| | | |
|---|---|---|
| *Ezek megoszlása:* | Értelmező: | 20 család |
| | Idegen szótár: | 26 család |
| | Új m. lexikon: | 26 család |
| | Kislexikon: | 15 család |
| | Ifjúsági kislexikon: | 12 család |
| | Egyéb lexikon: | 28 család |

Szívesen fogadnám, ha az ország bármelyik részéből írásomra reagálnának a kollégák. Örülnénk, ha a Módszertani Közlemények Szerkesztősége vitát nyitna erről a felmérésről, amely témáját illetően ma még nem szokásos, nem gyakorlat.

BEREZNAI GYULA
Nyíregyháza

# A nyitott mondatok és szerepük az általános iskolai matematika tanításában

Ezen dolgozat megírásának kettős indíttatása van. Egyrészt az a tapasztalat, hogy a nyitott mondatok szerepével, hasznosságával, alkalmazhatóságával és egyéb tanításbeli előnyeivel nevelőink mindinkább tisztában lesznek, szívesen nyúlnak hozzá, a tanulók pedig hamar megbarátkoznak vele. Minden különösebb magyarázgatás nélkül megértik, egyáltalán nem érzik idegennek vagy megterhelőnek, ugyanakkor hatásos segédeszköznek bizonyul a logika elemeinek, az egyenletek stb. tanításának előkészítésében. Másrészt azonban megfigyelések és tapasztalatok (Imrecze Zoltánné: Matematikaórán láttuk; A Tanító, 1986. szept.) szerint a nevelők egy része nem eléggé felkészülten alkalmazza a nyitott mondatokat a tanítási órákon, sőt igen sok esetben a tanulók hibás megállapításait helyesekként fogadják el. Mindezek az érvek indokolják a nyitott mondatokkal való részletesebb foglalkozást.

*

Beszédünk, írásunk, gondolkodásunk legkisebb önálló értelmes részegysége a mondat, amely mindig valamilyen gondolatot, szándékot fejez ki. Ha a mondat csak egyetlen gondolatot tartalmaz, egyszerű, egyébként összetett mondat a neve. A beszélő szándéka szerint pedig kijelentő, felkiáltó, kérdő, óhajtó és felszólító mondatokat különböztetünk meg. Ezek közül minket most csak a kijelentő mondatok fognak érdekelni. Nem véletlenül: a köznapi életben és az egyes szaktudományok nyelvében előforduló kijelentő mondatok mindegyike valamilyen állítást fejez ki, s ezek között vannak olyanok, amelyekre elvileg érvényes az, hogy egyértelműen eldönthetően vagy igaz vagy nem igaz (elfogadott szóhasználattal: hamis) állítást tartalmaznak. Az ilyen kijelentő mondatokat *kijelentések*nek (*ítéletek*nek) nevezzük.

Az ítéletek a matematikai logika vizsgálati tárgyát képezik, s míg a nyelvtan azzal foglalkozik, hogy mik a mondat részei, a szavak sorrendje stb., s ezektől függően hogyan módosul a mondat jelentése, addig a matematikát csak az érdekli, hogy egy bizonyos kijelentés igazságértéke micsoda. Az a tény, hogy ily módon elvonatkoztatunk a kijelentés tartalmától, lehetővé tesz egy újfajta absztrahálást, azt nevezetesen, hogy a kijelentésekkel kapcsolatosan teljesen általános megállapításokat tegyünk, s a továbbiakban azon megállapítások egymás közötti kapcsolatait tanulmányozzuk. Ez képezi a matematikai logika tárgyának elemeit. Formailag ugyanis minden kijelentő mondat állít valamit, de mi csak azzal törődünk, hogy ez az állítás igaz-e (I), vagy hamis (H), ha egyáltalán értelmes ez az állítás, és logikai értéke egyértelműen megállapítható.

Így tehát nem ítéletek az alábbi mondatok:

*a)* Elkészültél már?
*b)* Talpra magyar!
*c)* *Hej,* ha én is, én is köztetek lehetnék!
*d)* $x<18$;
*e)* □ angol magasugró;
*f)* Ingrid szép;
*g)* Esik az eső.

*a), b)* és *c)* ugyanis nem kijelentő mondat, *d)* és *e)* esetében pedig a kijelentés igazságértéke attól függ, hogy mit írunk x és a „helytartó" □ helyére, *f)*-nél az igazságérték a probléma, erősen szubjektív volta miatt mindig vitatható, *g)* esetében az állítás igazságértéke függ az időponttól és a helytől (ez az ún. kontingens ítélet).

Emlékeztetünk arra, hogy a kijelentő mondat ítéletvoltának az a feltétele, hogy elvileg egyértelműen eldönthető legyen, hogy a mondat vagy igaz, vagy hamis állítást tartalmaz. Nem fontos tehát, hogy pillananyilag tudjuk mondani, hogy igazságértéke I vagy H, elég, ha biztos az, hogy e kettő közül pontosan az egyik lehetséges. Ezért például: „A $\pi$ tízezredik tizedes jegye páros szám", vagy „A nagy Format-sejtés helyes" ítéletek, mert nyilvánvalóan igaz vagy hamis állítást tartalmaznak, ha pillanatnyilag nem tudjuk is eldönteni, hogy ezek közül melyik. Mivel minden értelmes ítélethez vagy az igaz, vagy a hamis logikai érték rendelhető hozzá, itt olyan kétértékű függvényről van szó, amelynek értelmezési tartománya a kijelentések (ítéletek) halmaza, értékkészlete pedig az $\{I; H\}$ halmaz.

Gyakran tapasztalhatjuk, hogy nevelők és tanulók csak azokat az állításokat tekintik ítéleteknek, amelyek ismereteik szerint igazak. Sok esetben fogalmazunk így: „Legyen az ABC háromszög derékszögű." Ez esetben ezt az ABC háromszöget derékszögűnek kell tekintenünk a vele való egész foglalkozás folyamán.

Tehát egy kijelentés feltételezésünk szerint igaz mindaddig, míg logikailag az ellenkezőjéről nem győződünk meg. Ha viszont ez bekövetkezik, akkor feltételezésünk volt hamis, mert igaz ítéletből csak igaz, hamisból viszont bármi következik. Ez az alapja az indirekt bizonyításnak.

Azt a tévhitet, hogy egy kijelentés csak igaz lehet, ilyen és hasonló élmények emlékei mellett nagymértékben táplálja az a gyakorlat is, hogy matematikai tételeket általában igaz állítások formájában fogalmazunk meg.

Példáink közül a *d)* és *e)*-vel jelzettek nem kijelentések, hanem úgynevezett *kijelentésformák* (predikátumok), vagy az oktatásban közismertebb nevükön *nyitott mondatok,* mert változókat (x és □) tartalmaznak, amelyeket megengedett módon tárgyalnak, emberek, fogalmak nevével, illetve számokkal helyettesítve kijelentések jönnek létre. A változók tehát olyan jelek, szimbólumok, amelyek helyére konkrét neveket helyettesíthetünk. Természetesen minden esetben csak olyan nevek helyettesítéséről lehet szó, amelyekkel a behelyettesítéssel nyert mondat értelmes állítássá lesz, vagy amelyeknek a változó helyére való beírása megengedett. Hogy ezek a lehetőségek fennállnak-e, az rendszerint a mindenkori összefüggésekből derül ki, vagy explicite meg van adva. Így például az *e)* alatti állításban csak személynevek jöhetnek számításba *d)*-nél pedig csak valós számok kerülhetnek az x jel helyére. A behelyettesítésnél tudnunk kell, hogy egy feladaton belül azonos változó csak azonos elemekkel helyettesíthető, különböző változók azonban helyettesíthetők mind azonos, mind különböző elemekkel.

Azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek egy adott nyitott mondatba behelyettesíthetők, az illető nyitott mondat *alaphalmazának* nevezzük. Az alaphalmaz azon részhalmazát, amelynek elemei a nyitott mondatot igaz állítássá teszik, a nyitott mondat azon halmazon vett *megoldáshalmazának* (*igazsághalmazának*) nevezzük.

A nyitott mondat megoldáshalmaza (igazsághalmaza) természetesen lehet egy-, két- vagy több-, esetleg végtelen sok elemű, de akár üres halmaz is. A megoldáshalmaz mindig függ az alaphalmaztól, tehát mindig meg kell mondanunk, hogy mely halmazon keressük a megoldást.

Tudnunk kell, hogy ugyanazon az alaphalmazon egyszerre több nyitott mondat is értelmezhető. A nyitott mondat fogalma nem tévesztendő össze a hiányos mondatéval. Ez utóbbi tisztán grammatikai.

Az ugyanazon halmazon értelmezett nyitott mondatok együttese nyitott mondatrendszert alkot. Egy nyitott mondatrendszer megoldáshalmaza a rendszert alkotó egyes nyitott mondatok igazsághalmazainak közös része.

Most már lehetőség nyílik az egyenlet fogalmának ezen az úton történő értelmezésére is: Az olyan nyitott mondatot, amely két algebrai kifejezésről azt állítja, hogy egyenlő valamely halmazon, amelyen értelmezve van, ezen a halmazon értelmezett *egyenletnek* nevezzük. Megoldásai alkotják a nyitott mondat igazsághalmazát.

Hasonlóképpen értelmezzük az egyenletrendszert s annak megoldását is.

Ezt a definíciót az általános iskola 5. osztályos tankönyve a 144. oldalon így fogalmazza meg: „Egyenletnek az olyan nyitott mondatot nevezzük, amelynek az az állítmánya, hogy ‚egyenlő' (vagyis =)."

Az egyenletnek ilyen definíciója általános, hiszen átvihető minden olyan halmazra, amelynek elemeire értelmezhető a kifejezés fogalma és az egyenlőségi reláció.

Végül ejtsünk szót valamely számhalmazon értelmezett egyenlőtlenségekről, egyenlőtlenségrendszerekről is.

Az olyan nyitott mondatot, amely azt állítja, hogy értelmezési tartományán egy algebrai kifejezés nagyobb (kisebb) vagy esetleg egyenlő számértékkel bír, mint egy másik algebrai kifejezés, ezen a halmazon értelmezett *egyenlőtlenségnek* nevezzük. Ebben az esetben is beszélhetünk a megoldáshalmazról (igazsághalmazról).

Befejezésül még néhány megállapítással zárjuk eszmefuttatásunkat:

1. Semmi sem indokolja, hogy a kijelentés vagy nyitott mondat fogalmát az általános iskola első két osztályában bármiféle magyarázgatásnak vessük alá. Az olyan megállapításokat, hogy: ez a kijelentés igaz vagy hamis, a tanulók intuitíve is helyesen ragadják meg, anélkül, hogy a logikai vagy igazságérték fogalmát egyáltalán diszkutálnók. A kijelentés szó tehát minden további nélkül bevezethető a tanításba.

Némileg másként áll a helyzet a felsőbb osztályokban, és különösen a nyitott mondatok vonatkozásában. A nyitott mondatokat felhasználjuk ugyanis az egyenletek, egyenlőtlenségek későbbi tanításának előkészítésére is, s így nagy szerepet játszik az a tény, hogy a változó (ismeretlen) fogalmát is elő kell készíteni. A nevelő ha tudatosan akar eljárni, az életkori sajátosságok fetisizálása nélkül, de azt nem is zárójelbe téve, sokkal inkább a gyerekek előismereteire támaszkodva, belátása szerinti időkben, módokon és adagokban teszi mind tudatosabbá, és gyarapítja tanítványai ez irányú ismereteit is. Ez a folyamat már a harmadik osztályban kezdetét veheti, hiszen itt a tanulók már megismerkednek a mondatfajtákkal, s rendelkeznek némi intuitív logikai ismeretekkel is. A változó szerepét — anélkül, hogy azt túlmagyaráznók — a tanulókban tanulmányaik előrehaladtával mind tudatosabbá és elmélyültebbé lehet s kell is tenni, a kezdeti „helyfoglaló" elnevezéstől kezdve a későbbi „változó"-ig, hangsúlyozva, hogy olyan jelről van itt szó, amely fenntartja a helyet bizonyos megengedett (legtöbbször előre megadott) halmazelemek behelyettesítése számára, ami által a nyitott mondat igaz vagy hamis logikai értékű kijelentéssé alakul.

2. A nyitott mondatok minél jobb ismerete elősegíti más fogalmak teljesebb megértését, s így segítségére lehet a matematika egyéb fejezetei tanulmányozásának is.