pedig nincs „jogunk" további következtetéseket levonni.

Utasítás: Egészítsük ki a feladatot fent és lent is további sorokkal úgy, hogy minden sor szélső tagjaitól is tudjunk az eddig felírt számokhoz két irányban is nyilat húzni. Folytassuk az újabb sorok felírását mindaddig amíg csak tudunk újabb számot felírni!

A kiegészítés után a 3. ábrának megfelelő rajz lesz a füzetben.

Gyakorlás (összeadás és kivonás és ellenőrzése).

Előkészítés (a végtelen sorozat fogalma. Pl. Meddig folytathatnánk a számok írását jobbra, vagy balra?)

A továbbiakban tekintsünk el a nyilak irányától, csak egy utat jelentsenek a vonalak, amelyen haladni lehet. Tisztázandó, hogy az úton csak előre haladhatunk, visszakanyarodás nincs!

Az utak könnyebb összeszámlálása érdekében célszerűbb a feladat modelljét felrajzolni. (4. ábra.) (A nyilakat elhagyjuk. Az utak számát írhatjuk a körök alá. A körökbe jó beírni a számokat, hogy könnyebben beszélhessünk róluk!)

a) Hány úton juthatunk el a –6-tól a 16-hoz?

b) Hány úton juthatunk a –6-tól a középső sor tagjaihoz összesen?

c) Hány úton juthatunk el a –6-tól a 38-ig?

Kombinatorikai feladatok megoldása.

Általánosítás: Mivel minden számhoz a felső jobb és felső bal szomszédtól is eljuthatunk, így minden számhoz vezető utak száma egyenlő e két szám mellé írt utak számának öszszegével.

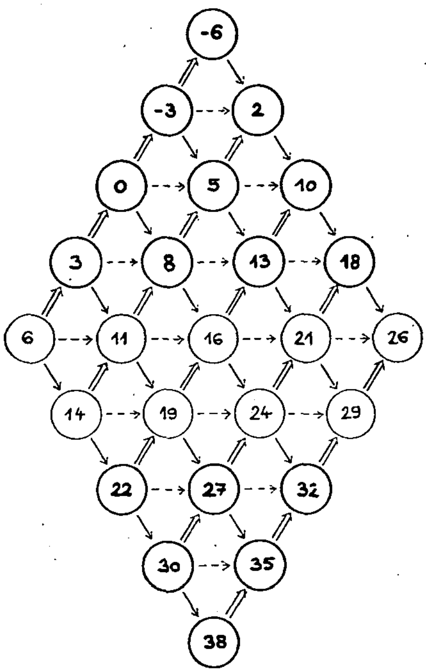
1. Körülkerítendők a „nem pozitív számok", majd a többiek! Milyen tulajdonságuk alapján tartoznak egy halmazba az utóbbiak? (Pozitív számok.)

Halmazképzés:

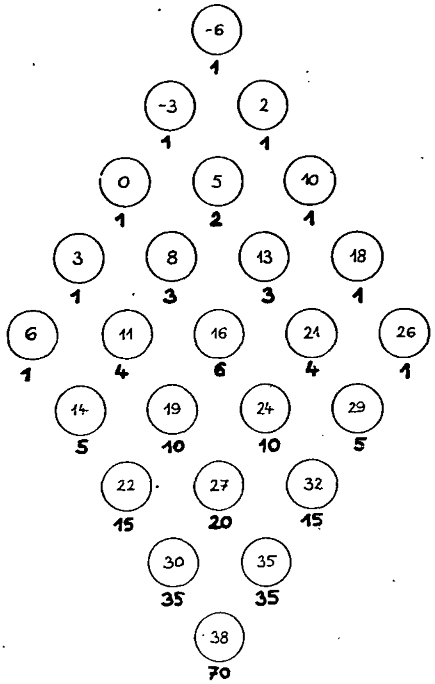
a) Adva a közös tulajdonság. Meg kell keresni az összes ilyen tulajdonságú elemet.

b) Adva egy halmaz összes eleme. Meg kell keresni a közös tulajdonságot, amely minden elemére igaz, és a többire egyre sem.

Megjegyzés a feladat alapján: Egész számok összege és különbsége csak egész szám lehet.



3. ábra.



4. ábra.

2. Kerítsük körül piros színessel a 8-cal osztható számokat, majd feketével a többit! Milyen tulajdonságúak az utóbbiak? (8-cal nem oszthatók.)

A piros színessel jelölt halmazba tartozó számok is *mind* egész számok *és* nem negatív számok, *tehát* természetes szám.

A *logikai* kifejezések mind, és, nem, tehát, ebből következik, pontos használatára is van lehetőség.

BALOGH VIKTÓRIA
Eger

Halmazdiagramok alkalmazása a geometriai fogalmak kialakításában

A matematika anyag korszerű feldolgozása a halmazelméleti alapokra épül, amely formálja a tanulók gondolkodásmódját, szemléletmódját. A fogalmak fölé- és alárendelt kapcsolatait halmazokkal történő magyarázattal és ezek felismertetésével tehetjük világossá, és halmazdiagramokkal tehetjük szemléletessé.

Az általános iskolában a matematikai fogalomalkotások több területén kínálkozik a halmazokat illusztráló diagramokkal való szemléltetés pl.: a számok, pon-