DARAGÓ JÓZSEF
Debrecen

Egyenesek kölcsönös helyzete és a transzformációk

Egy, az ötödik osztályokban végzett vizsgálódásunk alkalmával figyeltünk fel olyan problémákra, melyek első látásra triviálisnak tűnnek. A gyerekek az egyenesek kölcsönös helyzetét vizsgálták. A jobb érthetőség kedvéért, szemléletesen, konkrét testeken; kockán, téglatesten. A párhuzamos egyenesek felismerése gyorsan ment, a tanulók többségének nem okozott gondot. Az azonos síkon levő, szomszédos élek vizsgálatánál a tanulók szinte kivétel nélkül azt mondták: „merőleges". Azt, hogy metszők, csak mellékesen jegyezte meg egy-két gyerek. Annak ellenére, hogy óra elején tisztáztuk; párhuzamos, metsző, kitérő egyenespárokat akarunk keresni. Úgy éreztük, s a további beszélgetések is erről győztek meg, hogy a két fogalom sajátságosan elkülönül egymástól (metsző-merőleges). Természetesen azt is éreztük, hogy erre a szétválásra nem itt, az ötödik osztályban került sor, hanem az alsótagozatban kezdődik, amikor is a gyerekek olyan lelkesen keresik a körülöttük levő tárgyakon a merőlegest. Ez önmagában nem hiba, hiszen az intuitív gondolkodás szakaszában elsődlegesen a speciális és leggyakoribb viszonyok rögződnek. A probléma az, ha ezek a fogalmak későbbiekben nem illeszkednek megfelelően rendszerbe vagyis, hogy:

– azért lehetnek merőlegesek, mert egyáltalán metsző egyenespárokról van szó;

– miért jelent többet a merőlegesség?

A címben említett két geometriai fogalom közötti kapcsolatot a következőképpen értelmezhetjük:

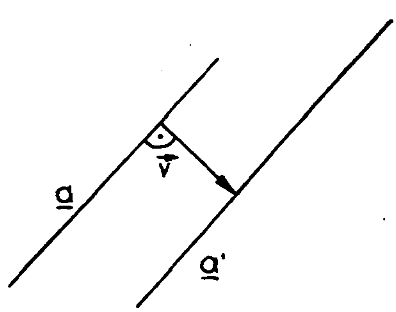
– bármely két egyenes esetén mindig létezik valamilyen mozgás (transzformáció), amellyel az egyik egyenes átvihető a másikba;

– ez a mozgás a két egyenes kölcsönös helyzetétől függően egyértelműen meghatározott. Vagy megfordítva, adott transzformáció, illetve transzformációk meghatározott kölcsönös helyzetű egyenespárokat hoznak létre.

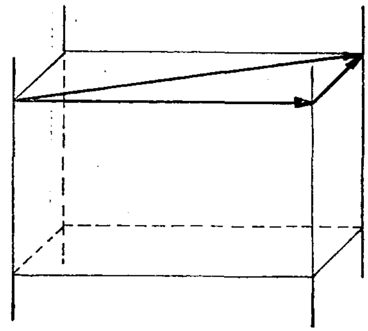
1. *Párhuzamos egyenesek*

Még ma is találkozunk erre vonatkozóan olyan megfogalmazással, miszerint azok az egyenesek, amelyeket akármeddig meghosszabbítunk nincs közös pontjuk. A három dimenzió feltárja ennek a megfogalmazásnak a hiányosságát, hiszen nyilvánvalóan tudunk mutatni olyan egyenespárokat, melyek nem párhuzamosak, annak ellenére, hogy nincs közös pontjuk. A két viszony közötti különbség az egyenesek távolságának definiálásával válhat, illetve válik egyértelművé.

Ezzel tulajdonképpen megadtuk a mozgást is amely a práhuzamos egyenesekhez hozzárendelhető. Ez a *párhuzamos eltolás,* amely bármely két párhuzamos egyenes esetén irány és nagyság szerint egyértelműen meghatározott.



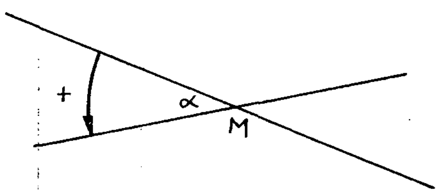
Az alábbi ábrán egy téglatest egymással párhuzamos oldalélei közötti, lehetséges eltolásvektorokat jelöltünk ki.



2. *Metsző egyenesek*

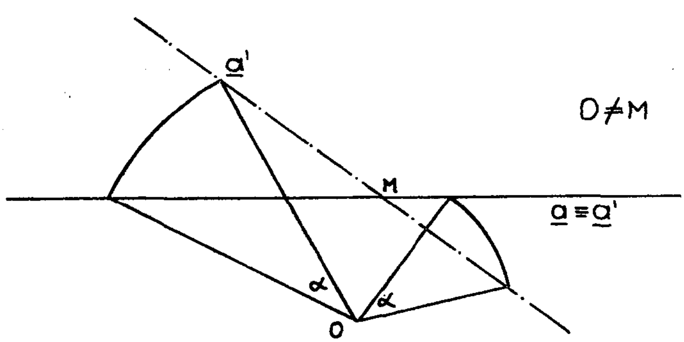
Az ilyen egyenespárok esetén mindig egyértelműen adott a *metszéspont* és a két egyenes *hajlásszöge* (az általuk bezárt szögek közül a kisebbik).

Az „M" pont (mint forgatási centrum) és az „α" szög (mint a forgatás mértéke) meghatározza a mozgást, amely az *a* egyenest *a'* egyenesbe viszi át. Ez a *pont körüli forgatás,* amely bármely metsző egyenespár esetén meghatározott.



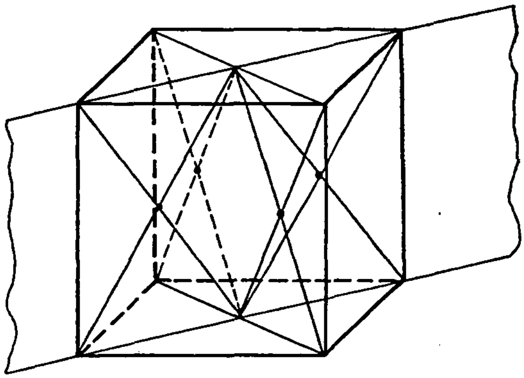
Fordítva is nyilvánvaló $a = a'$ esetén bármely P → *a* körüli forgatás metsző egyenespárt hoz létre, ha $\alpha \neq k \cdot 180°$.

Ez akkor is így van, ha a forgatás centrumát nem az egyenesen vesszük fel.



Vagyis a forgatással fedésbe hozható egyenespárok csakis metszőek lehettek.

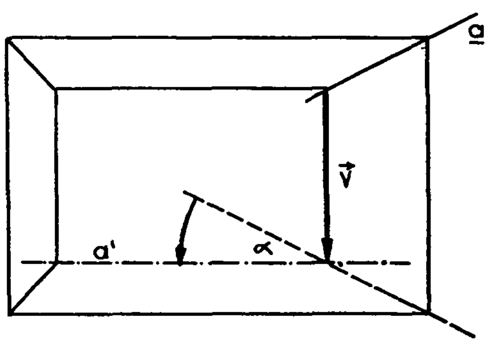
Kössük össze egy kocka fedőlapjának középpontját az alaplap csúcsaival, majd az alaplap középpontját a fedőlap csúcspontjaival.



Könnyen belátható, hogy a kapott gúlák oldalélei páronként metszik egymást. A metszéspontok és a hajalásszögek, az ábrán is láthatóan, meghatározottak.

3. *Kitérő egyenesek*

A kitérő egyenesek távolságát értelmezve látható, hogy egyetlen mozgással nem vihető át az egyik egyenes a másikba. A mozgás ebben az esetben két – előzőekben már vizsgált – transzformációból tevődik össze. Az alábbi ábrán egy nyitott belső teret szemléltetünk:



Az ábrán bejelöltük a párhuzamos eltolást meghatározó $\vec{v}$ irányvektort, valamint a forgatást meghatározó „0" centrumot és „α" (jelen esetben 90°) szöget.

A két transzformáció után $a=a'$. Természetesen a transzformációk egymás után következése nem meghatározott.