MŰHELY

DR. ILL MÁRTONNÉ-KOPASZ ÉVA
Baja

Néhány feladat megoldása munkaeszköz segítségével

Napjainkban már nincs szükség arra, hogy ajánljuk a munkaeszközök használatát. Mindennapi munkánk során tapasztaljuk, hogy érdemes velük dolgozni és dolgoztatni.

Szerencsére kinőttünk abból a korszakból is, amelyikben néha elfelejtettük, hogy a logikai játék, színes rúd stb. a szó legnemesebb értelmében *csak eszköz* lehet az órán valamilyen cél elérése érdekében.

Sok hasznos tanácsot és bőséges példaanyagot találunk az eszközök használatáról a „Továbbképzési anyag matematikából" I. kötetében.

Az említett anyaghoz további kiegészítést adnak a már megjelent 1–4. osztályos kézikönyvek. Ezt a sorozatot szeretnénk folytatni a most közreadott néhány feladattal, amelyek elsősorban a kombinatórika, valószínűségszámítás és geometria témakörében használhatók.

I.

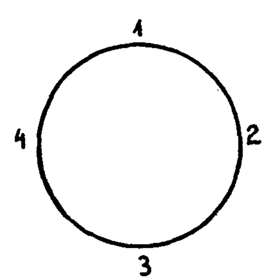
1. Fehér, rózsaszín, világoskék, piros rudakat helyezzünk el egyenes, majd kör mentén úgy, hogy *ugyanaz a két rúd ne kerüljön egymás mellé.*

Jelölje 1-es a fehér, 2-es a rózsaszín, 3-as a világoskék, 4-es a piros rudat.

a) Egyenes mentén

1 2 3 4
3 1 4 2

b) Kör mentén



A feladat tulajdonképpen négy különböző elem sorrendezése. Mivel feltételünk szerint ugyanaz a két elem nem kerülhet egymás mellé, a 24 lehetőség egyenes menti kirakásánál kettőre, kör menti kirakás esetén pedig egy lehetőségre csökken.

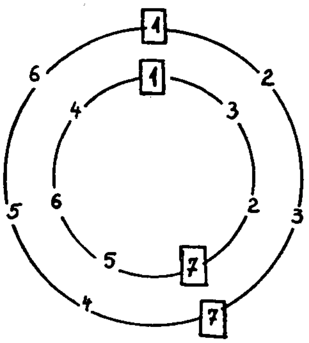
2. Először egyenes, majd kör mentén rakjuk ki a fehér, rózsaszín, világoskék, piros, citromsárga, lila és fekete rudakat úgy, hogy a *fehér és fekete rúd a lehető legtávolabb legyen egymástól, valamint a fehér és fekete mellett ne álljon ugyanaz a rúd!*

Jelölje 1-es a fehér, 2-es a rózsaszín, 3-as a világoskék, 4-es a piros, 5-ös a citromsárga, 6-os a lila, 7-es a fekete rudat.

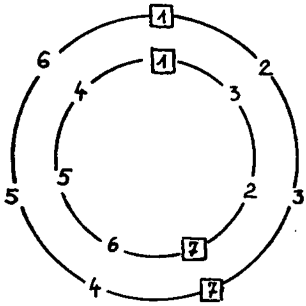
a) $\boxed{1}$	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$
	6	3	4	5	2	
	3	2	5	6	4	
	4	2	3	6	5	
	5	4	2	6	3	

Az 1-es és 7-es mellé is öt különböző választási lehetőség van.

b)



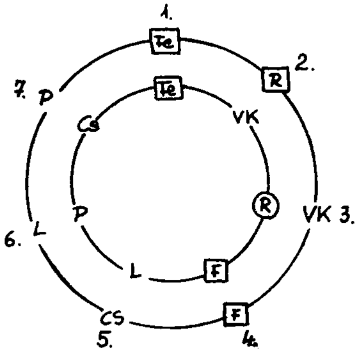
vagy



Ha két elemet rögzítünk, akkor 5 elemből kell különböző párokat képezni, ez pedig csak kétféleképpen lehet:

az 1-es két oldalán állhat pl.: 2;6 vagy 3;4 (5-nek nincs párja), ugyanakkor a 7-es két oldalán 3;4 vagy 2;5 (6-nak nincs párja).

3. Az előző hét rudat kör mentén rendezzük úgy, hogy a rózsaszín a lehető legközelebb, a fekete pedig a lehető legtávolabb kerüljön a fehértől, de ugyanaz a két rúd ne kerüljön egymás mellé! (A jelölésnél Fe – fehér, F – fekete rudat jelent.)



Az R csak két helyre kerülhet – a 2. vagy 3-ra – vagy szimmetrikusan a 6. vagy 7. helyre, az F pedig a 4. vagy 5-re.

A 2. és 3. hely helyett a 6. és 7. azonban már nem jelent új sorrendet, mert a szomszédos elemeket nem tudjuk újabbra változtatni.

4. Három különböző színes rúddal állítsuk elő a legkisebb (legnagyobb) két- (három) jegyű egész számot.

Vizsgáljuk a lehetőségeket!

Legyen a 3 rúd a következő:

fekete (megállapodás: a fehér legyen 1)
fehér
piros

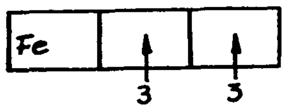
legkisebb 2 jegyű: 14;
legnagyobb 2 jegyű: 74;
legkisebb 3 jegyű: 147;
legnagyobb 3 jegyű: 741.

5. Több fehér, piros és fekete színű rudunk van. Állítsuk elő a legkisebb (legnagyobb) két- (három-) jegyű egész számot! (Jelölése: Fe – fehér, F – fekete.)

	kétjegyű	háromjegyű
legkisebb	11 (Fe Fe)	111 (Fe Fe Fe)
legnagyobb	77 (F F)	777 (F F F)

6. Hány olyan háromjegyű szám van a 2. feladat feltételei szerint, amelyik fehérrel kezdődik?

Fe P F
Fe F P
Fe Fe P
Fe P Fe
Fe Fe F
Fe F Fe
Fe P P
Fe F F
Fe Fe Fe



választási lehetőség van mindkét helyre, tehát összesen $3 \cdot 3 = 9$.

II.

Padtársak játszanak: az egyik két kockával dob egyszerre, a másik tippel a dobás összegére, amit színes rúddal ki is rak.

Milyen számot mondjon Panni, hogy Kati két kockán együttesen dobott számát eltalálja? (A nyerés valószínűsége a legnagyobb legyen.)

Panni csak a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12-t tippelheti, mert *legalább 2-t és legfeljebb 12-t* lehet dobni két kockával. Nézzük meg a statisztika tükrében, hogy az összes lehetséges eset közül melyik számot kaphatjuk leggyakrabban.

Vizsgáljuk a lehetőségeket:

2-t kaphatunk, ha
1+1-et dobunk (1-szer)

3-at kaphatunk, ha
vagy
1+2-t
2+1-et
} dobunk (2-szer)

4-et kaphatunk, ha
1+3-at
2+2-t
2+1-et
} dobunk (3-szor)

5-öt kaphatunk, ha
1+4-et
2+3-at
3+2-t
4+1-et
} dobunk (4-szer)

6-ot kaphatunk, ha

$$\left.\begin{array}{l} 1+5\text{-öt}\\ 2+4\text{-et}\\ 3+3\text{-at}\\ 4+2\text{-t}\\ 5+1\text{-et} \end{array}\right\}\ \text{dobunk (5-ször)}$$

7-et kaphatunk, ha

$$\left.\begin{array}{l} 1+6\text{-ot}\\ 2+5\text{-öt}\\ 3+4\text{-et}\\ 4+3\text{-at}\\ 5+2\text{-t}\\ 6+1\text{-et} \end{array}\right\}\ \text{dobunk (6-szor)}$$

8-at kaphatunk, ha
(mint 6-ot)

$$\left.\begin{array}{l} 2+6\\ 3+5\\ 4+4\\ 5+3\\ 6+2 \end{array}\right\}\ \text{(5-ször)}$$

9-et kaphatunk, ha
(mint 5-öt)

$$\left.\begin{array}{l} 3+6\\ 4+5\\ 5+4\\ 6+3 \end{array}\right\}\ \text{(4-szer)}$$

10-et kaphatunk, ha
(mint 4-et)

$$\left.\begin{array}{l} 4+6\\ 5+5\\ 6+4 \end{array}\right\}\ \text{(3-szor)}$$

11-et kaphatunk, ha
(mint 3-at)

$$\left.\begin{array}{l} 5+6\\ 6+5 \end{array}\right\}\ \text{(2-szer)}$$

12-t kaphatunk, ha
(mint 2-t)

$$6+6 \qquad \text{(1-szer)}$$

Összeszámlálás után azt kapjuk, hogy 36 az összes lehetséges eset.

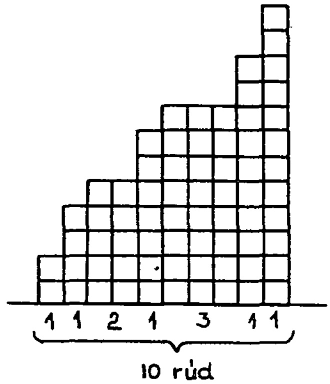
Ha Panni 7-et mond, akkor könnyen látható, hogy 6 kedvező eset van a 36 esetből, és ez a legtöbb.

$$\text{Tehát:}\quad \frac{6\ \text{(kedvező esetek száma)}}{36\ \text{(lehetséges esetek száma)}} = \frac{1}{6}$$

Ez természetesen nem úgy igaz, hogy 36 dobás között 6 kedvező lesz, hanem úgy, hogy minél nagyobb a dobások száma, annál közelebb kerülünk ehhez a számítással nyert eredményhez (a valósághoz).

Pl.: 10 dobás után rakják nagyság szerint sorba a rudakat, így az osztály eredményét rögzítő tanító gyorsan kaphat válaszokat. (Ilyen esetekben érdemes azt mondani, hogy legyen a fehér rúd 1.)

Pl.: egy tanuló előtt a következő kép áll:



A rudak kirakása helyettesíti a táblázatot (a tanulóknál).

A tanító vagy egy tanuló rögzíti az adatsort pl. így:

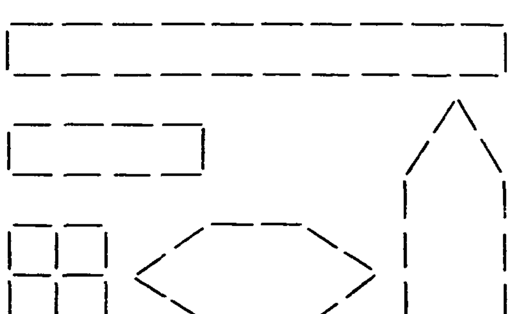
pontok száma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
dobások száma											

Kevés adatból nem szabad általánosítani!

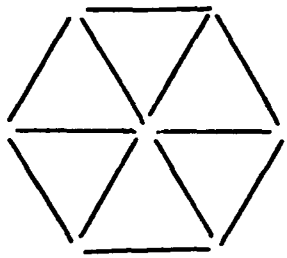
Kérdésekkel irányítjuk a „felfedezést”.

III.

1. Milyen síkidomot lehet kirakni pontosan 12 rózsaszín rúddal? Pl.:



2. Lehet-e hat egyenlő területű háromszöget készíteni pontosan 12 pálcikával?



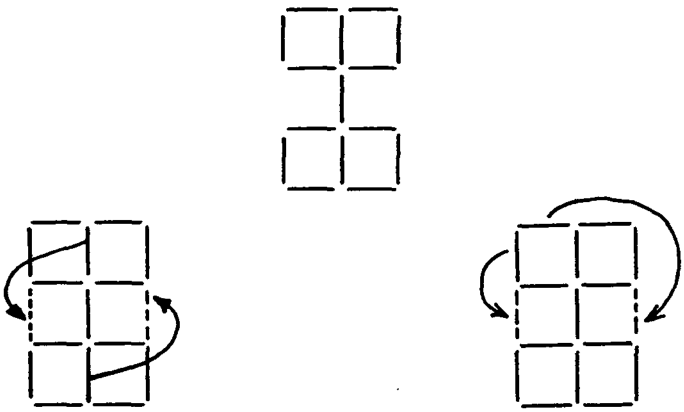
Mindkét feladat a síkgeometria köréből való. Lehet világoskék vagy piros rúddal is dolgoztatni, de akkor két tanulónak együtt kell tevékenykednie, hogy elegendő elem álljon rendelkezésükre.

A 2. feladat színes rúddal nem oldható meg, mert a hat egyenlő területű háromszög kirakása során középen a rudak csatlakozásánál egy szabályos hatszög is keletkezik.

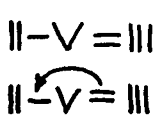
3. Helyezzünk át két rudat úgy, hogy

a) legalább két egyenlő területű síkidomot

b) öt egyenlő területű négyzetet kapjunk!



4. Még így is felhasználhatjuk a színes rudat: egy rúd áthelyezésével tegyük igazzá a feladatot!

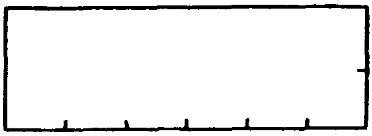


5. Szöges táblán (vagy színes rúddal) készítsünk tetszőleges téglalapot, majd egy olyan téglalapot, amelynek területe éppen kétszer (fele) akkora, mint az elsőé.

(*Műveletek komponensei közötti kapcsolatok előkészítése-elmélyítése.*)

$a \cdot b = c$	$a \cdot b = c$
$\wedge$	$\vert$
$2a \cdot b = 2c$	$a/2 \cdot b = c/c$
vagy	vagy
$a \cdot 2b = 2c$	$a \cdot b/2 = c/2$

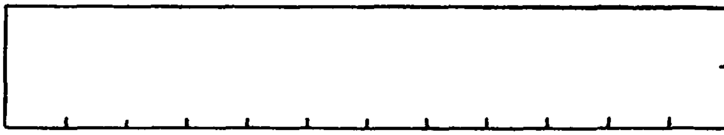
Tanulóink munkája pl.:



2 (rózsaszín)

6 (lila) $6 \cdot 2 = 12$

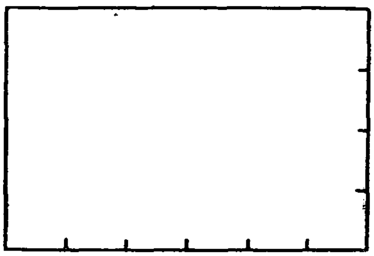
a)
2a



2 (rózsaszín)

12 (zöld) $12 \cdot 2 = 24$

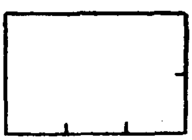
b)
2b



4 (piros)

6 (lila) $6 \cdot 4 = 24$

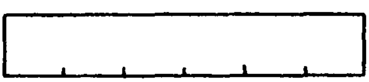
c)
a, 2



2 (rózsaszín)

3 (világoskék) $3 \cdot 2 = 6$

d)
b/2



1 (fehér)

6 (lila)) $6 \cdot 1 = 6$

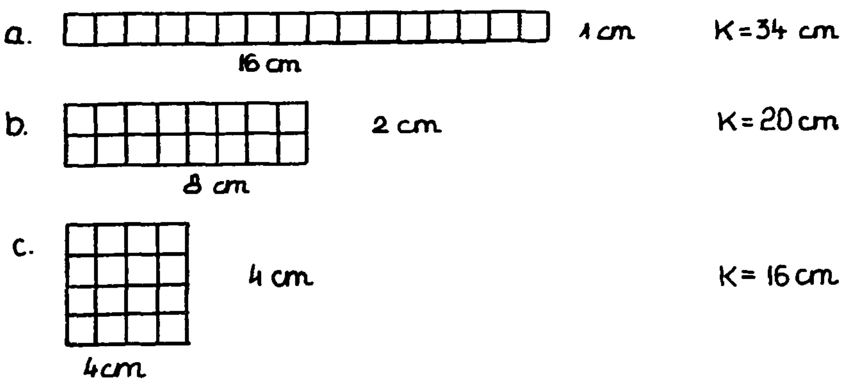
További lehetőséget is találunk, ha pl. a piros és rózsaszín rúddal dolgozunk. Ha a fehér 1-et ér, akkor a piros 4-et, a rózsaszín 2-t. Kétszeresre növelhetjük a területet a következőképpen is:

$$\mathbf{a \cdot b = c}$$

$$\mathbf{4 \cdot a \cdot b/2 = 2c}$$

vagy $a/2 \cdot 4b = 2c$

6. Többféle módon kerítsünk körbe a szöges táblán 16 egységnyi kerületet (egy területegység négy szög által meghatározott rész). Melyiknek a legkisebb, melyiknek a legnagyobb a kerülete?



A körülhatárolt síkrész kerülete az *a)* esetben a legnagyobb (34 cm), a *c)* ábrán pedig a *legkisebb* (16 cm), azaz a *négyzet* esetében.

7. 36 cm drótunk van. Hogyan válasszuk meg a derékszögű négyszög méreteit, hogy a területe a legnagyobb legyen? (Szögestábla segíthet.)

Foglaljuk az adatokat táblázatba!

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	1
b	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	...	17
T= 2·b	17	32	45	56	65	72	77	80	81	80	77	72	...	17

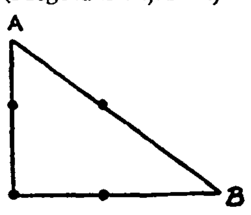
A két utóbbi – *azon túlmenően*, hogy a négyzet és téglalap terület, kerület számítását gyakoroltatjuk – szélső érték feladat. *Adott terület* mellett a *négyzet kerülete a legkisebb.* (2. feladat), *adott kerület* mellett a *négyzet területe a legnagyobb* (3. feladat).

8. *a)* A négy pontot kösd össze három egyenessel úgy, hogy ne emeld fel közben a ceruzád! (Szögestábla, gumigyűrű.)

A feladat a gráfok témakörében dolgozható fel. Jó példa a gráf bejárhatóságára. (Egy gráf bejárható, ha bármelyik csúcsából bármelyik csúcsába eljuthatunk, nem szükséges, hogy közvetlenül.)

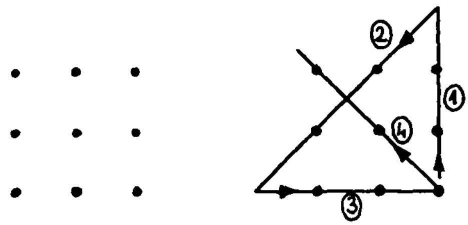
b) Az előző feladatot most fogalmazzuk így: az alábbi négy pontot kösd össze három egyenessel úgy, hogy az összekötő egyenesek egy síkidomot alkossanak!

(Megoldás rajzban!)



Ez az ábra már nem az eredeti gráf, mert újabb csúcspontokat (A, B) is létrehoztunk.

9. Kösd össze a következő kilenc pontot négy egyenessel úgy, hogy közben ne emeld fel a ceruzádat!



Szintén pontok összekötéséről van szó, de síkbeli gráf, mert a pontok összekötése során itt is újabb csúcspontok keletkeztek, a síkbeli gráf pedig olyan geometriai alakzat, amelyben bizonyos pontok össze vannak kötve egymást nem metsző vonalakkal.

Tanítói munkánk során célszerű adott esetben eszköz segítségével megoldatni a feladatok egy részét. A munkaeszköz használatával minden tanuló egyénileg szerez tapasztalatot, majd a megoldást közösen – később önállóan is – képes lesz a matematika nyelvére lefordítani. Ugyanakkor a tanító az ellenőrzéskor szinte egyszerre láthatja az egész osztály munkáját. Értékelése így konkrét lesz, tehát tanító, tanuló tudja, mi a tennivaló. Tapasztalataink azt mutatják, hogy kevésbé reális a munkaeszközzel megoldott feladat érdemjeggyel történő értékelése. Ez nyilvánvaló, hiszen a tanulóknak több ideje van a megoldásra, tehát a szomszéd „gondolatmenetének" lemásolására is. Így nem az egyéni teljesítményt értékelnénk.

TÓTH JÁNOS
Homokszentgyörgy

Napközis foglalkozások szabad időben

A napközis gyermeknek a szabad idős tevékenység nagyon sok örömet adhat. De a szabad idős foglalkozások nemcsak megszépítik, nemcsak otthonossá teszik a napközisek életét, hanem elmélyítik, gazdagítják a tanórákon szerzett ismereteket, teljesítménnyé alakíthatja tudásukat, és – az együttes munka, játék során – növelik bennük az összetartozás érzését. A foglalkozások közül kiemelten idesorolom a manuális és a különböző kulturális (irodalmi, zenei, képzőművészeti és komplex) tevékenységeket.

A kulturális foglalkozásaink vagy oktató vagy reprodukáló jellegűek. A reprodukáló foglalkozások közé számítom a dramatizálást, a szavalást, irodalmi műsorok összeállítását, a bábozást, a vetélkedőket, folyóiratokból egy-egy cikk ismertetését. Alkotónak nevezem azt a foglalkozást, amelynek keretében a tanulók csoportjuk életét megörökítő csoportalbumot készítenek, krónikát írnak, olvasónaplót szerkesztenek, saját ötletük alapján műsorokat állítanak össze – pl. az óvodások vagy a kisebb osztálycsoportok télapói, karácsonyi köszöntése, ajándékozása alkalmával. Ide sorolnám még a különböző riportok készítését, mely az úttörőcsapat, iskola vagy a napközis csoportok életével, munkájával foglalkozik, alkalmanként pedig kilépve az