BORSODI ISTVÁN
Baja

A matematikatanítás néhány logikai problémája a 3. osztályban

Diákkörös hallgatóink az elmúlt tanév végén reprezentatív jellegű felmérést végeztek az ideiglenes matematika-tanterv szerint haladó harmadik osztályokban. A témakörök többségében jó tanulói teljesítményeket figyeltek meg. Viszonylag gyenge volt azonban az eredmény a „halmazok-logika" témakörből választott ellenőrző feladatok megoldásában. A „minden", „van olyan", „van, amelyik nem", „egyik sem" szavak, és ezek szinonimáinak használatában 50 százalék alatt maradt a tanulók teljesítménye. Ez az eredmény csak néhány százalékkal volt jobb, mint amit öt évvel ezelőtt, hagyományos tantervű osztályokban mértünk, noha akkor az ilyen jellegű kérdések a tanulók előtt teljesen ismeretlenek, szokatlanok voltak.

Ezt a problémát most azért vetjük fel, mert az idei tanévben a harmadik osztályokban is bevezetett új tanterv ezeknek a szavaknak az értelmes használatát már *a minimumkövetelmények között sorolja fel* „egy és két tulajdonsággal kapcsolatban, egyszerű esetekben, konkrétan előállított halmazokban". (Az ált. isk. nevelés és oktatás terve, II. 1978., 170. old.)

Véleményünk szerint ennek a logikai kérdésnek halmazelméleti vizsgálata azért kap a kelleténél kisebb hangsúlyt a tanításban, mert a legegyszerűbb esetekben ezeket a szavakat (kvantorokat) ösztönösen – a nyelvérzék alapján – helyesen használják a tanulók. Így aztán a kollégák közül sokan nem érzik szükségét, hogy a kategorikus kijelentések halmazszerkezetét is vizsgálják. Például a tanulók többsége hibátlanul el tudja dönteni az ilyen állítások igazságértékét konkrét halmazok (pl.: logikai lapok) alapján: „Minden lap zöld színű", „Van az asztalon olyan lap, amelyik zöld színű", „Egyik lap sem zöld" stb.

Úgy véljük azonban, hogy a fent idézett tantervi követelmény ennél többet tartalmaz. A tanulók gyakran hibáznak a két- vagy több tulajdonság felhasználásával mondott kijelentések logikai értékének eldöntésében, ebből fakadóan bizonytalanok a „logikai *és*" (konjunkció) használatában. Az absztrakt fogalmak (pl.: számok) tulajdonságait is felhasználó kijelentések újabb nehézség elé állítják őket. Ilyenkor célszerű lenne az elemeket Venn-diagramba rendezni és megvizsgálni a kialakult halmazszerkezeteket. Így a tulajdonságok igazsághalmazai között összefüggéseket találunk, s szabályokat állapíthatunk meg arra vonatkozóan, hogy a „minden", „van olyan", „van, amelyik nem", „egyik sem" szavak használatával megfogalmazott ítéletek mikor igazak.

A harmadik-negyedik osztályokban törekedni kell arra, hogy ezeket a szabályszerűségeket a tanulók maguk ismerjék fel a konkrét tárgyhalmazokról (logikai lapokról), ezeket alkalmazzák a számhalmazokkal végzett munkában.

1. *Egy adott tulajdonság felhasználásával megfogalmazott kategorikus kijelentések igazsághalmaza.* A harmadik osztályos tanuló már jelentős mennyiségű logikai ismerettel rendelkezik. A kisgyermek logikai képzése azzal kezdődik, hogy *predikátumok-*

kal ismerkedik meg. Ilyenek a személyek, tárgyak *tulajdonságai:* kicsi, nagy, piros, sárga, széles, magas, fából van, az enyém stb. Predikátumnak nevezünk minden gondolatot, amit állítani (predikálni) lehet valamiből vagy valakiről. A személyek, tárgyak összességét, amelyre valamely tulajdonság igaz, *a tulajdonság igazsághalmazának* (terjedelmének, osztályának) *nevezzük.* Ha valamely dologról tulajdonságot állítunk, akkor *kijelentéshez* (állítás, ítélet) jutunk. A kijelentések *igazak* vagy *nem igazak* (hamisak) lehetnek. Ezeket a kijelentések logikai értékének nevezzük. A logikai érték és igazsághalmaz fogalma egyidőben alakul ki a tanítás-tanulás folyamatában.

Az igazsághalmaz fogalmának első-második osztályban való bevezetése azonban nem lehet öncélú követelmény. Ezt fel kell használni a logikai képzés továbbfejlesztése során, a halmazelméleti szemléletmód erősítése céljából. A harmadik-negyedik osztályban a logikai- és halmazszerkezetek között kapcsolatokat kezdünk keresni. Ebben a munkában feladatunk a „minden", „van olyan", „van, amelyik nem", „egyik sem" szavakhoz tartozó halmazstruktúrák megfigyelése.

A „minden gyerek szemüveges", „minden lap piros színű", „minden szám kétjegyű" stb. kijelentésekkel azt állítjuk, hogy az alaphalmaz minden eleme rendelkezik a szóban levő tulajdonsággal. Azt is mondhatjuk, hogy az állítás igaz, ha nem tudunk az alaphalmazban olyan elemet mutatni, amelyre az állítás nem igaz. Ekkor tehát *az igazsághalmaz komplementere üres.* (1. ábra. Az üres részhalmazt bevonalkáztuk.)

A „van olyan gyerek, aki szemüveges", „van olyan lap, amelyik piros", „van olyan szám, amelyik kétjegyű" stb. állítások akkor igazak, ha az igazsághalmaznak van legalább egy eleme: *Az igazsághalmaz nem üres.* (2. ábra. A nem üres részhalmazt *x* beírásával jeleztük a rajzon.)

A „van olyan gyerek, aki nem szemüveges", „van olyan lap, amelyik nem piros", „van olyan szám, amelyik nem kétjegyű" stb. állítások akkor igazak, ha az alaphalmaznak van olyan eleme, amely nincs benne az igazsághalmazban. *Az igazsághalmaz komplementere tehát nem lehet üres.* (3. ábra. A nem üres részt ismét *x* beírásával jeleztük.)

Az „egyik gyerek sem szemüveges", „egyik lap sem piros", „egyik szám sem kétjegyű" stb. kijelentések igazak, ha *az igazsághalmaz üres.* (4. ábra. Lásd a bevonalkázott részt.)

2. *Két adott tulajdonság felhasználásával mondott kategorikus kijelentések igazsághalmaza.* Az állításokban felhasznált tulajdonságok két igazsághalmazt határoznak meg. Ezek az alaphalmazt négy részhalmazra (mezőre) bontják. Most e mezőkre vonatkozóan igyekszünk szabályszerűségeket megállapítani.

A „minden zöld lap kör alakú", „minden kétjegyű szám páratlan" stb. kijelentésekkel azt mondjuk, hogy nincs olyan elem, amely az első tulajdonsággal rendelkezik, de a másodikkal nem. Az ilyen állítások igazak, ha *az első igazsághalmaznak a második komplementerében levő része üres.* (5. ábra. A bevonalkázott részhalmaz.)

A „van olyan zöld lap, amelyik kör alakú", „van olyan kétjegyű szám, amelyik páratlan" stb. állításokkal azt jelentjük ki, hogy létezik elem, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik. Ezek az egzisztenciális kijelentések tehát igazak, ha *a két igazsághalmaz metszete nem üres.* (6. ábra. Lásd az x-szel jelzett részhalmazt.)

A „van olyan zöld lap, amely nem kör alakú", „van olyan kétjegyű szám, amelyik nem páratlan" stb. állítások azt mondják, hogy az elemek között van olyan, amely csak az első tulajdonsággal rendelkezik, a másodikkal nem. A halmazszerkezetre most az jellemző, hogy *az első igazsághalmaznak a második komplementumában levő része nem üres.* (7. ábra. A részhalmaz x-szel jelölve.)

Az „egyik zöld lap sem kör alakú", „nincs olyan kétjegyű szám, amelyik páratlan" stb. kijelentések akkor igazak, ha *a két igazsághalmaz metszete üres.* (8. ábra. A bevonalazott részhalmaz.)

A halmazszerkezetek összehasonlítása lehetőséget ad arra is, hogy a kvantorokkal megfogalmazott kategorikus kijelentések között kapcsolatokat keressünk. Észrevesszük például, hogy a „minden" és a „van, amelyik nem", valamint a „van olyan" és az „egyik sem" szavakkal fogalmazott állítások egymásnak ellentmondanak. Ha ugyanarra az alaphalmazra mondjuk ki ezeket, akkor az egyik állítás mindig igaz, a másik pedig hamis. Egyszerre mindkettő igaz nem lehet.

3. *A nyitott mondatok és a kvantifikált kijelentések összefüggése.* A nyitott mondatok általában a számok egy-egy tulajdonságát fejezik ki. A 2-nek például egyik tulajdonsága, hogy igazzá teszi a

$$4 \cdot \square + 1 < 10$$

nyitott mondatot. A „minden szám igazzá teszi ezt a nyitott mondatot", vagy a „van olyan szám, amely igazzá teszi a nyitott mondatot" stb. kvantifikációk tehát egy adott tulajdonság alapján megfogalmazott kategorikus kijelentések. Az ilyen feladatok halmazelméleti vizsgálata megegyezik a fentebb elmondottakkal. (1–4. ábra szerint.)

1. példa

Az *U* keretbe (alaphalmazba) a következő számokat írják: 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50. Megadunk egy nyitott mondatot is.

$$4 \cdot \square + 15 > 200$$

Feladat: Az *U* keretben levő számokat vizsgáld meg, és döntsd el, hogy igazzá teszik-e a nyitott mondatot. Ezután töltsd ki a táblázatot! Igaz mondat után *i*, nem igaz után *h* betűt írj!

1.	Minden 3-mal osztható szám igazzá teszi	h
2.	Van olyan 3-mal osztható szám, amely igazzá teszi	i
3.	Van olyan 3-mal osztható szám, amely nem teszi igazzá	i
4.	Egyik 3-mal osztható szám sem teszi igazzá	h

Az *U* alaphalmazban először a két tulajdonság igazsághalmazát kell megrajzolnia a tanulónak. Ezek címkéi: „3-mal osztható", illetve „$4 \cdot \square + 15 > 200$". Az alaphalmazban levő számokat egyenként megvizsgáljuk, s a tulajdonságok szerint beírjuk ezeket a diagramba. (9. ábra.) A diagramban kialakuló halmazszerkezet alapján válaszolunk a kérdésekre. Az 1. mondat logikai értéke: *h.* (Az első igazsághalmaznak a második komplementerében levő része nem üres.) A 2. mondat igazságértéke: *i.* (A két igazsághalmaz metszete nem üres.) A 3. mondat logikai értéke szintén: *i.* (Az első igazsághalmaznak a második komplementerében levő része nem üres.) A 4. mondat értéke: *h.* (A két igazsághalmaz metszete nem üres.)

2 példa

Az *I* alaphalmazban legyenek most ezek a számok: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95. A nyitott mondat pedig:

$$100 < 2 \cdot \square - 10 < 150$$

Feladat: Vizsgáld meg az *I* keretben levő számokat, és határozd meg a mondatok igazságértékét!

5.	Minden szám igazzá teszi	h
6.	Van olyan szám, amely igazzá teszi	i
7.	Van olyan szám, amely nem teszi igazzá	i
8.	Egyik szám sem teszi igazzá	h

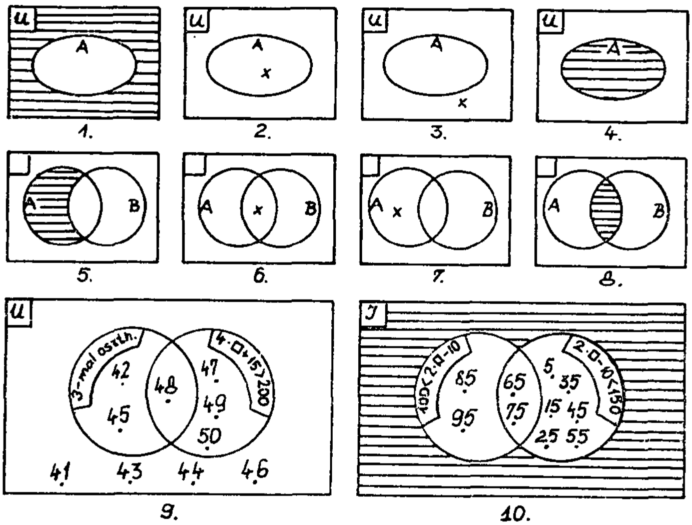
Az *I* alaphalmazban most is két tulajdonság igazsághalmazát rajzolhatjuk meg. Az egyik tulajdonság:

$$100 < 2 \cdot \square - 10$$

Ezt írjuk az első karika címkéjére. A második tulajdonság

$$2 \cdot \square - 10 < 150$$

a második karika címkéje.



A tanuló első feladata ismét az elemek elhelyezése az igazsághalmazokban. (10. ábra.) Észrevesszük, hogy most a két igazsághalmaz metszetében levő 65 és 75 teszi igazzá a nyitott mondatot. A fentebb megfogalmazott szabályok alkalmazásával sorrendben a következő logikai értékeket kapjuk az 5., 6., 7., 8. sorszámú mondatokra: h, i, i, h.

DR. BÉKEFI IRÉN–DR. SIKÓ ÁGNES
Pécs

Lemeztektonikai ismeretek feldolgozása az általános iskola 7. osztályában

Az 1960-as évektől kezdve a földrajztudományban szinte robbanásszerűen gyarapodott a földrajzi burok egyetemes megismerésének alapjául szolgáló lemeztektonikai ismeretek mennyisége, amely új földtudományi szemlélet kialakulásához vezetett.