SIPOS VIKTOR
Általános Iskola
Újiráz

A π értékének közelítő meghatározása

Az általános iskola felső tagozatában már jól ismert anyagrész a kör kerületének és területének a kiszámítása: $k=2r\pi$ és $t=r^2\pi$, ahol a π értéke 3,14 két tizedes jegyre kerekítve, valójában végtelen nem szakaszos tizedes tört (pontosabb értékével az iskolai feladatokban nem szoktak számolni, de pl. számológépeken, táblázatokban a π értéke több jeggyel szerepel). A 3,14 számértéket a tanulóknak néhány tapasztalati indok alapján kell elfogadni.

Nézzük meg, hogyan lehet a mindennapi életben előforduló esetekben mérésekkel közelítőleg meghatározni a π értékét! Bevezetőként mint problémafelvetést vizsgáljunk meg néhány szemléltető példát a mindennapi életből! A cél annak szemléltetése, hogy a kör kerületének és átmérőjének, illetve területének és sugara négyzetének a hányadosa a mérési eredmények szerint közelítőleg 3,14. Bár az alábbi három szemléltető példa nem alkalmas arra, hogy tanórán a konkrét mérést elvégezhessük, de felhívják a figyelmet a π sokirányú előfordulására, és élményszerűbbé teszik a körrel kapcsolatos számításokat.

Szemléltető példák

1. Egy kör alakú sportpályán két sportoló különös futást végez. Megállapodnak, hogy egyenlő sebességgel futnak (már amennyire ez lehetséges), de az első futó a pálya szélén körbefut, a másik a körpálya átmérőjén fut. Mindketten a pálya széléről, egy helyről indulnak. Az a megállapodás, hogy ha az első versenyző legfeljebb 3-szoros idő alatt tesz meg egy kört, mint amennyi idő alatt a második keresztülfut a pályán, akkor az első nyer, ellenkező esetben a második. Ha valóban egyenlő sebességgel futnak, akkor a második versenyző már jó ideje célba ért, amikor az első még javában fut. A teljes kör végigfutása után a mért időket összehasonlítják, és az derül ki, hogy az első futó kicsit több, mint 3-szor annyi ideig futott, mint a második, tehát a megállapodásuk szerint a második nyert.
2. Nézzünk most a sportpálya helyett egy kör alakú parkot! A kerülete mentén korlát veszi körül (tekintsünk el attól, hogy a bejárat miatt hézagnak kell lenni a korláton, azaz tekintsük a korlátot folyamatosnak). A parkot a közepén korlát osztja ketté. A korlátokat – korrózióvédelem céljából és esztétikai okokból befestik: – a szélen levő korlátot zöldre, a közepén levőt pirosra. Folyóméterenként mindkét festékből ugyanannyit használnak fel. A festés befejezése után meghatározzák a felhasznált festék tömegét külön-külön. Az eredmény az, hogy a zöld festékből valamivel több mint háromszor annyi fogyott, mint a piros festékből.
3. Maradjunk továbbra is a „park-témánál"! Képzeljünk el egy 60 m átmérőjű – tehát 30 m sugarú – kör alakú parkot, és a közelében egy négyzet alakú parkot, amelynek oldalai 30 m hosszúak, vagyis a kör sugarával egyeznek. A négyzetes park területe négyzetméterben: $30^2=900m^2$. A kör alakú park területe ennél lényegesen nagyobb. A kertész azt a feladatot kapja, hogy mindkét parkot fedje be teljesen gyeptéglával (a gyeptéglák mérete legyen egymással egyenlő). Ha a munka végén összehasonlítják a két területhez felhasznált gyeptégla mennyiségét, az derül ki, hogy a kör alakú parkhoz felhasznált gyeptégla mennyisége kicsit több, mint a négyzetes parkhoz felhasznált gyeptégla 3-szorosa (természetesen fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a kör alakú rész szélén levő gyeptéglák nem lehetnek szögletesek, tehát hulladék is keletkezik).

A felsorolt három példában leírt mérés természetesen nem végezhető el iskolai keretek közt, és egyébként is csak nagyon durva közelítést adnának a π értékére, de arra alkalmasak, hogy megmutassák a π értékének a jelentőségét, előfordulását a mindennapi életben, és felkeltsék az érdeklődést a körrel kapcsolatos számítások iránt. Ezért a felsorolt példák (vagy más, hasonló mindennapi életből vett példák) alkalmasnak látszanak a körrel kapcsolatos számítások bevezetéséhez, hiszen ezek ráirányítják a figyelmet arra, hogy a kör kerülete és átmérője, valamint területe és sugarának négyzete közt szoros kapcsolat van.

Nézzük meg közelebbről, hogy az iskolában is elvégezhető mérésekkel hogyan lehet meghatározni a π közelítő értékét! Természetesen a legkézenfekvőbb az az eljárás, hogy a kör kerületét lemérjük (zsineget vezetünk végig a körön), aztán lemérjük az átmérőt, és osztással meghatározzuk az arányt. Hasonló meggondolással tömegméréssel is dolgozhatunk. Pl. egy fémkarika tömegét mérlegen meghatározzuk, és ugyanabból a fémből készült, ugyanolyan vastagságú és a kör átmérőjével egyező hosszúságú rúd tömegét is meghatározzuk. A kettő hányadosa szintén a π közelítő értékét adja.

Térfogatméréssel, illetve időméréssel is elvégezhető az eljárás, ha a kört üreges gyűrűfelülettel (tórusz) szemléltetjük, az átmérőjét pedig olyan hengerrel, amelynek keresztmetszete a tórusz „vastagságával" megegyező átmérőjű kör, és magassága megegyezik a tórusz „középkörének" az átmérőjével. A henger felül nyitott (alul zárt), a tóruszon kisméretű nyílást kell készíteni. A két test javasolt mérete: a tórusz „vastagsága" és a henger átmérője 1,5–2,5 cm, a tórusz „középkörének" az átmérője 40–45 cm (természetesen ezektől eltérő méretű modell is jól használható). A két testet vízcsap alá tartva megtöltjük vízzel, vigyázva arra, hogy a vízsugár mindkét esetben ugyanolyan legyen (azaz az első „edény" megtöltése után ne nyúljunk a vízcsaphoz!). A megtöltéshez szükséges időket lemérve, a mért idők hányadosával egyezik a térfogatok hányadosa és (rövid számítással igazolható), hogy ez egyenlő a „középkör" kerületének és átmérőjének a hányadosával, tehát a méréssel a π közelítő értéket kapjuk.

Hasonló mérési eljárással határozható meg a kör területének és sugara négyzetének az aránya is. Ehhez két egyenlő magas edényre van szükség: az egyik henger alakú, a másik négyzetes keresztmetszetű (négyzetes hasáb) legyen. A méreteket úgy kell megválasztani, hogy a négyzet oldala egyenlő legyen a henger alapkörének sugarával. Vízcsap alá tartva töltsük meg mindkét edényt vízzel, és mérjük meg külön-külön, hogy mennyi idő alatt teltek meg az edények. Természetesen most is lényeges, mint az előző mérésnél, hogy a csapból kifolyó vízsugár egyenletes és mindkét esetben egyforma legyen (a vízvezetékben az egyenletes nyomást nyilván fel kell tételezni). A mért időket hasonlítsuk össze, számítsuk ki, hogy a henger alakú edény megtöltésének az ideje hányszorosa a szögletes edény megtöltési idejének. Az eredmény most is közelítőleg a π értéke lesz. Természetesen az időadatokból közvetlenül a térfogatok arányára lehet következtetni, de mivel a két edény magassága egyenlő, végül is az alapkör és az alapnégyzet területének az összehasonlítása történik.

Érdemes megemlíteni, hogy a felsorolt mérési eljárásokhoz hasonlóan pl. gömb és megfelelő méretű kocka térfogatának (vagy ha azonos anyagból készültek) tömegének az összehasonlításából is meg lehet kapni a π közelítő értékét, itt azonban viszonylag bonyolultabb számítást kell végezni a méretekre, ezért iskolai alkalmazásra nem javasolható. Egészen egyszerű azonban az eljárás, ha megfelelő méretű kúpot és négyzetes gúlát hasonlítunk össze térfogat, illetve tömeg szempontjából.

Mint látható, az ismertetett eljárások könnyen elvégezhetők általános iskolai keretek között. Kevés időt vesznek igénybe a tanórából, és kísérleti jellegüknél fogva ráirányítják a tanulók figyelmét a π szám fontos szerepére. A „szemléltető példák" című rész ugyan nem ad meg iskolában elvégezhető mérési eljárásokat, de gyakorlati jellegüknél fogva, a mindennapi életből vett példák alapján megmutatják a π sokrétű előfordulását a legkülönbözőbb területeken. Alkalmasak tehát az érdeklődés felkeltésére, így a körrel kapcsolatos számítások az általános iskolai tanulók számára kevésbé tűnnek elvontnak, és közelebb kerülnek a gyakorlati élethez.