GOTTLIEB GÁBOR—ILL MÁRTONNÉ
Baja

Hányféleképpen lehet...

— ÖNKÉPZÉS MATEMATIKÁBÓL —

A kombinatorika olyan témakör, amelyben látszólag nincs tanulnivaló. A 6—10 évesek esetében az ismeretek megtanításánál sokkal *fontosabb*nak tartjuk *a kombinatorikus szemlélet fejlesztését*. A tapasztalat, sajnos, azt mutatja, hogy ez a témakör matematikatanításunk eléggé elhanyagolt területe. Mi lehet a lemaradás oka? A választ csak találgatni lehet. Néhány gondolat ezek közül:

— a taneszközök nem tartalmaznak elegendő feladatot,
— a közölt feladatok nem veszik figyelembe a fokozatosság elvét,
— a feladatok megoldása (minél több lehetőség előállítása) időigényes,
— ez az egyetlen résztéma, amelyből nincs minimum követelmény,
— a központi tanmenetjavaslat részcímei között többnyire az utolsó helyen áll a kombinatorikai feladat, így adott esetben ez az „elmaradó" rész,
— végül, de nem utolsó sorban a szaktárgyi tévedések is szerepet játszhatnak abban, hogy ez a résztéma „mostoha".

A korrekció nem valósulhat meg egyik napról a másikra. Szükség van a továbbképzésekre, de az önképzésre is. Ez utóbbihoz szeretnénk segítséget adni ezzel a cikkel.

Az alsó tagozat követelményanyaga jól épül egymásra. Minimumkövetelmény kombinatorikából még 5. osztályban sincs.

1. osztály

Legyen járatos egyszerű feltételeknek megfelelő lehetőségek előállításában, megkülönböztetésében tárgyi tevékenységgel.

2. osztály

Legyen járatos adott feltételeknek megfelelő minél több lehetőség előállításában, ilyenek megkülönböztetésében tárgyi tevékenységgel, rajzban.

3. osztály

Oldjon meg egyszerű kombinatorikus feladatokat tevékenységgel, rajzzal. Legyen képes egyszerű esetekben a megtalált lehetőségeket rendszerbe állítani vagy legalább a kialakuló rendben újabb lehetőségek helyét megtalálni.

4. osztály

Találja meg kombinatorikus feladatokban az összes lehetőséget egyszerű esetekben táblázatos vagy fa-diagramos elrendezéssel. Állapítsa meg az összes lehetőség számát előállítás után vagy elképzelés alapján.

5. osztály
Kombinatorikus problémákban tudják az adatokat rendszeresen változtatni, a tervszerű változtatással (4-5 elemig) a lehetőségeket megtalálni, a lehetőségek számát sorozatba, táblázatba rendezni.

A kombinatorika fiatal tudományág.
A ma tanítóinak egy része csak továbbképzés keretében találkozott kombinatorikával. Így — valójában önhibáján kívül fordulhat elő, hogy — a nem elég alaposan megértett ismeretek megtanítása megoldhatatlan feladat elé állítja a kartársat.
Azt tudjuk, hogy a kombinatorika a kapcsolások tana.

A kombinatorika a matematikának az az ága, amely a tárgyaknak, elemeknek bizonyos szabály szerinti csoportosításával foglalkozik.

Legegyszerűbb és legfontosabb alapfogalmai: *permutáció*
variáció
kombináció

Az alsó tagozatos kombinatorika tanítása során sem az előbb említett fogalmakat, sem a később bemutatásra kerülő képleteket *nem tanítjuk*. Célunk az, hogy a „hányféleképpen lehet ..." kezdetű kérdésekre keresett válaszok közben olyan „rendező elveket" találjunk, amelyek alkalmasak lesznek az összes lehetséges eset megállapítására. Ismereteink felelevenítésére nézzük az előbb említett alapfogalmakat!

Permutáció:
„Az az eljárás, amelynek során elemekből úgy alkotunk azonos számú csoportokat, hogy bennük valamennyi elem előfordul, de mindegyikben más és más sorrendben.

Pl.: Rendezzük el az 1, 2, 3 számjegyet minden lehetséges sorrendben! (6 lehetőség)

123 213 312 (az elemek nem ismétlődnek)
132 231 321

Variáció:
„Az az eljárás, amelynek során elemekből azonos elemszámú csoportokat alkothatunk úgy, hogy az adott elemekből bizonyos számút kiválasztva, ezeket minden lehetséges módon és sorrendben egymás mellé helyezzük.

Pl.: Számjegyeink: 1, 2, 3.
Képezzünk ezekből kétjegyű számokat úgy, hogy ne ismétlődjenek a számjegyek!

12 21 31 (6 lehetőség)
13 23 32

Kombináció:
„Az az eljárás, amelynek során adott elemekből csoportokat alkotunk úgy, hogy közülük bizonyos számút kiválasztva, ezeket bármilyen sorrendben egymás mellé helyezzük.

Pl.: Dobjunk egyszerre két kockával, amelyek között nem teszünk különbséget! (Sorrend nem számít.) Hányféle olyan dobási eredményt kaphatunk, amelynél ugyanaz a szám csak egyszer szerepel? (A kockán 6-féle szám szerepel, ezek a különböző elemek.)

1; 2 1; 3 1; 4 1; 5 1; 6
2; 3 2; 4 2; 5 2; 6
3; 4 3; 5 3; 6
4; 5 4; 6
5; 6
(15 lehetőség)

Gondoljuk most végig együtt egy feladatot a *saját tudásunk gyarapítása érdekében.* Tehát korántsem azzal a céllal adjuk közre a feladatot, hogy így egy az egyben felhasználható a tanítói munkában, hanem szakmai ismereteink bővítésére, önképzésre szánjuk.

„Pisti uzsonnára hívta meg barátait. Azért, hogy ne akkor kelljen az asztal megterítésével bíbelődnie, amikor a vendégei már megjöttek, mindent előre elkészített. A meghívottak közül 8-an mondták, hacsak nem jön valami közbe, biztos megjelennek az uzsonnán. Ezért Pisti a szoba közepére állított asztalon nyolc személynek terített meg. Miután megterített, elgondolkodott azon, hogy kit hova ültessen. De eszébe jutott, hogy az ő általa kiválasztott sorrend nem biztos, hogy a vendégeknek is tetszeni fog. Ezért úgy határozott, hogy a barátaira és a véletlenre bízza, hogy ki, ki mellé kerüljön. Miután megjönnek a kis vendégek, hányféleképpen ülhetnek le az asztalhoz, hogy elfogyasszák a vacsorát?"

A számolgatás elkezdése előtt jó alaposan át kell gondolnunk a problémát és megvizsgálni, hogy milyen helyzetek állhatnak elő. Az első felmerülő probléma, amely lényegesen megváltoztatja a feladat végeredményét, hogy ugyanannyi tányér van-e, mint vendég, hiszen a terítékek száma csak hozzávetőlegesen lett meghatározva. Először a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, amikor is Pisti jól tippelt, és így a vendégek és a tányérok száma megegyezik. Miután az első felmerülő probléma esetén eldöntöttük, hogy a feladat megoldásának melyik ágán induljunk el, mindjárt adódik a következő kérdés, és egyben elágazási pont is. Tudniillik, hogy István milyen asztalra készítette el a terítéket. Azaz az asztalnak csak az egyik oldalán vannak-e tányérok, vagy esetleg körbe lehet ülni.

Nézzük meg, mi van akkor, ha az asztalnak csak az egyik oldalához lehet leülni. Így az első tányérhoz a nyolc vendég közül ülhet le valaki (ez értelemszerűen 8-féleképpen lehetséges). Mivel az első tányérnál már ülnek, a másodikhoz a maradék 7 közül ülhet le valaki, így az első és a második tányért összesen $8 \cdot 7 = 56$-féleképpen lehet elfoglalni.

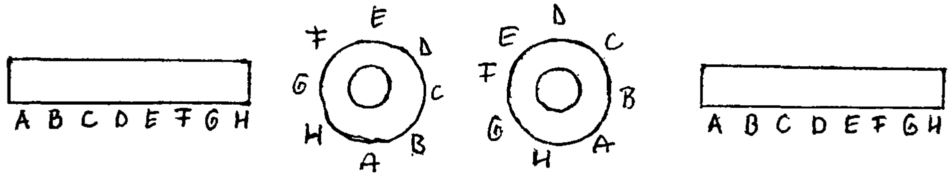
A harmadik tányérhoz való leülés már csak hatféleképpen lehetséges. Eddig volt $7 \cdot 8$ különböző esetünk, amelyek közül bármelyik hatféleképpen folytatódhat. Tehát az első három tányérhoz $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$-féleképpen lehet leülni. Hasonlóan adódik, hogy az 5. tányérhoz 5-en, a 4.-hez 4-en, a 3.-hoz 3-an, a 2.-hoz 2-en és végül az utolsóhoz már csak egy valaki ülhet oda. Ennek megfelelően összegezve a 8 tányérhoz $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$-féleképpen lehet leülni.

Ha egytől nyolcig kell összeszorozni a számokat, azt rövidíthetjük a következőképpen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$ azaz 8 faktoriális.

Általánosítva a dolgot: ha n db tányérunk és n fő vendégünk van, akkor az összes különböző ülési sorránd száma $n!$ Az $n!$ nem más, mint n elem ismétlés nélküli permutációja, amit a következőképpen szoktunk jelölni: $Pn = n!$

Térjünk át annak az esetnek a vizsgálatára, amikor a vendégeknek kör alakú asztalhoz kell leülniük. Induljunk ki az előbb tárgyalt esetből! Képzeljük el azt, hogy miután elfoglalták helyüket az egyenes asztal egyik oldalán, az asztalt körré hajlítjuk. Ha most mindenki például a jobb oldali szomszédja helyére ül, akkor egymáshoz viszonyítva a helyzet változatlan, vagyis nem kaptunk új ülésrendet.

Nem változatlan viszont a helyzet, ha most ugyanott, ahol összegörbítettük, szétnyitjuk az asztalt. Ekkor az egyenes asztalnál az előzőhöz képest új ülésrendet kaptunk.



Ugyanez fog történni, ha még egyszer, majd még egyszer, összesen 7-szer mindenki eggyel arrébb megy. Ha hétszer változtatunk helyet, ez azt jelenti, hogy mindenki 8 különböző helyen ült anélkül, hogy az egymáshoz viszonyított sorrendjük alapján az ülésrend változott volna a kerekasztal körül. Viszont az egyes asztalnál ez nyolc különböző esetet ad. Azaz az egyenes asztalnál kapott sorrendek

A	B	C	D	E	F	G	H
H	A	B	C	D	E	F	G
G	H	A	B	C	D	E	F
F	G	H	A	B	C	D	E
E	F	G	H	A	B	C	D
D	E	F	G	H	A	B	C
C	D	E	F	G	H	A	B
B	C	D	E	F	G	H	A

közül csak minden nyolcadik jöhet számításba a kerek asztal esetében, mint különböző elhelyezkedés. Ez azt jelenti, hogy a nyolc faktoriálist osztanunk kell nyolccal.

$$\frac{8!}{8} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{8} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 7!$$

Vagyis kerek asztal esetében az összes különböző eset 7! n elem esetében $(n-1)!$

Természetesen a feladatnak ezt a részét az első esetnél kapott 8! ismerete nélkül is ki tudjuk számítani. Azonban ekkor is észre kell vennünk, hogy az egymáshoz viszonyított ülésrendek nem változnak, ha mindenki eggyel odébb megy, és így nem is tekinthetjük őket különböző eseteknek sem. Egy személy helyzetét tehát a kör alakú asztalnál tetszőleges helyen ugyan, de rögzítenünk kell. A többi 7 vendég pedig a fennmaradó 7 helyre ülhet le különbözőképpen. Ezt pedig 7!-féleképpen tehetik meg.

A második lehetőség az legyen, amikor 8 tányér van ugyan, de csak 5 vendég. Ilyenkor akárhogy is ülnek le a vendégek, 3 hely mindig üresen marad. Az üresen maradó székekre ültessünk le 3, egymástól teljesen megkülönböztethetetlen bábut. Amikor az ülésrendeket megállapítjuk, a 3 bábut is tekintsük vendégnek, és értelemszerűen azok a tányérok ne találjanak gazdára, ahova a bábuk ültek. Így, hasonlóan az első esethez, 8 vendég összes különböző ülésrendjét kell kiszámítanunk, ami, mint ahogy már láttuk, 8!. Az emberek elhelyezkedésének milyenségét nem változtatja meg az, amikor a három bábut egymás között cserélgetjük. A három bábut 3!-féleképpen ültethetjük le. Azaz csak minden hatodik ülésrend lesz így különböző. Vagyis az összes lehetséges különböző eset

$$\frac{8!}{3!} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6720.$$

Általánosan, ha n db tányérunk és k $(k<n)$ vendégünk van, azaz $n-k$ üres helyünk, akkor az összes eset $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ezt az n elem ismétléses permutációjának hívjuk, és következőképpen jelöljük:

$$P_{ni}^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ezek után, azt hiszem, minden magyarázat nélkül válaszolhatunk arra az esetre, amikor ugyanez kerek asztalnál játszódik le. Ilyenkor az összes eset 8 tányér és 5 vendég esetében

$$\frac{7!}{3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 840.$$

Általános esetben pedig amikor kerek asztal esetében a tányérok száma n, a vendégeké pedig k, az összes eset: $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

A harmadik esetben pedig legyen a vendég több, mint a tányér. Például az asztalra kirakott 8 tányérra 11 vendég jusson. Mivel ebben az esetben nem ülhet le egyszerre mindenki az asztalhoz, először a 11 vendég közül azt a 8 szerencséset kell kiválasztanunk, akinek jut tányér. Nézzük meg, hogy ez miképpen történhet meg.

Legelőször 11 fő közül válogathatunk, ami 11 különböző esetet jelent. Másodszor már csak 10 közül, amit 10 különbözőképpen tehetünk meg. Így az első két emberünket összesen $11\cdot 10=110$ különbözőképpen választhatjuk ki. Ennek megfelelően 8 fő kiválasztásánál ez $11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6\,652\,800$ különböző esetet jelent. Észre kell vennünk, hogy a válogatás során különbözőnek kapott eseteink lényegében teljesen megegyeznek. Hiszen mindegy, hogy pl. a 8. vendéget hányadiknak választottuk ki. Így eddig külön eseteknek számoltuk ugyanazon vendégek kiválasztását is, ha közöttük csak a sorrend különbözött. 8 ugyanazon fő esetében pedig ez 8! különböző sorrendet jelent. Azaz nekünk csak az esetek 8!-ad részére van szükségünk. Tehát $\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8}=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=165$ különbözőképpen tudjuk a 8. asztalhoz ültetendő vendéget kiválasztani.

Általános esetben ez, amikor a vendégek száma n, a tányéroké k,

$$\frac{n, (n-1), \ldots, (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$

különböző esetet jelent.

Amikor n különböző elemből k elemet akarunk kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít, n elem k-ad osztályú (k-adrendű) ismétlés nélküli kombinációjának nevezzük. Jelölése: C_n^k. Szimbóluma: $C_n^k=\binom{n}{k}$ (n alatt a k). Kiszámítása: $C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, ami a következőképpen egyszerűsíthető:

$$\frac{n!}{n!(n-k)!k!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-k)(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-k)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}.$$

Azonban nekünk, mivel le akarjuk ültetni őket, a már korábban látott módon sorrendbe kell rendeznünk a kiválasztottakat. Ez minden kiválasztott 8-as csoportnál

8!-féleképpen lehetséges. Így az összes eset: $\binom{11}{8} \cdot 8! = \frac{11!}{(11-8)!} \cdot 8 \cdot = \frac{11!}{(11-8)!} =$
$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 6\,652\,800$ esetet jelent.

Általánosan: $\binom{n}{k} \cdot k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) \ldots (n-1) \cdot n$. Amikor a különböző elemből akarunk kiválasztani k elemet úgy, hogy sorrendjük számítson, n elem k-ad osztályú (k-adrendű) ismétlés nélküli variációjának nevezzük. Jelölése: V_n^k. Kiszámítása $V_n^k = C_n^k \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Megismételjük a bevezetőben elmondottakat. A feladatokban képlettel felírt megoldásmenetet kizárólag a tanító önképzéséhez és nem tanítói munkájához adtuk közre.