

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése az alapfokú matematikatanításban

A tanulók áttekinthető, rendszerezőkéességének fejlesztésére különösen alkalmasak a kombinatorikai feladatok. A kombinatorikai problémák megoldása a gyerekeknek gyakran könnyebben megy, mint a felnőtteknek. A játékos megközelítés, az ilyen típusú feladatok megoldásával együtt járó sikerélmény a tanulók motiválása szempontjából is fontos tényező.

A tantervben előírt [1], [2] kombinatorikai ismeretek megfelelő feldolgozásával közelíthetjük meg legjobban a matematika tanításának azt a célját, hogy ismeretlen, szokatlan típusú feladatok megoldásához is hozzá tudjanak kezdeni tanítványaink, és több-kevesebb segítséggel meg is tudják oldani az ilyen feladatokat. Kétes értékű az olyan képességfejlesztés, ami csupán egy-egy feladattípus megoldására történő felkészítésre korlátozódik, hasonló feladatok rendkívül nagyszámú megoldatásán alapszik. Természetesen ezt nem szabad szembe állítani azzal, hogy a kombinatorikában is hasznos bizonyos algoritmusok (típusfeladatok megoldásának módszerei) ismerete, de inkább csak mint a kombinatorikus gondolkodásmód eszközeként.

Kombinatorikaként lényegében véges számú elemekből képezhető halmazok adott feltételeket kielégítő változatainak előállítását, illetve e változatok számának megállapítását tanítjuk. Tanítványaink kombinatorikus gondolkodásmódjának legfontosabb fejlesztési szakaszai [3]:

- Adott feltételeknek megfelelő egy vagy több eset előállítása.
- Minél több különböző eset előállítása.
- A lehetséges esetek logikus rend szerinti előállítása.
- Az összes lehetséges eset előállítása, annak belátása, hogy nincs több olyan eset, ami az adott feltételeknek megfelel.
- Az esetek számának megállapítása, az összes eset előállítása nélkül.
- Szemléleti tartalmukban különböző, de matematikailag egyező feladatok kapcsolatának felismerése.
- A feltételek változtatása, a változtatás következményeinek felismerése.

Kombinatorikai feladat megoldása különböző szinten történhet, és még az azonos készségi szinten levő tanulóktól is különbözőképpen várható. Ezért a kombinatorikai feladatok megoldásakor vegyük figyelembe azt a közismert tényt, hogy a tanulók megfelelő differenciálása a tanítás frontális szervezetében igen nehezen oldható meg. Mivel a kombinatorikai problémák elfogadható megoldásai még a probléma megközelítésében is lényegesen különbözhetnek, ügyelnünk kell arra, hogy ne szorítsuk vissza tanítványaink jó kezdeményezéseit. Ugyanis a gondolkodás fejlődését hátráltatja, ha a tanuló olyan segítséget kap, amely őt az érdemi gondolkodás alól felmenti. Még az azonos eljárással, azonos „rendező elv” alapján megoldott kombinatorikai feladatoknál is különbözhet a lehetséges esetek számbavétele. Például személyek adott feltétel/feltételek szerinti fa-diagramon történő csoportosítása nyilván elvégezhető a személynevek abc... szerinti sorrendjében, a neveknek a feladat szövegében szereplő sorrendje szerint, de bármely önkényesen választott (a feladat feltételeivel nem ellenkező) sorrend szerint is. Éppen ez az oka annak, hogy a kombinatorikai problémák megoldása különösen alkalmas a tanulók gondolkodásának fejlesztésére, rendszerező, áttekinthető készségi kialakítására. Szoktassuk rá a gyereket, hogy a feltételnek/feltéte-

leknek megfelelő eseteket né egymástól függetlenül, „ad hoc”-szerű módszerrel gyűjtsek össze. Mindig keressenek valamilyen „rendszerző elvet”, amelyet követve biztosabb, hogy minden szóba jöhető esetet megtaláljanak. Az összegyűjtött esetek rendezése az alapja a hasznos tapasztalatok szerzésének. Rendszerzés nélkül még annak megállapítása is bizonytalan, hogy minden eset valóban különböző-e. Az esetek rendezett (logikus sorrendben felírt, fa-diagramon ábrázolt, táblázatba foglalt stb.) összegyűjtése alapján lehet belátni, hogy tényleg nincs több eset. Így figyelhetnek fel arra, hogy milyen eseteket hagytak ki, milyen esetek hiányoznak a teljes rendszerből.

Kombinatorikai problémák megoldásakor, a lehetséges esetek összeszámolása során fontos szempont, hogy nem számoltunk-e valamit többször. Tájékozódunk kell arról, hogy értik-e a gyerekek a megoldandó kombinatorikai feladat kikötéseit. Mi az értelme, jelentése számukra az egyes feltételeknek? A matematika területén szokásos az a megegyezés, hogy kikötés hiányában a lehető legáltalánosabb feladatot oldjuk meg. Ezért fontos, hogy ne értsenek bele a feltételek közé olyanokat is, amelyeket a feladat szövege nem tartalmaz.

A fokozatosságnak, a nehézségek fokozásának elve a pedagógustól megkívánja, hogy a tananyag feldolgozásánál figyelembe vegye a tanulók fejlődési sajátosságait. Ehhez a matematika tananyag tantervi elrendezése-felépítése megfelelő keretet biztosít, hiszen az egyes témakörök az egymást követő osztályokban bővítve kerülnek feldolgozásra. Minden év tananyaga és követelményrendszere épít az előző évre, és előkészíti a következő évit. Így a tananyag és a követelmények is koncentrikusan bővülnek. A nehézségek fokozásának elve az ismeretszerzés didaktikai fázisaiban olyan triviális átmeneteket kíván, mint: a közeliről a távolabbira; a könnyebből a nehezebbre; ismertől az ismeretlenre; az egyszerűtől az összetettig.

Alsó tagozaton a kombinatorikai problémák megoldását a lehetséges esetek tényleges előállítása (kirakása, színezése, leírása) jellemzi. A 6—10 éves gyermekek többsége a cselekvő-szemléletes gondolkodás szintjén képes legeredményesebben tapasztalatokat szereznii, problémahelyzetet átlátni. Az eszközök használata mindaddig célszerű, amíg a szükséges absztrakció ki nem alakult. Így az eszközökkel feldolgozott ismeretanyagban szereplő problémákhoz hasonlóakat a tanulók pusztán elképzelés alapján is meg tudnak oldani.

Nem véletlen, hogy pedagógiai gyakorlatunk szállóigéjévé vált az a mondás, hogy „a fejlődés alapfeltétele a tevékenykedés”. Ehhez a matematika tantárgy vonatkozásában azt azért hozzá kell tennünk, hogy intellektuális értelemben is értendő a tevékenykedés. Az igazi fejlődés, művelődés (ellentétben a közfelfogásban elterjedt, „közösségként” való szemlélődéssel) az a tevékenység, amikor az ember problémát, problémákat old meg eredményesen. Közismert, hogy „az ember átlag 20%-át jegyzi meg annak, amit hall, 30%-át annak, amit lát, 50%-át annak, amit lát és hall, 70%-át annak, amit önmaga mond és 90%-át annak, amit csinál”. [4] Meggyőződésünk, hogy a tanári magyarázat, illetve a tanulótársak megoldása meghallgatásának és megfigyelésének lényegesen kisebb jelentősége van az egyén gondolkodásának fejlődésében, az igazi tevékenységhez, az önálló feladatmegoldáson alapuló tanuláshoz viszonyítva. A matematikatanítás egyik legfontosabb feladata az önálló, problémamegoldó gondolkodásra nevelés. Önálló problémamegoldásra viszont csak úgy nevelhetünk, ha elegendő alkalmat biztosítunk a tanulóknak önálló gondolkodásra, önálló problémafejtésre. Ezért lehetőleg növelni célszerű az önálló munka keretében sorra kerülő feladatmegoldások számát.

A gyermekek matematikai ismerete akkor lesz megbízható, ha gazdag tapasztalati anyagra támaszkodik. Ezért olyan fontos, hogy minden anyagrészt sokféle módon közelítsünk meg, változatos tevékenységgel dolgozzuk fel. Ugyanazt a matematikai tartalmat különböző tárgyi eszközökkel is jelenítsük meg, s. ügyeljünk arra, hogy az is-

meretsajátítás folyamatát praktikus cselekvésekkel indítsuk, és konkrét érzékszervi szemléletre alapozva jussanak el tanítványaink az absztrakt fogalmi szintre.

A tárgyi cselekvéses szinten megvalósítható megismerési folyamatoknak a matematikai gondolati tevékenységek alapozásánál betöltött alapvető szerepe indokolja, hogy lehetőleg minél több alkalmat biztosítsunk tanítványainknak manipuláción alapuló ismeretszerzésre. A manuális tevékenykedtetéshez használt tárgyak természetesen csak munkaeszközei az ismeretszerzésnek. Alkalmazásuk csak akkor igazán indokolt, ha az a pedagógus tanítási módszerével összhangban van, ha a pedagógus a meggyőződéssel választja az ismeretek ilyen történő feldolgozását, hogy oktatási-nevelési célkitűzései megvalósításához így juthat legközelebb. Megnyugtató, hogy ma már a matematikát tanító kollégák többségének mindennapi munkája tapasztalatain nyugszik az a meggyőződése, hogy érdemes a munkaeszközöket használnia, használtatnia.

A tanulók problémamegoldó gondolkodásra való neveléséhez felhasználható tárgyak nem csak az általánosan használt munkaeszközök közül kerülhetnek ki. Ezek körét lényegében a rendelkezésre álló tárgyi feltételek mellett alapvetően a pedagógus felkészültsége, személyisége határozza meg. Nyilván a tankönyvek, munkalapok szerzői a tananyag feldolgozását csak a tantervi utasításban előírt munkaeszközök, illetve a tanulók közvetlen környezetében megtalálható tárgyak használatára alapozhatták. Hiszen a „nyomtatott taneszközök” a mindennapi oktató-nevelő munka standardjának szerepét töltik be, így egyes eszközök esetleges hiánya a kapcsolódó anyagrész feldolgozását tenné bizonytalanná.

A tanulók problémamegoldó gondolkodásra való neveléséhez ne csak a tanterv által előírt munkaeszközöket használjuk. Környezetünk tárgyainak többsége alkalmas arra, hogy manipulációs tevékenység eszköze vagy matematikai tapasztalatok biztosításához szükséges megfigyelés tárgya legyen. [5]

A véges számú elemekből képezhető véges sorozatok és halmazok, konkrét (általában előre adott) feltételeket kielégítő változatainak előállítását, illetve a változatok számának meghatározását alsó és felső tagozaton egyaránt tevékenységre kell alapoznunk. A változatok előállítása és leszámlálása, vagyis az összes lehetséges eset áttekinthetése fa-diagram, út-diagram, táblázatos elrendezés készítésével történhet. Természetesen ugyanazon feladat megoldása (az összes lehetséges eset számbavétele) többféle módon is elvégezhető. Céljaink között nem szerepel a klasszikus kombinatorikai problémák fogalmi tisztázása — permutációk, variációk és kombinációk —, ezek ismétlés nélküli, illetve ismétléses típusainak felismertetése.

Negyedik osztály végén követelmény, hogy a tanuló „Találja meg kombinatorikus feladatokban az összes lehetőséget egyszerű esetekben táblázatos vagy fa-diagramos elrendezéssel. Állapítsa meg az összes lehetőség számát előállítás után vagy elképzelés alapján”. [6] A kombinatorikai problémák tapasztalati úton történő vizsgálata során az alsó tagozaton a

- sorbarendezés (permutáció),
- kiválasztás (kombináció),
- kiválasztás és sorbarendezés (variáció)

elvégzését igénylő feladatokban általában az ismétlés nélküli esetek fordultak elő. Felső tagozaton már egyre gyakrabban indokolt ismétléses esetekkel is foglalkozunk. Tanítványaink remélhetőleg már felismerik az azonos matematikai modellre vezető feladatokat akkor is, ha azok szemléleti tartalmukban különbözőek. Felső tagozaton a tanterv kombinatorikai ismeretekkel kapcsolatban minimum követelményt nem ír elő [7], de a tananyagban szerepel a kombinatorikus feladatok egy-egy feltételének rendszeres változtatása, a feltételeknek megfelelően a feladat megoldása. Konkrétan: a lehetőségek számának táblázatba foglalása (5., 6., 7., 8. osztály), ezek elemzése, összehasonlítása, az adatok közötti összefüggés megállapítása, az összefüggésre magyarázat keresése (6.,

7., 8. osztály). Tanítványaink meggyőződésévé kell szilárdítanunk azokat a tapasztalataikat, amelyek arra vonatkoznak, hogy egy feladat feltételeinek, adatainak változtatása legtöbbször a feladat megoldásának az eredményét is megváltoztatja.

Kombinatorikus feladatainknak a matematika más témaköreivel kapcsolatos ismereteket is célszerű tartalmaznia. Ez az egyes témaköröknek egymással kölcsönhatásban történő feldolgozására vonatkozó módszertani elvárás teljesítésén túl azzal is összefügg, hogy tanítványainknak így biztosíthatjuk a lehetőséget olyan konkrét módszerek és sémák felismerésére, amelyek a matematika többi témakörének anyagában lehetővé teszik az adott feltételeknek megfelelő összes megoldás rendszeres megkeresését. Így tartalommal telik meg tanítványaink szemléletformálásával kapcsolatos azon szándékunk, hogy tudatosítsuk: a matematika minden területén léteznek olyan feladatok, amelyeknek többféle, egyaránt helyes megoldása van.

A kombinatorikus gondolkodás különböző témakörökben előforduló alkalmazási lehetőségei indokolják, hogy a kombinatorikai ismereteket nem célszerű időben összefüggő órák keretében tanítani. A kombinatorikai ismeretek jelentős részét az alkalmazási lehetőségeket nyújtó, illetve alkalmazásukat igénylő témák, részm témák anyagával együtt lehet és indokolt feldolgozni. Ez összhangban van a lassú érlelés elvének biztosításával, az anyag rendezésének azzal a szándékával, hogy általában nem egy-egy órán akarunk valamit megtanítani, hanem órák egymásutánján: sok tapasztalat, különböző oldalról történő megközelítés, tevékenységsorozat során.

Itt jegyezzük meg, hogy esetenként célszerűen tartjuk ugyanazt a feladatot különböző diagramokat használva, illetve táblázatos elrendezéssel, valamint betűkódot használva is megoldatni.

A kombinatorika „elégge elhanyagolt területe a matematikatanításunknak. Ennek okai egyebek között a következők:

- a tananyag és a követelmények pontatlan megfogalmazása a tantervben.
- a taneszközök nem tartalmazzak elegendő feladatot, a közölt feladatok nem veszik figyelembe a fokozatosság elvét és a differenciálás lehetőségét.” [8] Alsó és felső tagozaton egyaránt igaz, hogy a jelenleg rendszeresített nyomtatott taneszközökben a kombinatorikai problémákkal foglalkozó részek terjedelme kevesebb, mint amennyi az egyes témakörökkel való foglalkozás tantervi arányainak megfelelően.

Egyrészt ezért, másrészt azon meggyőződésünk miatt, hogy a gyakorló pedagógus az elméleti fejtegetéseknél gyakran használhatóbbnak tartja a konkrét feladatokat: tanítási gyakorlatunk néhány bevált feladatát is közreadjuk.

1. a) Hányféle sorrendben számítható ki az $5 \cdot 7 \cdot 9$ szorzat? Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!
- b) András, Béla és Cecília ugyanabban a szakosztályban kerékpároznak. Egyik edzésen csak ők hárman vettek részt. Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha egyikük sem érkezett egyszerre a másikkal?
2. a) Hányféle sorrendben számítható ki a $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ szorzat? Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!
- b) Antal, Bálint, Cecília és Dénes ugyanabban a szakosztályban kerékpároznak. Egyik edzésen csak ők négyen vettek részt. Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha egyikük sem érkezett egyszerre a másikkal?
- c) Attila négy könyvet kapott ajándékba. Milyen sorrendben olvashatja el ezeket a könyveket?
3. a) Ádámnak két különböző érdemjegye van matematikából. Írd le, milyen jegyei lehetnek!
- b) Évának két érdemjegye van matematikából. Írd le, milyen jegyei lehetnek!
- c) Kopasz Gerzson monogramja: K. G.
Ravasz Róbert monogramja: R. R.
Állíts össze monogramokat az A, M, S, T betűkből!
4. a) Egy baráti társaság két cirkuszjegyet kapott. Megegyeztek, hogy egy leány és egy fiú megy el az előadásra. Hányféle párosítás lehetséges, ha Katalin, Melinda, valamint András, Gábor és Tibor közül kell választani? Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!

b) Karcsi és Pali három leány (Erzsi, Mónika, Vera) közül választhat partnert a tánchoz. Hányféle párban táncolhatnak?

c) Az üdülőben háromféle ebéd és kétféle vacsora közül lehet választani.

Ebédre:

A vagy B vagy C menü.

Vacsorára:

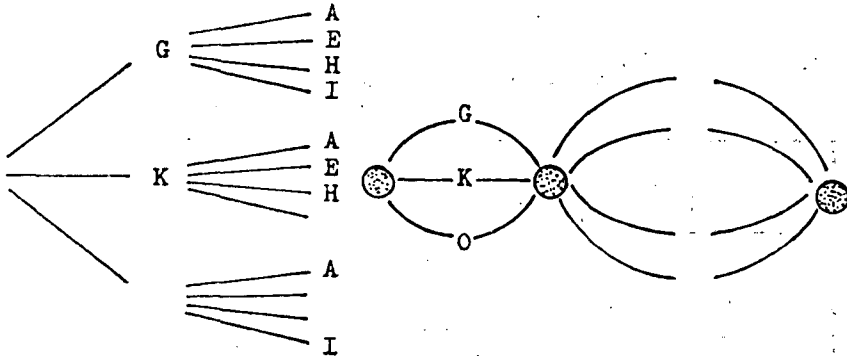
hideg (H) vagy meleg (M) étel.

Hányféle párosítás lehetséges?

Rendezd a lehetséges eseteket betűkód alkalmazásával! Készíts fa-diagramot!

5. a) A táborban az ügyeletet mindig egy leány és egy fiú látta el. Hányféleképpen választhatók ki az ügyeltesek, ha Anikó, Edit, Hilda, Ica, valamint Géza, Kelemen és Ottó közül kell választani?

Fejezd be a diagramokat!



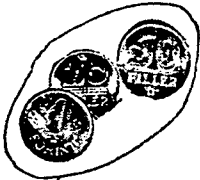
b) Egy balatoni úttörőtáborban két csónak van. Az egyik kétszemélyes, a másik háromszemélyes. Hányféleképpen foglalhat helyet a két csónakban 5 pajtás, ha a csónakon belüli ülésrendet nem kell figyelembe venni?





Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!

Adj nevet a gyerekeknek, majd neveik kezdőbetűjével dolgozz!

6. Milyen pénzermékkal tudunk kifizetni 1 Ft 70 fillért, ha egyik fajtából sem szabad öt darabnál többet használni?

Gyűjtsd össze az összes lehetséges változatot!



	1																	
	1																	
	1																	
	0																	

7. Zsuzsa 3 levelet írt, és a leveleknek 3 borítékot címzett meg. Figyelmetlenül borítékolta a leveleket. Hány olyan borítékolás lehetséges, amelynél egyik levél sem került a megfelelő borítékba?

Az összetartozó levél-boríték párokat azonos számokkal (vagy betűkkel) jelölve ezek a borítékolások felelnek meg a feltételnek:
Jelöld!



8. a) Zsuzsa és Tamás három különböző könyvet kapott ajándékba. Hányféleképpen oszthatják el a könyveket, ha az is lehetséges, hogy valamelyikük nem tart igényt egy könyvre sem?

Készíts diagramot a szóba jöhető lehetőségek rendezéséhez! Folytasd a táblázat kitöltését!

Zsuzsa		A	B					
Tamás	ABC	BC						

- b) Egy sportegyesületnél öt különböző sportágban hirdettek tehetségkutató versenyt. Atlétika, torna, vízilabda, cselgáncs és kardvívó szakosztályba kerestek új versenyzőket. Annnyit tudunk, hogy Karcsi két sportágban, Zoltán három sportágban próbál szerencsét. Gyűjtsd össze Karcsi választásának lehetséges eseteit!
Hányféle csoportosításban próbálkozhat Karcsi és hányféleképpen Zoltán?

Az ötelemű halmaz kételemű részhalmazainak száma megegyezik a háromelemű részhalmazok számával. Ha öt elem közül kettőt kiválasztunk, azzal a másik hármat is kiválasztottuk (a „nem választás” tényével). Ezért elegendő Károly választási lehetőségeit összeszámolni.

A feladat kapcsán lehetőség adódik annak szemléltetésére, hogy bármely ötelemű halmaz kételemű részhalmazainak száma egyenlő az ötelemű halmaz háromelemű részhalmazainak számával. Ez az összefüggés általában is igaz (bármely n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma egyenlő az $n-k$ elemű részhalmazainak számával). A gyerekeket motiváló szituációban: Ha három rágógumit akarok szétosztani öt gyerek között úgy, hogy három gyereknek adok egy-egy darabot, akkor az eredmény szempontjából közömbös:

- az öt gyerek közül azt a hármat választom ki, akinek adok rágógumit. (ezzel a választással azt a két gyereket is kijelölöm, aki nem kap);
- az öt gyerek közül azt a kettőt választom ki, akiknek nem adok rágógumit (ezzel a választással azt a három gyereket is kijelölöm, aki kap).

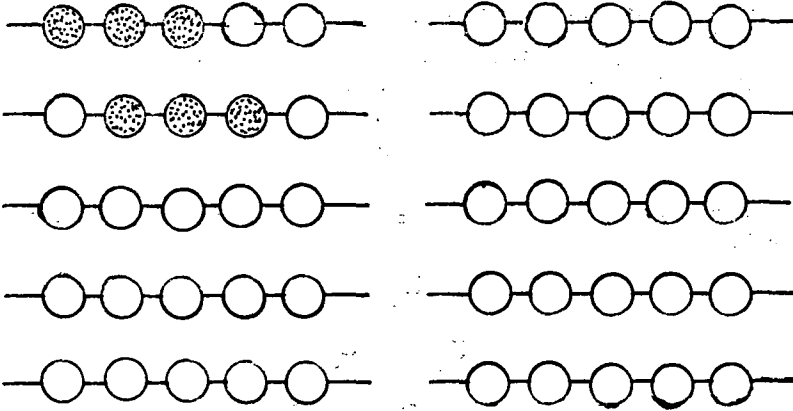
- c) Öt jóbarát együtt szeretne nyaralni, de a turistaházban már csak három szabad hely van. Így is elmennek, akiknek nem jut hely a turistaházban, azok majd sátoroznak a campingben. Abban azonban nem tudnak megegyezni, hogy ki aludjon a turistaházban és ki legyen campingező.
Hányféleképpen választhatják ki a turistaházban alvó három személyt és hányféleképpen a campingezőket!
Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!
Adj nevet (különböző betűvel kezdődőket!) a baráti társaság tagjainak, majd neveik kezdőbetűjével dolgozz!

9. a) Almát, körtét, szilvát kaphatsz, de mindegyikből legfeljebb egy darabot. Választhatsz mindháromból is, vagy két fajtaból, vagy esetleg csak egyet, de azt is megteheted, hogy egyikből sem kérsz. Írd össze, hogy hányféleképpen választhatasz!

- b) Hányféle lehetőség lesz, ha még diót is lehet választani?

Vetessük észre, hogy az előbbi lehetőségek mind megmaradnak, és még egyszer ennyi lehetőséget lehet összegyűjteni, mert ezek mindegyikéhez még hozzáválasztható a dió is.

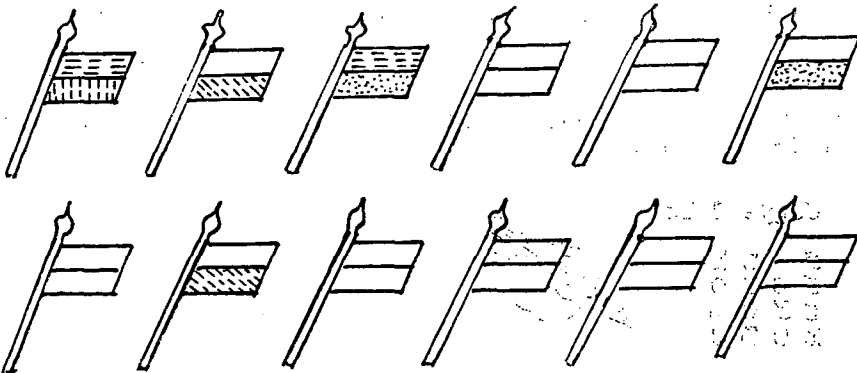
10. a) Fűz fel három piros és két fehér gyöngyöt egy fonalra!
Milyen sorrendben helyezkedhetnek el a gyöngyök?
Folytasd a színezést!



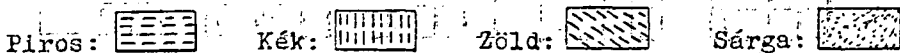
- b) Az edényben piros, zöld és sárga színű rágógumik vannak. Tamás behunyt szemmel választ három darabot.
Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket, ha a választás sorrendje is számít!

A színezés elvégzése fejlesztí a gyerekek kézügyességét, viszont most a kombinációs készség fejlesztése a fő feladat. Időt nyerhetünk, ha a színezés helyett a színek kezdőbetűinek beírását kérjük.

11. A piros, kék, zöld, sárga színű, vízszintesen elhelyezkedő vászonsávokból hányféle kétszínű zászló készíthető?
A már beszínezett részekhez igazodó sorrendben dolgozz!



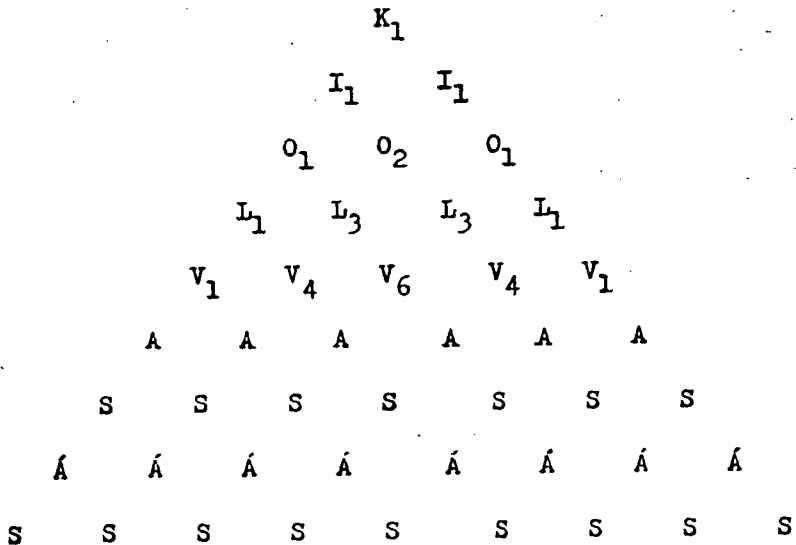
A színek jelölése:



12. Négy sofőr felváltva vezet egy konténer szállítására kialakított nyergesvontatót. Minden útra két-két sofőr megy el, egyikük vezet a gépkocsit, közben a másik pihen, majd cserélnek. Hányféle „szereposztás” lehetséges?
13. a) Egy községben 48 telefonállomás van. Hányféle helyi beszélgetés létesülhet a községben?
 b) Egy sakkversenyen 16 sakkozó vett részt. Körmérkőzést játszottak, mégpedig úgy, hogy minden pár kétszer mérkőzött, mindenki világos és sötét színnel is küzdött az összes többi sakkozó ellen. Hány mérkőzésre került sor a versenyen?
14. a) Hányféleképpen lehet felülről lefelé haladva leolvasni az ábráról a KIOLVASÁS szót? A szóba jöhető leolvasások számának összegyűjtését célszerű úgy végezned, hogy a betűk mellé „indexbe” oda írod: hányféleképpen juthatsz el ahhoz a betűhöz. Például az ötödik sor második V betűjéhez két betűtől juthatunk:



A negyedik sor első L betűjéhez 1-féleképpen, második L betűjéhez 3-féleképpen juthatunk el, ezért az ötödik sor második V betűjéhez $1+3=4$ leolvasás vezet.



- b) Hányféleképpen tudod leolvasni a MISKOLC szót, ha csak jobbra és lefelé haladva olvashatod össze a betűket?

Jegyezd le!

M I S K
 I S K O
 S K O L
 K O L C

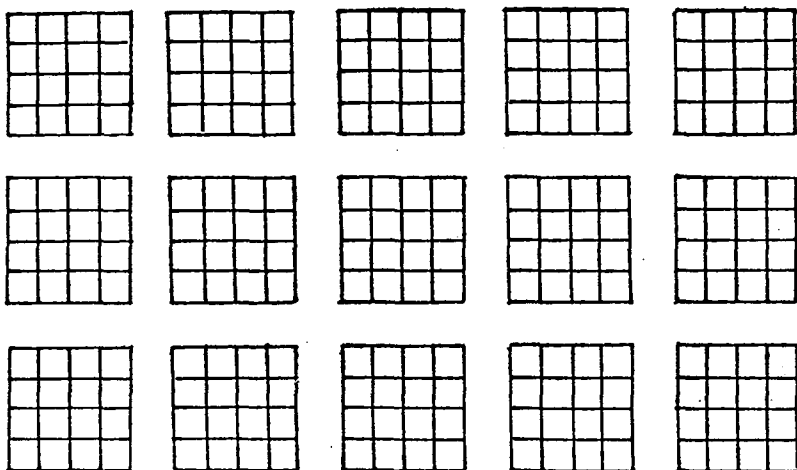


M	I	S	K
		O	
		L	
		C	

M	I	S	
		K	O
		L	
		C	

M	I	S	
		K	
		O	L
		C	

M	I	S	
		K	
		O	
		L	C



Kombinatorikai feladatok megoldásánál különösen fontos tanítványaink életkorát, készségi szintjét figyelembe venni akkor, amikor arról döntünk, hogy egy konkrét feladat megoldását milyen módon kérjük. Az elvárható megoldás módja a tanulók gondolkodásának fejlettségétől, az összes eset előállításában szerzett tapasztalataiktól függően lényegesen különböző lehet. [10]

Ötödik osztályban e feladat megoldását még úgy várjuk, hogy az egyes „olvasatokat” a tanulók beírják a táblázatokba. Esetleg még nyolcadikban is lesz olyan tanítványunk, aki csak így boldogul. Ennek ellenére a nyolcadikosok számára már mindenképpen úgy kell felvetnünk a problémát, hogy hányféleképpen juthatunk el olvasással a bal felső sarok M betűjétől a jobb alsó sarok S betűjéig, ha csak jobbra és lefelé haladva olvashatjuk össze a betűket. Azt kell megvizsgáljunk, hogy a feltételeknek megfelelő olvasással hányféleképpen juthatunk el az egyes betűkhöz.

Ezt célszerű a betűtáblázatban feltüntetni:

M	I ₁	N ₁	T ₁
I ₁	N ₂	T ₂	Á ₄
N ₁	T ₂	Á ₆	S ₁₀

Esetünkben az S betűhöz való eljutási lehetőségek száma nyilván a lehetséges „olvasatok” számát jelenti. Ez a módszer természetesen bármilyen nagy betűtáblázat esetén az „olvasatok” számának megbízható és gyors összeszámlálását lehetővé teszi.

15. Hányféleképpen fordulhat elő az, hogy lottóhúzáskor a nagyság szerinti sorrendbe rakott nyerőszámok közül a harmadik nyerőszám az első két nyerőszám összegével, a negyedik nyerőszám az első három nyerőszám összegével, az ötödik nyerőszám az első négy nyerőszám összegével egyenlő?
16. a) Egy tolltartóban öt különböző színű ceruza van: barna, kék, piros, sárga, zöld.
- Hányféleképpen tudsz kivenni egy ceruzát? Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!
 - Hányféleképpen tudsz kivenni két ceruzát? Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!

- Hányféleképpen tudsz kivenni három ceruzát?
Gyűjtsd össze a lehetséges eseteket!
- b) Ágnes öt különböző fagylaltból választhat egy háromgombócos adagot.
Hányféle lehetősége van a választásra, ha az adagolás sorrendje Ágnes számára közömbös?
— Ha mind a három gombócot ugyanolyan fajta fagylaltból kérte, akkor a szóba jöhető változatok száma:
- Ha két gombócot ugyanolyan, a harmadik gombócot valamilyen másfajta fagylaltból kérte, akkor a szóba jöhető változatok száma:
- Ha mind a három gombócot különböző fajta fagylaltból kérte, akkor a szóba jöhető változatok száma:
- Ágnes választási lehetőségeinek száma:
- c) Péter szülei újra akarják tapétázni a nappalit és a két félszobát. A család ötféle tapéta közül választhat.
Hányféleképpen dönthetnek?
— ha ragaszkodnak ahhoz, hogy mindhárom helyiségben különböző legyen a tapéta:
- ha ízlésüknek megfelelő, hogy két helyiségben egyforma lesz a tapéta:
- ha megelégszenek azzal, hogy mind a három helyiség falait ugyanolyan tapétával borítsák:

Elképzelhető, hogy a tanulók egy része úgy boldogul könnyebben a probléma megoldásával, ha a kérdésekre fordított sorrendben válaszol. Hívjuk fel a tanulók figyelmét erre a lehetőségre. Segíthetünk annak megbeszélésével is, hogy ha három közül két helyiségben egyforma tapétát tervezünk, akkor az azonosan tapétázandó helyiségek (gondolatban) egyesíthetők. Ezért a második kérdésnél a feltételek átfogalmazhatók: Hányféleképpen dönthetünk, ha két helyiséget ötféle tapéta közül választva különböző tapétával akarunk tapétázni?

IRODALOM

- [1] Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1—4. osztály. Első rész. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1986.
- [2] Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 5—8. osztály. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1987.
- [3] *Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna*: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. 188—198. oldal.
- [4] *Wibelm Niggemann*: A csoportmunka — mint a felnőttképzés intenzív formája. Neue Volkshildung, Wien, 1969. 11. oldal. Magyarul: *Maróti Andor* (szerk.): Andragógiai szöveggyűjtemény. Válogatás a felnőttnevelés elméletének polgári szakirodalmából. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. 143. oldal.
- [5] *Takács Gábor*: Matematikai absztrakciók alapozása manuális tevékenykedtetéssel. Módszertani Közlemények. 1983. 4. szám. 258—263. oldal.
- [6] [1] alatt idézett mű, 61. oldal.
- [7] [2] alatt idézett mű, 48—49. oldal.
- [8] [2] alatt idézett mű, 7. oldal.
- [9] *Iker János*: A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lehetőségei 6. osztályban. A Matematika Tanítása, 1982. 6. szám. 166—170. oldal.
- [10] *Dr. Iker János*: Meddig juthatunk el az általános iskolában a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésében? A Matematika Tanítása, 1984. 3. szám. 65—68. oldal.