DR. DARAGÓ JÓZSEF
Debrecen

Egy kicsit a NULLÁ-ról

A „0" természetes szám jelentése oktatásunkban érezhetően nem mindig egyértelmű. A Peano axiómák megfogalmazásában is váltakozva szerepel az 1, illetve a 0 behelyettesítése az egyes irodalmakban, aszerint, hogy természetes számnak akarjuk-e tekinteni a 0-t vagy nem.

A számfogalom kialakításában használatos megközelítések sem teszik ezt egyértelművé. A 0 pl. nyilvánvalóan *nem* lehet *számlálás* eredménye vagy *mérés eredménye* (színes rudak). Ugyanakkor jogosan soroljuk a természetes számok közé, ha annak kardinális jelentését tekintjük. Az üres halmaz a 0 reprezentánsa, ebből adódóan a véges halmaz számosságát jelöli, a természetes szám pedig véges kardinális szám. Az értelmezési lehetőségeken túl később is gyakran okozhat, ill. okoz zavart, különösen a számelméleti problémákban. Ezeket próbáljuk elemezni egy-két fogalom összehasonlításában, kapcsolatában.

Művelet-reláció

A kapcsolatot a *maradékos osztás* és *oszthatóság* viszonyában vizsgáljuk. Ebben a viszonyban, mint majd látni is fogjuk, nyilván a reláció bír általánosabb jelentéssel. A művelet mint függvény ugyanis feltételezi a relációfogalmat, fordítva nem szükségszerű. Ebben a minőségi megkülönböztetésben szerep jut a 0-nak is.

A természetes számok halmazát az összeadásra és a szorzásra nézve szoktuk zártnak tekinteni. Az osztás már nem végezhető el korlátlanul, de a tételszerűen is megfogalmazott maradékos osztás nem vezet ki a halmazból.

Legyen $a \geqq b < 0$ (a és b természetes számok).

Tekintsük $a-b$ különbséget. Ha $a-b<b$, akkor $a-b=r$ jelöléssel

$$a=b+r \quad (1) \text{ egyenlőséghez jutunk.}$$

Ha $a-b \geqq b$, akkor b kivonását megismételjük. Lehet, hogy így már b-nél kisebb számhoz jutunk, ha nem, újra ismételjük az eljárást. Ezen kivonások számát az (1) egyenletben b együtthatója jelzi. Mivel a természetes számok halmaza alulról korlátos, véges, sok kivonás után (q), el kell jutnunk olyan számhoz

$$a-qb=r, \text{ amelynél már } 0 \leqq r < b$$

vagy más előállításban:

$$a=qb+r \ ; \ 0 \leqq r < b \quad (2)$$

A q, vagyis az ismételt kivonások száma jelenti a hányadost, r pedig a maradékot. A maradékra adott feltétel egyértelművé teszi a hozzárendelést.

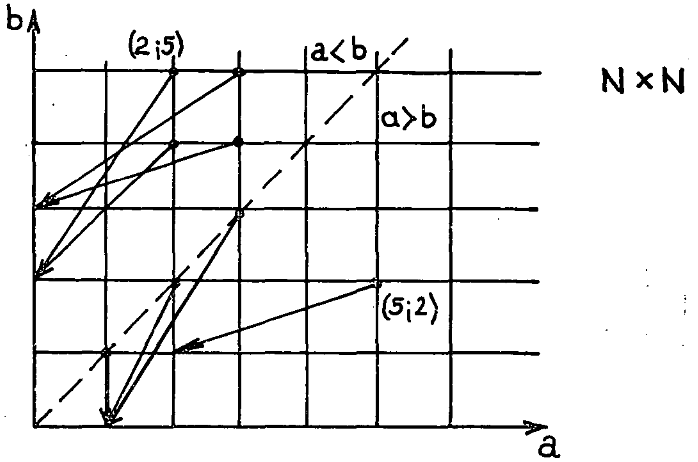
$$(a \ ; \ b) \rightarrow (q \ ; \ r)$$

számpárhoz számpárt rendel.

Könnyű belátni, hogy ez $0<a<b$ esetén is igaz a következő hozzárendeléssel:

$$(a \ ; \ b) \rightarrow (0 \ ; \ a)$$

A (2)-ben adott feltétel nemcsak az egyértelműséget biztosítja, hanem az egyenlőtlenséglánc kizárja a b=0 esetet is. Ennek megfelelően, ha negnéznénk az értelmezett leképzés gráfját, a következőt jelentené:



Minden rácspontból csak egy nyíl indul ki ((több egyértelmű). Az „a" tengely rácspontjaiból nem indul ki nyíl. A főátlóra illeszkedő rácspontokból a nyilak az (1 ; 0) rácspontba mutatnak. A főátló felett lévő rácspontból pedig a „b" tengely rácspontjaiba.

Vagyis: Értelmezési tart. $\{N\times N\}\setminus\{(a;0)\}$

Értékkészlet: $\{N\times N\}\setminus\{(0;0)\}$

Eddig a műveletről.

Definíció: Az „a" számot „b" számmal oszthatónak nevezzük, vagy röviden b osztója a-nak, ha van olyan „q", amelyre:

$$a=bq$$

Nézzük meg ebben a relációban a 0 jelentéseit. A $0=b\cdot 0$ egyenlőségből nyilvánvaló, hogy 0-nak minden szám osztója. Ez b=0 esetén is igaz, vagyis $0=0\cdot 0$ teljesül. Tehát, ha értelmezzük a definícióban megadott kapcsolat alapján a relációs halmazt (R), akkor igaz, hogy

$$R\subset N\times N \quad \text{és} \quad (0;0)\in R$$

Vigyázzunk; ezzel nem azt mondtuk, hogy a 0-val osztási műveletet végzünk, hanem hogy *0 osztója 0-nak.*

A két fogalom; műveletreláció közötti minőségi különbség (melyre már utaltunk) oldja a két állítás látszólagos ellentmondását, miszerint: 0-nak minden szám osztója.

Másrészt: A 0-val való osztás értelmetlen. Tehát a reláció reflexív tulajdonságának vizsgálatánál nem kell kizárni a 0-t. Ezt a tulajdonságot itt gyakran úgy intézzük el, hogy minden szám osztja önmagát. Pedig ez már következmény, mégpedig az egységelem létezésének következménye:

$$a\cdot 1=a \quad \text{bármely a-ra.}$$

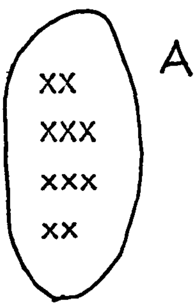
Ha ugyanis az oszthatóságot pl. csak a páros számok halmazában vizsgálnánk, a definíciót értelemszerűen átfogalmazva, már nem teljesíti a reflexív tulajdonságot. A páros számok halmazában nincs olyan „x", amelyre a:

$$2n=x\cdot 2n \text{ teljesülne a halmaz minden elemére.}$$

Párosság: kettővel való oszthatóság

A két tulajdonságot általában együtt említjük, egyiket a másikkal indokolva, ill. fordítva. Pedig azért itt, ebben a viszonyban is van bizonyos minőségi különbség.

Vizsgáljuk az A halmaz számosságát, különböző csoportosítás, vagyis alapszám szerint.



Alapszám	$\lvert A\rvert$
2	$101\boxed{0}$
3	101
4	$2\boxed{2}$
5	$2\boxed{0}$
6	$1\boxed{4}$
7	13
8	$1\boxed{2}$
9	11

Az A halmaz a számlálástól függetlenül páros számot reprezentál (elemeit párba állíthatjuk anélkül, hogy egy is kimaradna), és ez a *párosság* a csoportosítások során nyilvánvalóan *nem változik,* hiszen nem teszünk hozzá elemet, és nem is veszünk el. A számokat vizsgálva ugyanakkor láthatjuk, hogy *a 2-vel való oszthatóság szabálya* változik, ha az utolsó helyeken álló számokat vizsgáljuk, vagyis *alapszámtól függő.*

A természetes szám kardinális jelentéséből adódóan a párosság értelmezése akár bennfoglaló osztás, akár egyenlő részekre osztás alapján szemléletes. Visszatérve előbbi halmazunkhoz, képezhetjük annak 2 elemű diszjunkt részhalmazait, vagy felbonthatjuk két ekvivalens részhalmazra.

Utóbbinak megfelelően:

$$A=A_1 \cup A_2, \quad \text{ahol } |A_1|=|A_2|$$

valamint:

$$|A|=|A_1 \cup A_2|=|A_1|+|A_2|, \text{ mivel } A_1 \cap A_2=\emptyset$$

Ez algebrailag azt jelenti, hogy a természetes szám, amelyet A halmazzal reprezentáltunk, felírható olyan kéttagú összeg alakjában, amelyben a tagok egyenlők.

$$n=\bar{n}+\bar{n}$$

(megjegyezzük, hogy ennek a felírásnak a létezését állítjuk, és nem azt, hogy csak ez a felírás létezik.) Ebből adódóan is a „0” *párossága indokolt.*

Közös osztók — legnagyobb közös osztó

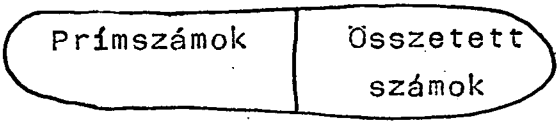
Ha a természetes számok halmazában az osztók száma szerint osztályozunk, nyilvánvaló, hogy a prím és összetett fogalmak nem komplemensei egymásnak.

Ez a két szám miatt van; ezek a „0” és az „1”.

kettőnél több, de véges sok	végtelen sok
egy osztója van	két osztója van

Ha az előbb említett két számot elhagyjuk, akkor

$$N \setminus \{0;1\}$$



Legyen $(a; b) \in N \times N$ és $(a; b) = d$

Az $(a; b) \rightarrow d$ hozzárendelés minden esetben egyértelmű, tehát függvény (nem egy-egyértelmű!).

Melynek *értelmezési tartománya:* $(N \times N) \setminus \{(0;0)\}$
értékkészlete: a „0” kivételével bármely szám.

Az értelmezési tartományból tehát csak az $a=b=0$ esetet zártuk ki. Nézzük azt az esetet,, amikor az elempár egyik eleme „0”. A közös osztók ebben az esetben nyilvánvalóan azonosak a nem nulla elem osztóival. A legnagyobb közös osztó így itt is egyértelműen meghatározott.

$$(0; b) = b$$

Alaposan át kell gondolnunk *az új matematikatanítás fogalombővítését,* ennek során egyes régebbi értelmezések értelemszerűen változnak. Az azonosságok mellett a különbözőségek egyidejű felismerése teszi egyértelművé a kapcsolatokat.

IRODALOM

Gyarmati Edit: Számelmélet (Turán Pál előadásai alapján, egyetemi jegyzet.). Tankönyvkiadó, 1980.
Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Bp., 1978.
Sain: Matematikatörténeti abc. Tankönyvkiadó, Bp. 1982.
Dr. Szendrei János: A korszerű matematikatanítás néhány témaköre. Módszertani Közl. Könyvtára 5., Szeged.