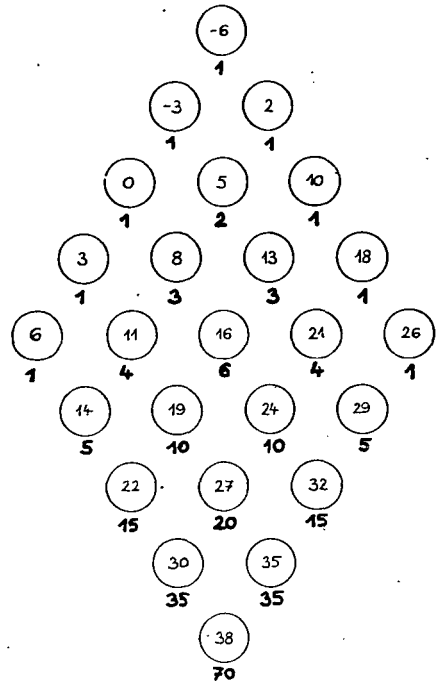


3. ábra.

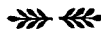


4. ábra.

2. Kerítsük körül piros színessel a 8-cal osztható számokat, majd feketével a többit! Milyen tulajdonságúak az utóbbiak? (8-cal nem oszthatók.)

A piros színessel jelölt halmazba tartozó számok is *mind* egész számok és nem negatív számok, *tehát* természetes szám.

A *logikai* kifejezések mind, és, nem, tehát, ebből következik, pontos használatára is van lehetőség.



BALOGH VIKTÓRIA
Eger

Halmazdiagramok alkalmazása a geometriai fogalmak kialakításában

A matematika anyag korszerű feldolgozása a halmazelméleti alapokra épül, amely formálja a tanulók gondolkodásmódját, szemléletmódját. A fogalmak fölé- és alárendelt kapcsolatait halmazokkal történő magyarázattal és ezek felismertetésével tehetjük világossá, és halmazdiagramokkal tehetjük szemléletessé.

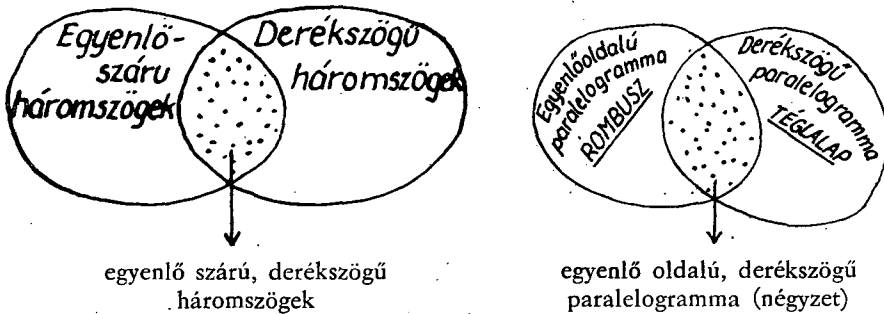
Az általános iskolában a matematikai fogalomalkotások több területén kínálkozik a halmazokat illusztráló diagramokkal való szemléltetés pl.: a számok, pon-

tok, egyenesek, síkidomok, mértani testek stb. halmazainak és közöttük levő kapcsolatainak bemutatása. Néhány síkgeometriai fogalom megszilárdításához szeretnék példákat bemutatni, amelyek már a jelenlegi, normál tantervi feladataink eredményesebb megvalósítása érdekében is alkalmazhatók.

I. A geometriai összefoglalások jobb áttekintését segítik a halmazdiagramokkal való ábrázolások.

A négyszögek, a háromszögek halmazában azok részhalmazairól, közös részeiről szerezhetnek tapasztalatot a tanulók, ha azt rajzosan is kivetítjük. A halmazokban való szemléltetés, gondolkodás segítheti pl.: a síkidomok halmazában az általános és egyedi, a speciális kapcsolatok felismerését.

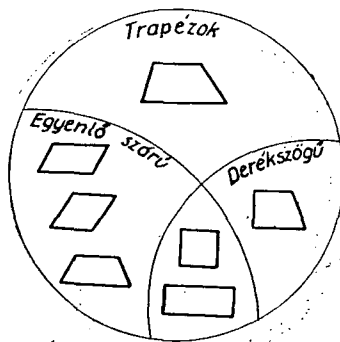
A 6. osztályos tankönyvhöz készült Feladatlapok 14. a) és b) feladata a halmazok közötti kapcsolatok vizsgálatát tartalmazza. A tanulók két halmaz metszetét vizsgálják a rajzok segítségével; a két halmaz metszete új halmazt alkot, a két halmaz tulajdonságait egyesíti. Pl.:



A trapézokról a 7. osztályban tanulnak a gyermekek. Két különleges tulajdonság szerint csoportosítja a tankönyv a trapézokat:

- a trapézok lehetnek **egyenlő szárúak**,
- a trapézok lehetnek **derékszögűek**.

Mágneses táblára felrakva csoportosíthatjuk a trapézmodelleket a tankönyvben kiemelt két tulajdonság szerint:



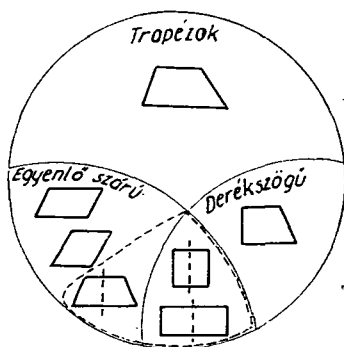
A gyermekek könnyen felismerik, hogy a paralelogramma, a rombusz, a téglalap, a négyzet is az egyenlő szárú trapézok halmazába tartozik, mert a trapézokra vonatkozó tulajdonságokkal rendelkeznek. De a négyzet és a téglalap a derékszögű trapézok halmazába is beletartozik, mert azok tulajdonságainak is eleget tesz.

Tehát a négyzet és a téglalap az egyenlő szárú trapézoknak és a derékszögű trapézoknak is eleme. Ezért úgy helyezzük el a modelleket, hogy kifejezzük a négyzetnek és a téglalaprak mindkét halmazhoz való tartozását. A tanulók maguk is képesek megfogalmazni ezen szemlélet alapján, hogy „a négyzetet és a téglalapot egyenlő szárú, derékszögű trapézoknak is nevezhetjük”.

Ez a vizsgálódás, – a halmazdiagramoknak az alkalmazása vezet el a trapézoknak más szempontból való csoportosításához.

Ha a szimmetrikus tulajdonság alapján vizsgáljuk a trapézokat, akkor a trapézok halmazában a „tengelyesen szimmetrikus trapézok” az egyenlő szárú trapézoknak egy részhalmazát képezik.

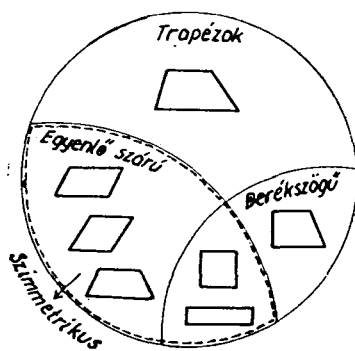
a)



Az a) diagram az egyenlő szárú trapézoknak azt a részhalmazát emeli ki, amelyek szemközti oldalak felezési pontján áthaladó tengellyel rendelkeznek.

Ha a „tengelyesen szimmetrikus trapézok” részhalmazát vizsgáljuk, akkor abba a rombusz is beletartozik. Ha a trapézok szimmetria tulajdonságának vizsgálatát kiterjesztjük a középpontos szimmetriára is, akkor az „egyenlő szárú trapézok halmaza” egybeesik a „szimmetrikus trapézok” halmazával. Ezt a kapcsolatot a b) diagram szemlélteti.

b)



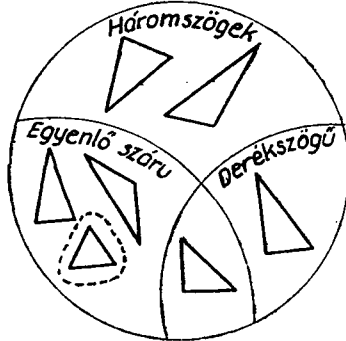
A tankönyvünk nem szól a szimmetrikus trapézokról. Célszerű lenne erre a csoportosításra is kitérni – a trapézok ezen részhalmazát vizsgálni –, nehogy az egyenlő szárú trapéz fogalma az egyenlő szárú háromszögből származtatható trapéz fogalmához rögzítődjön.

A háromszögek összefoglalását is elvégezhetjük a halmazdiagrammal történő szemléltetéssel. A tanulók könnyebben megértik a különféle háromszögek kapcsolatát, a háromszögek halmazában a speciális háromszögek helyzetét.

Ha a háromszögeknek is azt két tulajdonságát emeljük ki, amelyet a négyszögeknél és trapézoknál tettünk:

- egyenlő szárú háromszögek,
- derékszögű háromszögek halmaza,

akkor a két különleges tulajdonságú háromszög halmazának metszetében az egyenlő szárú, derékszögű háromszögek halmaza van.



Az ábra szerint kirakhatjuk mágneses táblán a háromszögek összefoglaló halmazdiagramját.

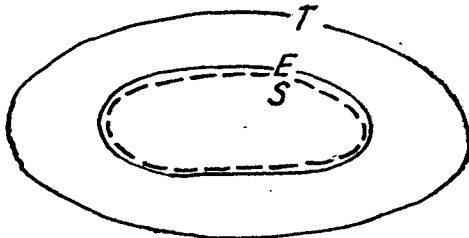
Az egyenlő szárú háromszögek halmazának elemei: a hegyesszögű, tompaszögű és derékszögű egyenlő szárú háromszögek.

Azt is kiemelhetjük, hogy az egyenlő szárú háromszögeknek egy speciális részhalmaza az egyenlő oldalú háromszögek halmaza. Ezzel a csoportosítással 5 részhalmazzra bontottuk a háromszögek halmazát.

A háromszögek egymáshoz való kapcsolatát lehet más elrendezéssel is képezni. Biztassuk a tanulókat a tanult háromszögek egyéni meglátás alapján való csoportosításra, ezzel a tulajdonságok felismerésének, kapcsolatának más-más megoldását tapasztalhatjuk.

II. Sokféle gyakorlat jelölhető a tanulóknak a halmazelméleti alapon való szemlélődésre, vizsgálódásra; pl.:

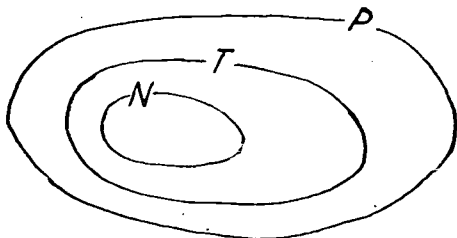
„Ábrázold, hogyan helyezkednek el a trapézok halmazában az egyenlő szárú trapézok és a szimmetrikus trapézok!”



- T = trapézok
- E = egyenlő szárú trapézok
- S = szimmetrikus trapézok

Az egyenlő szárú trapézok részét képezik a trapézok halmazának. A szimmetrikus trapézok halmazának minden eleme egyenlő szárú is, és az egyenlő szárú trapézok halmazának minden eleme szimmetrikus is. E kapcsolatot jelölhetjük: $E \subseteq S$ és $S \subseteq E$.

Másabb kapcsolat vizsgálható a paralelogramma, a téglalap és a négyzet között:

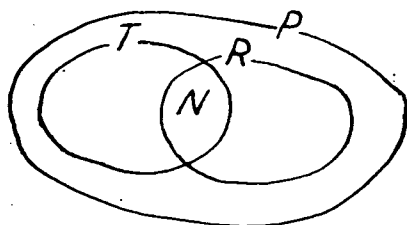


P=paralelogramma
T=téglalap
N=négyzet
 $N \subset T \subset P$

Ezek a digrammok segítik a különféle „kijelentések” vizsgálatát pl.:

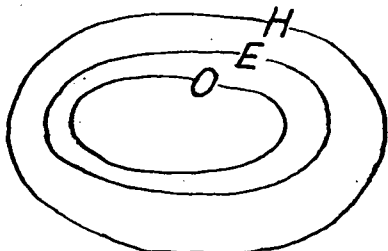
- igaz-e az, hogy minden szimmetrikus trapéz egyenlő szárú;
- igaz-e az, hogy minden egyenlő szárú trapéz szimmetrikus;
- igaz-e az, hogy minden négyzet téglalap;
- igaz-e az, hogy minden téglalap négyzet stb.

Más kapcsolatot vehetünk észre, ha a paralelogramma, a téglalap és rombusz kapcsolatát akarjuk szemlélni. Két halmaz közös részét a négyzetek halmaza alkotja.



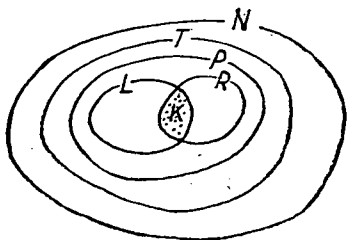
$T \subset P$; $N \subset P$; $R \subset P$;
 $T \cap R = N$

Vizsgálható a háromszögek halmazának speciális kapcsolatai:



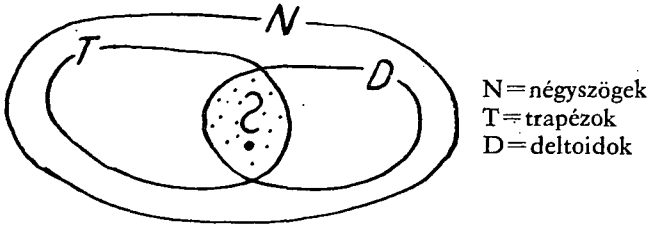
H=háromszögek
E=egyenlő szárú háromszögek
O=egyenlő oldalú háromszögek
 $H \supset E \supset O$

A négyszögek egymásból való kapcsolatáról is készíthetünk halmazdiagramokat. Az alábbi diagramról jól belátható a dialektikus fogalomalkotás: „A négyzet olyan téglalap...”, „A négyzet olyan rombusz...”, „A négyzet olyan paralelogramma...”, „A négyzet olyan trapéz...” stb. megfogalmazások érthetővé válnak a diagramok alapján.



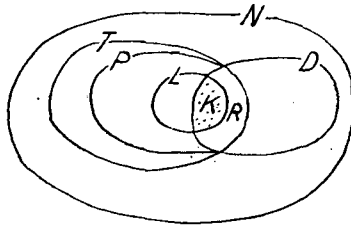
N=négyszögek
T=trapézok
P=paralelogrammák
L=téglalapok
R=rombuszok
K=négyzetek

Diagramokkal vizsgálható, hogy milyen a kapcsolat a négyszögek belül a trapézok és deltoidok halmaza között?



Kérdésekkel végezzük vizsgálódást:

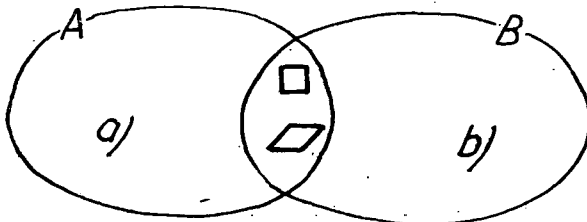
- mely idomok tartoznak a két halmaz metszetébe? (rombusz, négyzet)
 - hogyan helyezkednek el a téglalapok és a paralelogrammák?
- S ez alapján teljesezhető ki a négyszögek halmazdiagramja:



Merjünk bátran halmazdiagramokat összeállítani, amelyek a kapcsolatok szemléletére alkalmasak. A tanulók is megtanulják a diagramok szerkesztését. Nagyon sok feladat megoldását és a szemléletmód erősödését segíti a halmazokban való gondolkodás. Ez új szint adhat a matematika óráknak, a tanulók érdeklődésének és önálló munkájának!

A feladat megoldása változatos, eltérő lehet az alábbi feladatoknál az önálló tanulói munka következményeként:

„Az A és B halmazok metszetébe tartozó síkidomokat berajzoltuk a diagramba. Mely síkidomok halmaza A , illetve B ? Rajzolj megfelelő síkidomokat az a), illetve b)-vel jelzett részbe!”



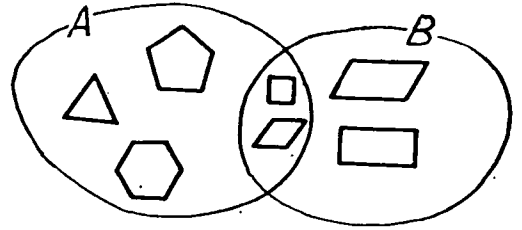
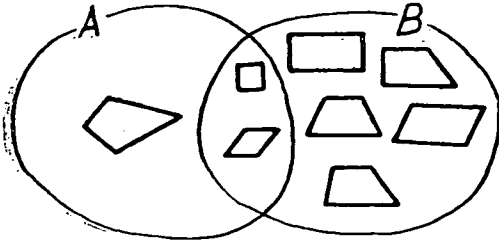
Megoldások lehetnek:

A = deltoidok

B = trapézok

A = egyenlő oldalú síkidomok

B = paralelogrammák

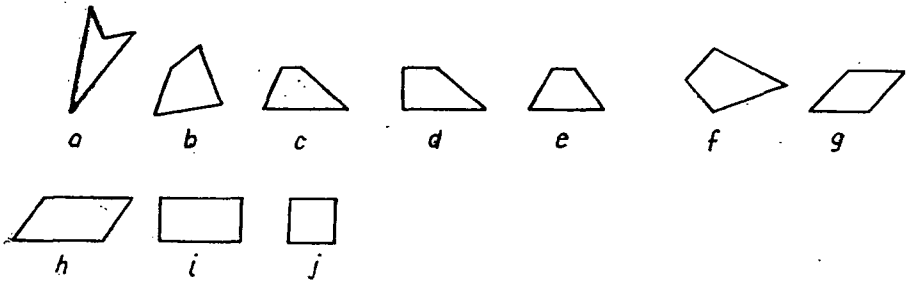


„Helyezd el Venn-diagramban betűjelekkel az alábbi síkidomokat a feltételeknek megfelelően.”

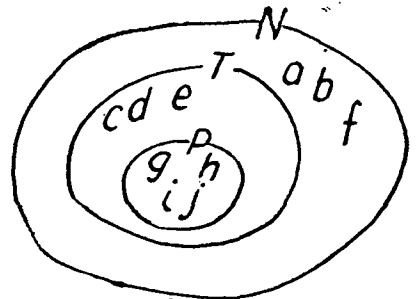
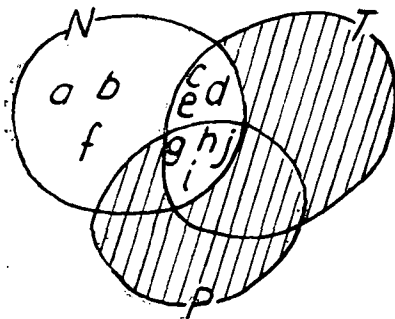
N = négyszögek

P = paralelogrammák

T = trapézok

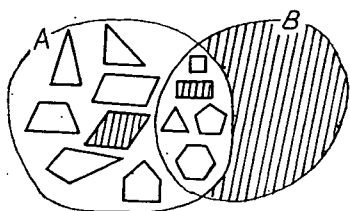


Más-más módon fejezhetik ki a tanulók a kapcsolatokat, pl.:

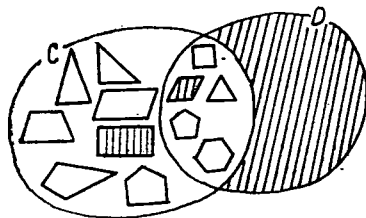


Érdekes felfedezést nyújthat a tanulók számára az alábbi, vagy ehhez hasonló feladat kijelölése:

„Rakd ki a síkidom-modelleket a halmazdiagramba a feltételek szerint!”



A=Van egyenlő oldaluk
B=Szögeik egyenlő



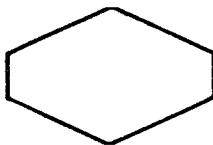
C=Van egyenlő szögük
D=Oldalaik egyenlő

A két diagramban látszólag azonosan rendeződtek el a síkidomok, pedig más-más volt a feltétel. E két elrendezés mégsem azonos. A *rombusz* az első esetben az alaphalmazban, a második esetben a részhalmazban van. A *téglalap* is a feltételek alapján helyet cserélt. Ezzel felvetődhet az a kérdés, hogy van-e még olyan egyenlő oldalú síkidom a rombuszon kívül, amelynek szögei nem egyenlők, legfeljebb van egyenlő szögük. S van-e olyan másik síkidom a téglalapon kívül, amelynek szögei egyenlők, de oldalai nem egyenlők, legfeljebb van egyenlő oldaluk.

Próbáljanak ilyet konstruálni a tanulók, pl.:



egyenlő oldalú,
különböző szögű hatszög



egyenlő szögű,
különböző oldalú hatszög

A tanulói gondolkodásra épülő apró felfedezések érdeklődést kelthetnek a matematika iránt, kitekintést nyújthatnak az általános iskolai tananyagból. E feladatok problémafelvetésükkel a fogalmakat erősítik, nem mechanikus gyakorlást, hanem szemléletformálást, látásmódot alakítanak. A tanulók jobban megismerik a síkidomok tulajdonságait, számba veszik azok változásait, kapcsolatait. Ezzel előbb és az alkalmazáshoz aktívabb ismeretekhez juthatnak!

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Dr. Szendrei János és szerzőtársai: A korszerű matematikatanítás néhány témaköre az általános iskolában. Módszertani Közlemények Könyvtára 5., Szeged, 1974.
2. Mansfield D. Thompson: Matematika új felfogásban II., Gondolat Kiadó, 1972.
3. Tanári kézikönyv az általános iskolák matematika szakosított tantervű 7-8. osztályaihoz (60-72. oldalak). Tankönyvkiadó, 1973.