15. Rendezzetek felolvasó-, szavalóversenyt!
A felolvasás, a szövegtolmácsolás alkalmával törekedjetek a hangulat kifejezésére! Ennek eszközei: hangszínváltás, szünet- és tempóváltás, hangsúlyváltás.
16. Állítsatok össze faliújságot a „Toldi" témakör lezárására! Ugye tudjátok, hogy ezt a tablót is meg kell terveznetek? Legyen ritmusa a képek és a szövegféleségek elrendezésének, hiszen a munkátok így többet mond a szemlélőnek!
A legértékesebb faliújságot helyezzétek el a szaktanteremben!

FORRÁSJEGYZÉK

[1] *Dr. Dobcsányi Ferenc:* Irodalomtanításunk tantárgy-pedagógiai alapelvei, Módszertani Közlemények, 1979. 5.
[2] *Goda Imre—Horváth Zsuzsa—M. Boda Edit:* Irodalmi olvasókönyv (6. osztály).
[3] *H. Tóth István:* A megtanítás szolgálatában (Irodalom- és művészetelméleti fogalmak rendezése), egyetemi szakdolgozat.
[4] *Komár Pálné* (szerk.): Irodalomtanterv 5—8. osztály.

TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS GÁBORNÉ
Budapest

A valószínűségi gondolkodásmód fejlesztése az alapfokú matematikatanításban

Az általános iskola matematikai tanterve minimum követelményként egyetlen egyszer, nyolcadik osztályban ír elő valószínűséggel kapcsolatos elvárást: „Ismerjék fel a tanultakhoz hasonló valószínűségi feladatokat, tudják ezeket megfogalmazni és kombinatorikus vagy más módszerekkel megoldani" [1]. Lényegében a témakör anyagába tartozó ismereteket az általános iskolában nem „valószínűségszámításként" kell feldolgoznunk, hanem tanítványaink valószínűségi gondolkodásmódjának kialakítása, fejlesztése a cél. Ennek csak látszólag mond ellent az a tény, hogy a tantervi anyagban olyan valószínűségi fogalmak szerepelnek, mint a biztos — a lehetetlen — a lehetséges, de nem biztos események, a relatív gyakoriság, a feltételezett valószínűség, a kiszámított valószínűség, az egyenlően és a nem egyenlően valószínű elemi események, a várható érték, az események függetlensége, a valószínűségek szorzása, a korreláció. Ugyanis a valószínűségi gondolkodás fejlődésének útján az események függetlenségének intuitív fogalmának felismerésénél tanítványaink egy része már nem képes meszszebbre jutni. Viszont, ha ennek az „útnak" eddigi építése tanítványaink tényleges tapasztalatainak felhasználásával történt, akkor későbbi élethelyzeteikben (például középfokú tanulmányaik során) valószínűségi gondolkodásmódjuk fejlesztése nagy valószínűséggel eredményesen folytatható.

A matematika tanításának-tanulásának tanítványaink személyiségének fejlesztésében betöltő szerepét akkor tudjuk jól kihasználni, ha a fejlesztés és a korrigálás egyidejű megvalósítására törekszünk. Erre megfelelő keretet biztosít az a tantervi koncepció, amely a tananyag egyes témáinak-témarészleteinek feldolgozását nem egymás mellett vagy egymás után, hanem egymással összekapcsolva és egymással kölcsönhatásban kívánja meg. A tantervben megadott tananyagnak csak kisebb része követelmény az egyes osztályokban. A tananyag nagyobbik része előkészítő, érlelő jellegű. Ezeknek az ismereteknek az egyes anyagrészek közötti összefüggések feltárásában van jelentősége, követelményként csak valamelyik felsőbb osztályban szerepelnek. Így a differenciált követelményszint (minimum-optimum szétválasztása) lehetőséget biztosít a tanulók egyéni képességeinek, fejlettségi szintjének figyelembevételére. A tananyagnak lassú érlelés elvéhez igazodó elrendezése növeli az alkalmak számát a képességstruktúra korrektív jellegű befolyásolására. Az egyes témák anyagának egymásba fonódó rendszerében a fogalmak előkészítésére, kialakítására, elmélyítésére hosszabb idő áll rendelkezésre. A tananyag ilyetén való beosztása összhangban van a lassú érlelés elvének biztosításával, az anyag rendezésének azzal a szándékával, hogy általában nem egy-egy órán akarunk valamit megtanítani, hanem órák egymásutánján: sok tapasztalat, különböző oldalról történő megközelítése, tevékenységsorozat során.

Tanítványaink valószínűségi gondolkodásmódjainak legfontosabb fejlesztési szakaszai [2]:

— A lehetetlen, a biztos, a lehetséges, de nem biztos események megkülönböztetése.
— Az esetleges (lehetséges, de nem biztos) események összehasonlítása, annak eldöntése, hogy egyenlően valószínűek-e, vagy melyik esemény a valószínűbb.
— Annak megkülönböztetése, hogy valamely esemény nem következett be (kísérlet, megfigyelés során), vagy nem fordulhat elő (logikailag lehetetlen), illetve mindig ugyanaz az esemény következett be, vagy szükségszerűen mindig ugyanannak kell következnie.
— A valóságos gyakoriság és az elméleti várható érték megkülönböztetése.
— Annak felismerése, hogy a relatív gyakoriságok ingadozásai csökkennek, ha a próbák száma nő.
— A függetlenség intuitív fogalmának kialakulása.
— A független és a nem független események határozott szétválasztása.
— Feltételezett valószínűségekből más valószínűségek kiszámítása.

A klasszikus valószínűségszámítás olyan események vizsgálatával foglalkozik, amelyek egyenlően valószínű elemi eseményekből tevődnek össze. Például két kockával dobva a pontok összege többféle módon lehet 8 (2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2), mint 5 (1+4, 2+3, 3+2, 4+1), ezért annak valószínűsége, hogy a pontok összege 8 lesz, nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy ez az összeg 5 lesz.

A gyakorlati alkalmazás szempontjából (az elvileg azonos esélyt biztosító szerencsejátékok vizsgálatától eltekintve — ami nyilván sem oktatási, sem nevelési céljaink között nem szerepel) azok az igazán fontos valószínűségi problémák, amelyeknél nem tételezhetünk fel egyenlően valószínű elemi eseményeket. Ezért célszerű a statisztikus — a gyakoriság kísérlettel történő megállapításán alapuló — valószínűségfogalmat erősíteni.

A relatív gyakoriság megállapítása nyilván feltételezi az összes esetek számának meghatározását (kombinatorikus probléma esetén), valamint a kedvező esetek kiválasztásának gyakorlását. Nyilván egyenlően valószínű elemi események vizsgálatára alapozva egyszerűbb kialakítani a fogalmat (pénzfeldobás, golyóhúzás, kockadobás stb.), de el kell jutnunk addig a szintig, amikor az elemi események nem egyenlően valószínűek, azaz foglalkoznunk kell megfigyelés, kísérlet, statisztikai adatgyűjtés eredményeinek vizsgálatával is. Ez a feltétele annak, hogy tanítványaink felismerjék a véletlen szerepét és jelentőségét a világban. Ilyen tapasztalatok nélkül nehezen válik tanítványaink meggyőződésévé az a tény, hogy tömegjelenségek esetén is van érvényes törvényszerűség a véletlen események bekövetkeztére. A világ jelenségeinek anyagi oka-okai van-vannak. A jelenségekben mutatkozó szabályszerűséget ok-okozati összefüggéseket nevezzük természettörvényeknek. Ezeknek a törvényeknek a feltárása rendkívüli jelentőségű, mert lehetővé teszi számunkra, hogy előre lássunk eseményeket, más eseményekre vonatkozó ismereteink alapján.

Ennek ellenére az előreláthatóságot nem szabad az okság fogalmával azonosítani, mert számtalan bonyolult jelenség vizsgálatánál nincs lehetőség olyan fokú előrelátásra, mint például a mechanikában. De hibás az okság azonosítása az előreláthatósággal azért is, mert előreláthatóság okság nélkül is lehetséges. A modern tudomány fejlődése során kiderült, hogy az előrelátások teljessége és pontossága rendkívül sok körülménytől függ, lehet pontatlanul jósolni oksági törvény alapján, míg ezzel szemben a statisztikus törvényekkel néha lényegesen magasabb fokú előreláthatóság biztosítható.

Valószínűségi problémák tárgyalásakor a „kísérlet" kifejezést tág értelemben használjuk. A történéseket is kísérletnek nevezzük. Nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a feltételeket mi szabjuk meg, sőt még akkor sem mindig, ha ismerjük az összes feltételt.

A valószínűségi kísérletek végzése időigényes feladat, mert a relatív gyakoriságok ingadozásainak csökkenését úgy érhetjük el, ha a próbák számát növeljük. Minél jobban növeljük a próbák számát, annál inkább közelíti az egyes események gyakorisága a számítható (egyenlően valószínű elemi események esetén) valószínűséget, illetve azt a számot, amit a vizsgált elemi esemény-események bekövetkeztének valószínűségén értünk. Célszerű a valószínűség tárgykörébe tartozó tapasztalatszerzést a kombinatorikai gondolkodásmód fejlesztésének, a statisztikai adatok feldolgozásának, grafikonon való ábrázolásának, a logikai kifejezések használatának, az egyszerű következtetések gyakorlásának lehetőségeként is felhasználni,. Ez a tapasztalatszerzés ne csak ténylegesen elvégzett, „manuális" kísérletekből álljon. [3] Gondolatkísérleteket is végezhetünk, elképzelt események valószínűségét is összehasonlíthatjuk (ha az előforduló elemi események egyenlően valószínűek, illetve részben biztosak vagy lehetetlenek). A történéseket is kísérletnek tekintjük a valószínűségszámításban. Így statisztikai adatok feldolgozását is összekapcsolhatjuk valószínűségi megfigyelések, következtetések gyakorlásával.

Az általános iskola felső tagozatán jelenleg használt matematikai tankönyvekben és feladatrendszerekben a valószínűségi problémákkal foglalkozó részek terjedelme kevesebb, mint amennyi az egyes témakörökkel való foglalkozás tantervi arányainak megfelelne. Egyrészt ezért, másrészt azon meggyőződésünk miatt, hogy a gyakorló pedagógus az elméleti fejtegetéseknél gyakran használhatóbbnak tartja a konkrét feladatokat: tanítási gyakorlatunk néhány bevált feladatát is közreadjuk.

1. Egészítsd ki a következő mondatokat!

a) Ha egyszerre két kockát dobunk fel, akkor az összeg:

— biztosan kisebb, mint .... és nagyobb, mint ....

— nem lehet nagyobb, mint .... és kisebb, mint ....

b) Ha egyszerre három kockát dobunk fel, akkor az összeg:

— biztosan kisebb, mint .... és nagyobb, mint ....

— nem lehet nagyobb, mint .... és kisebb, mint ....

2. Egyszerre két kockával dobva, mit állíthatunk a dobott számok összegének nagyságáról?

	Talán	Biztos	Lehetetlen
a) Nem nagyobb, mint tizenkettő.	☐	☐	☐
b) Nagyobb, mint kettő.	☐	☐	☐
c) Kisebb, mint tizenhárom.	☐	☐	☐
d) Kisebb, mint kettő.	☐	☐	☐
e) Nagyobb, mint három.	☐	☐	☐

3. Egyszerre három kockával dobva, mit állíthatunk a dobott számok összegének nagyságáról?

	Talán	Biztos	Lehetetlen
a) Kisebb, mint tizennyolc.	☐	☐	☐
b) Nem nagyobb, mint tizennyolc.	☐	☐	☐
c) Kisebb, mint három.	☐	☐	☐
d) Nagyobb, mint három.	☐	☐	☐
e) Éppen három.	☐	☐	☐

4. Egyszerre két kockával dobva, mit gondolsz valószínűbbnek?
   a) A kapott számok összege hétnél nagyobb vagy nyolcnál kisebb? ....
   b) A kapott számok összege hatnál nem nagyobb vagy hatnál nem kisebb? ....
   c) A kapott számok összege hétnél kisebb vagy hétnél nagyobb? ....
5. Egyszerre két kockát feldobva: mi a valószínűbb?
   Az összeg páros szám lesz, vagy az, hogy az összeg páratlan szám lesz?
6. Mekkora a valószínűsége annak, hogy

38,80 Ft-nyi fémpénzt összerázva és feldobva, azok mindegyike „írás" lesz, ha minden fémpénzből van egy-egy példány?

A feldobott pénzérmék darabszáma:

Egy pénzérmét feldobva az	$2=2^1$	féleképpen eshet.
Kettő pénzérmét feldobva azok	$4=2^2$	féleképpen eshetnek.
Három pénzérmét feldobva azok	$8=2^3$	féleképpen eshetnek.
Négy pénzérmét feldobva azok	......	féleképpen eshetnek.
Öt pénzérmét feldobva azok	......	féleképpen eshetnek.
...		
...		
Nyolc pénzérmét feldobva azok	......	féleképpen eshetnek.

Ezek szerint:

Az összes esetek száma: ....

A kedvező esetek száma: ....

A kérdezett valószínűség: ....

7. Nyolc golyó van egy edényben: öt kék és három piros.
Összekeverem, és egyet találomra kihúzok.

Visszateszem, újra összekeverem, majd ismét találomra kihúzok egyet. Ezt ismétlem újra meg újra.

a) Lehetséges, hogy elsőre pirosat húzok? ....

b) Lehet-e, hogy előbb nem, hanem csak nyolcadikra húzok pirosat? ....

c) Előfordulhat-e, hogy egymás után négyszer húzok kéket? ....

d) Biztos-e, hogy negyedikre kéket húzok, ha elsőre, másodikra és harmadikra is kéket húztam? ....

8. Tibor 480 bélyegből álló gyűjteményében 62 bélyegen híres ember képe, 41 bélyegen festmény, 55 bélyegen sport témájú motívum van.
Mekkora a valószínűsége annak, hogy a gyűjteményből találomra kiválasztott bélyegen festmény vagy sportmotívum lesz?

festmény: ....

sport: .... Az összes esetek száma: ....

együtt: .... A kedvező esetek száma: ....

A kérdezett valószínűség: ....

9. A kieséses rendszerű tollaslabda-bajnokságra 29-en neveztek be. Három erős versenyzőt az első fordulóban kiemeltek, ők játék nélkül jutnak tovább.
Mekkora annak a valószínűsége, hogy Mozgékony Magda az első fordulóban Ravasz Róbert ellenfele lesz
— ha Ravasz Róbert a kiemeltek között van?
— ha egyikük sincs a kiemeltek között? ....

10. Az egyik harmincfős osztályban havonta három mozijegyet sorsolnak ki a gyerekek között. Tíz hónap alatt éppen 30 darabot.
Szeptemberben 3 fiú nevét húzták ki.
Mit gondolsz?

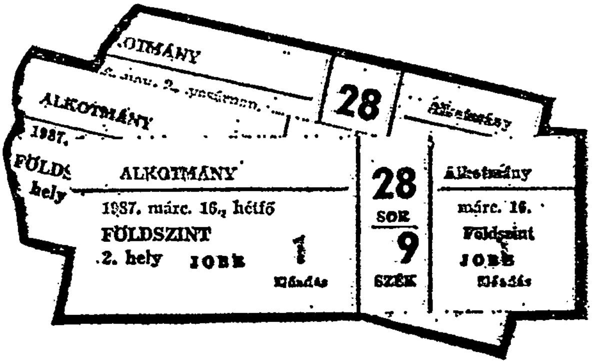
a) Lehet, hogy csak fiúk járnak ebbe az osztályba?

....

b) Biztos, hogy csak fiúk járnak ebbe az osztályba?

....

c) Legalább hány fiú jár ebbe az osztályba: ....



A sorsolások eredménye:

Hónap	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI
Leány	0	2	2	3	2	1	3	2	1	2
Fiú	3	1	1	0	1	2	0	1	2	1

d) A következő esetek közül melyiket tartod a legvalószínűbbnek?
Húzd alá!
Az osztályba 3 fiú és 27 leány jár.
Az osztályba 15 fiú és 15 leány jár.
Az osztályba 12 fiú és 18 leány jár.
Az osztályba 27 fiú és 3 leány jár.
Az osztályba 18 fiú és 12 leány jár.

11. Andrea, Barbara és Cecília ugyanabban a szakosztályban sportolnak. Egyszer edzésen csak ők hárman futottak.
a) Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha egyikük sem érkezett egyszerre a másikkal?
....

....

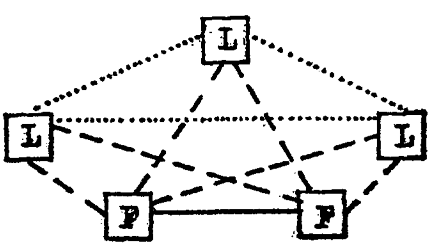
b) Mi a valószínű sorrend, ha legutóbbi eredményeik a következők?

Andrea:	56.28	55.65	56.09	55.21	56.49	55.81
Barbara:	55.42	56.13	55.20	55.18	56.31	55.90
Cecília:	56.35	56.43	55.64	55.73	55.45	55.48

A célba érkezés legvalószínűbb sorrendje: ....

12. Egy edényben 33 egybevágó színes golyó van. A golyók között van kék, piros, sárga és zöld színű is. Becsukott szemmel legalább 22 golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen a golyók között mind a négyféle színűből valamennyi.
Legfeljebb mennyi lehet az azonos színű golyók száma: ....

13. Három leány és két fiú között két színházjegyet sorsolunk ki. A gyerekek nevét egy-egy cédulára írjuk, a cédulákat kalapba tesszük. Találomra két cédulát kihúzunk.
Melyik a legvalószínűbb a következő párosítások közül:



— két lány neve: ....
— két fiú neve: ....
— egy leány és egy fiú neve: ....

14. Egy futballklub edzésének megkezdése előtt az edzésen résztvevő 22 játékost két csapatra osztják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha sorsolással történik a szétosztás, a két legjobb játékos egymás ellen játszik?

Összes esetek száma: ....

Kedvező esetek száma: ....

Valószínűség: ....

15. Öt szakasz közül választhatjuk ki azt a hármat, amelyekből háromszöget szerkesztünk.
A szakaszok hossza: 3 cm, 4 cm, 5 cm, 7 cm, 9cm.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a találomra kiválasztott három szakaszból megszerkeszthető a háromszög?
A háromszög szerkeszthetőségének az a *feltétele,* hogy a kiválasztott három szakasz bármelyikének a hossza ....
Nem szerkeszthető háromszög a

3, 4, 7 centiméteres szakaszokból, mert $3+4=7$
centiméteres szakaszokból, mert $3+4<9$
centiméteres szakaszokból, mert
centiméteres szakaszokból, mert

Ötelemű halmaz háromelemű részhalmazainak száma: ....

Az összes eset száma: ....

A kedvező esetek száma: ....

A kérdezett valószínűség: ....

16. Egy iskola farsangi rendezvényén összesen x forintért adták el a tombola sorsjegyeit. Egy sorsjegy y forintba került. Összesen z darab nyereményt sorsoltak ki.
Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy sorsjeggyel nyereményhez jutunk?

Az eladott sorsjegyek száma: ....

Összes esetek száma: ....

Kedvező esetek száma: ....

Valószínűség: ....

17. Egy edényben 3 piros és 2 kék golyó volt. Legalább hány kék golyót kellett az edénybe helyeznünk ahhoz, hogy ezután találomra kihúzva egy golyót az edényből, az 0,8-nél nagyobb valószínűséggel kék színű legyen?
18. Biharugrán, a halgazdaságban az egyik tó halállományának becslése céljából kihalásztak k számú halat. A halakat megjelölték, majd visszatették őket. Néhány nappal később ismét kihalásztak valamennyit (n darabot), s az ezek között talált megjelölt halak számának (z darab) ismeretében becsülték a tóban levő halak h számát.
Add meg a becslés eredményét!

IRODALOM

[1] Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Művelődési Minisztérium, 1981 (második kiadás). 259—298., 591—625. oldal.
[2] *Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna:* Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató Matematika 6. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. 198.—202. oldal.
[3] *Takács Gábor:* Matematikai absztrakciók alapozása manuális tevékenykedtetéssel. Módszertani Közlemények, 1983. 4. szám. 258—263. oldal.
[4] *Varga Tamás:* Játsszunk matematikát 1. Móra Könyvkiadó. Budapest, 1976. 65—91. oldal.
[5] Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához, 1—4. osztály. Első rész. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1986.