TAKÁCS GÁBOR
Gelléri Andor Endre Általános Iskola
Budapest

Folytonos mennyiségek szakaszolásával kapcsolatos matematikai problémák

A mennyiségek becslése, mérése az egyik legjellemzőbb emberi tevékenység. Csecsemőkorban már méricskél a gyermek (kicsi baba – nagyobb baba), és élete végéig többször hasonlítja össze a mennyiségeket, mint ahányszor számtani műveletet végez. A mérés az ismeretszerzés egyik legfontosabb módja.

A mérés az a tevékenység, amelynek során valamely mennyiség mérőszámát a mértékegységgel való (közvetlen vagy közvetett) összehasonlítás útján meghatározzuk. A mérőszám az a szám, amely megadja, hogy a szóban forgó mennyiség hányszorosa a mértékegységnek. A mértékegység a méréshez egységül választott mennyiség.

Minden mérésnél a mérendő mennyiséget azonos fajtájú mennyiséggel hasonlítjuk össze. A hosszúságot hosszúsággal, a területet területtel, a térfogatot térfogattal, a tömeget tömeggel, az időtartamot időtartammal, a szöget szöggel mérjük. Hogy éppen mekkorával? Az a mértékegység választásától függ. Mértékegységül kisebb egységet választva, a mérés eredménye jobban megközelíti a mérendő mennyiség tényleges adatát, mint a nagyobb egység esetén. Viszont, ha a mértékegység kisebb, akkor a mérés elvégzése több gonddal jár. A méréssel kapott eredmény a valódi mértéknek csak közelítő értéke. Nem mindegy, hogy milyen mértékegységet választunk, milyen mérőeszközt használunk. A mérés eredménye sosem lehet tökéletesen pontos. A mérés pontosságának mindig van a mérési eredmény felhasználása szempontjából egy optimális határa.

A mindennapi élet problémáit tekintve a mennyiségek folytonosan változnak, egy-egy konkrétan meghatározott részüket mindig csak a mérési pontosságnak megfelelő hibahatáron belül lehet kijelölni, tökéletesen pontosan sohasem. A legfontosabb alapmennyiségeket (ezek valamennyi mértékegységrendszernek alapmennyiségei) tekintve a hosszúság és az idő folytonos volta nemcsak gyakorlati szinten, hanem elméletileg is vitathatatlan. A tér és az idő is homogén. A tér homogén volta azt jelenti, hogy nincsenek a térnek kitüntetett pontjai, a koordinátarendszer origója eltolható, az eltolással szemben a fizikai törvények invariánsak. Az idő homogén volta pedig azt jelenti, hogy az időszámítást bármikor kezdhetjük, a fizikai törvények a kezdeti időpont önkényes választásával szemben invariánsak. Természetesen az egyes eseményeket a kezdeti időpont bármely választása esetén ugyanolyan időtartamok választják el egymástól.

A diszkrét pontokkal szakaszolt folytonos mennyiségekkel kapcsolatos matematikai problémák vizsgálata, megoldása a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztéséhez eredményesen használható. Alsó tagozaton egymást követő egyenlő távolságok, időtartamok vizsgálatának gyakorlatias esetei, illetve néhány olyan komolyabb probléma kerülhet szóba, amikor a szakaszolás nem egyenletes.

A gyakorló pedagógus szemszögéből nézve az általános fejtegetéseknél használhatóbbnak tartom a konkrét alkalmazások ismertetését. A következőkben ezt teszem.

Az *egyik csoportba* azok a feladatok tartoznak, amelyekben a hosszúság egyenlő szakaszokra történő osztása fordul elő. Ezeknek a feladatoknak az a lényege, hogy a szakaszok száma eggyel kevesebb az osztópontok számánál, ha az eredeti távolság végpontjait nem számítjuk, illetve eggyel több, ha a két végpont is figyelembe veendő a feladat megfogalmazása szerint.

A/1 Hány pillére van a Hortobágy folyón található „kilenclikú" hídnak?

A/2 Egy szelet csokoládés rolád 2 cm vastag. Milyen hosszú volt a tortatekercs, ha 14 szeletre vágták?
Hány vágásra volt szükség a tortatekercs felszeleteléséhez?
Az utolsó vágáskor két szelet keletkezik. Tizennégy szelethez tizenhárom vágással jutunk.

A/3 Az út menti fák szabályosan, 12 méterenként vannak ültetve.
Milyen hosszú a 47 fából álló fasor?
Negyvenhét fából álló fasornál negyvenhat térköz található.

A/4 A függönytartón 25 gyűrű van. 480 cm széles függöny felcsíptetésekor két-két csipesz között mekkora távolságot célszerű tartani
A függöny két szélére is kerül egy-egy csipesz, ezért 24 egyenlő távolságra célszerű osztani a függöny szélességét.

A/5 Egy 12500 méteres távolságon telefonpóznákat állítottak fel. Két-két oszlop távolsága 25 méter. Hány oszlopot kellett a helyszínre szállítani?
A szükséges telefonpóznák száma függ attól, hogy a megadott távolság végpontjaiba is állítunk-e oszlopot. Ezt a tényt kisebb távközzel, kevesebb oszloppal (pl. kerítésépítés, utak mellett felállított hófogó palánkok stb.) célszerű szemléltetnünk. Matematikai tartalma szerint a probléma az időpontok és az időtartamok kapcsolatának felel meg. Gondoljunk arra, hogy egy négynapos kiránduláshoz általában három éjszakára szoktunk szállást szervezni. A kirándulás megkezdése előtt és a negyedik nap éjszaka otthon alszunk, azaz már meglevő hálózathoz csatlakozunk.

A *másik csoportba* azok a feladatok tartoznak, amelyekben az egymást követő időtartamok és kezdetüket, valamint végüket megadó időpontok kapcsolatának vizsgálatára, e kapcsolatok felismerésére van szükség.

B/1 Keddtől péntekig vagy péntektől keddig telik el több idő?
Időpontok és időtartamok (napok, valamint a két összehasonlítandó időtartam) szerepelnek a feladatban. Nyilván kedd és péntek között két napnyi (szerda, csütörtök) időtartam, míg péntek és kedd között három napnyi (szombat, vasárnap, hétfő) időtartam telik el.

B/2 Hány nap van karácsony és szilveszter között?
Hány nap van szilveszter és karácsony között?
Karácsony és szilveszter között: december 26-tól december 30-ig számolandók a napok, azaz (30-26)+1= 5 nap van.
Szilveszter és karácsony között január 1-től december 24-ig számolandók a napok, azaz 358 (illetve szökőévben 359) nap van. Ez egyrészt számolható a decemberi napok, a másik hat 31 napos hónap, a négy 30 napos hónap és február napjainak összegeként: $24+6\cdot 31+4\cdot 30+28=358$.
Másrészt a feladat első részének eredményét felhasználva, az év napjainak számából azt és a két határnapot (december 25 és 31) kivonva is a jó eredményt kapjuk: $365-(5+2)=358$.

B/3 Miklósék 12 éjszakát töltöttek a kampingben. Július 8-án kedden indultak haza. Melyik nap érkeztek Miklósék a kampingbe? A hét melyik napja volt ekkor?

B/4 András szerdán nem jött iskolába, mert reggel rosszul lett, szülei elvitték a kórházba, ahol megfigyelésre ott tartották. Márta hétfőn látogatta meg. Másnap pedig már haza is engedték. Hány éjszakát töltött András a kórházban?

B/5 Egy betegnek az orvos olyan gyógyszert írt fel, amelyből félóránként kell bevennie egy darabot. Mennyi idő alatt fogyott el öt tabletta?
Előzetes tapasztalatok hiányában a gyerekek, sőt még a felnőttek többsége is, kapásból két és fél óra mellett teszi le a voksát. Mivel itt az időtartam szakaszolásáról van szó, az időpontok száma eggyel több, mint az időtartamoké. A helyes időtartam meghatározásának magyarázata nagyon szemléletes. Tegyük fel, hogy az első gyógyszert 8^{00} -kor vette be a beteg, akkor a másodikat 8^{30} -kor, a harmadikat 9^{00} -kor, a negyediket 9^{30} -kor, az ötödiket 10^{00} -kor. Tíz óra és nyolc óra között csak kétórányi az időtartam.

B/6 A komp 45 percenként közlekedik. Tibor a negyedik, Tímea a kilencedik járattal kelt át a Dunán. Hány perc telt el közben?

B/7 A céllövőversenyen egy-egy sorozatban úgy kell leadni hat-hat lövést, hogy az első és az utolsó között legfeljebb 30 másodperc telhet el. Mennyi idő telik el két lövés között, ha a versenyző kihasználja a teljes 30 másodpercet, és egyenletesenlő?
Mivel a versenyző egyenletesen lő, a 30 másodperc időtartamot egyenlő részekre kell osztani. Hat lövés öt részre osztja a felhasználható időtartamot, ezért egy-egy lövés között (30:5) = 6 másodperc telhet el.

B/8 Egy falióra négy másodperc alatt üti el az öt órát.
Mennyi idő alatt üti el a falióra
– a kilenc órát,
– a tizenegy órát?
Az ütések között eggyel kevesebb időköz van, mint az ütések száma.
5 - 1 = 4, azaz 5 ütés 4 időközzel 4 másodpercig tart.
9 - 1 = 8, azaz 9 ütés 8 időközzel 8 másodpercig tart.
11 - 1 = 10, azaz 11 ütés 110 időközzel 10 másodpercig tart.

B/9 Legalább hány tanulónak kell egy osztályba járnia, hogy biztosan legyen közöttük két olyan, akiknek a hónap ugyanannyiadik napjára esik a születésnapjuk?
Például: február 18-ra,
május 18-ra,
szeptember 18-ra.
A leghosszabb hónapban 31 nap van, ezért a harminckettedik tanuló születésnapjának dátuma már csak a hónap ugyanannyiadik napjára eshet, amelyiken egyik osztálytársa született. Ez nyilván akkor igaz, ha a másik 31 tanuló mindegyikének születési dátuma a hónap különböző napjaira esik. Egyébként pedig már előbb lenne két (vagy több) ilyen tanuló.

B/10 Legalább hány gyerek tartja azonos napon a születésnapját valamelyik iskolatársával abban az iskolában, amelynek 666 tanulója van?
Gondolj arra is, hogy Elmés Elemér személyi száma: 1 840229 0235!
Nyilván szökőévben, február 29-én született gyerekek is járhatnak az iskolába (lásd Elmés Elemér személyi száma). Ezért legfeljebb 366 személy születési adataiban lehet a hónap vagy a nap különböző. Így az iskola 666-366=300 tanulója tartja a 366 társa valamelyikével (esetleg mind a 300 ugyanazzal) azonos napon a születésnapját, tehát legalább 301 tanuló.

B/11 Ma Medárd napján éjfélkor esett az eső. Akkor 72 óra múlva a következő események közül melyik valószínű, de nem biztos, melyik lehetetlen, melyik biztos?
A) Esik az eső. B) Felhős az égbolt. C) Süt a nap.
Nem gondolhatunk komolyan arra, hogy „ha Medárd napján esik, akkor negyven napig esik az eső". Egy biztos: a nap nem fog sütni, mert 72 óra, (vagyis 3 nap) múlva megint éppen éjfél lesz, akkor viszont nem süt a nap (hacsak nem vagyunk a sarkkörön túl, a sarki nappal idején).

A *harmadik csoportba* azok a feladatok tartoznak, amelyekben a folytonos mennyiséget szakaszoló diszkrét pontok időben vagy térben nem egyenletesen helyezkednek el. Az ilyen feladatok megoldásának kulcsa a szakaszolás szabályának a feladat feltételeivel összhangban történő alkalmas átfogalmazásában rejlik. Az ilyen típusú feladatok megoldása már átlagon felüli problémamegoldó készséget igényel.

C/1 Egy baktériumfajta öt perc alatt megduplázza önmagát. Reggel nyolckor ilyen baktériumokat raktunk egy fiolába, amely éppen délre lett tele. Mikor volt negyedig a fiola?
Délben: tele van a fiola.
Öt perccel korábban, 11 óra 55 perckor: félig van a fiola.
Öt perccel korábban, 11 óra 50 perckor: felének a feléig, azaz negyedéig van a fiola.

C/2 A tavirózsa egy tavon minden nap a másfélszeresére nő. A kilencedik napon ellepi a tó teljes felületét. Hányadik napon növi be a tó felszínének négykilenced részét?

C/3 Egy alföldi falu postása munkanapokon mindig ugyanakkor indul az autóbusz-megállóhoz a küldeményekért. A busszal egyidőben szokott odaérni, s rögtön indul vissza a postazsákkal. Egy alkalommal az autóbusz korábban érkezett, ezért a posta felé tartó egyik utas szívességből magával vitte a postazsákot. Az utas és a postás az autóbusz érkezése után 4 perccel találkozott. A postás átvette a küldeményeket, azonnal visszafordult, így a szokáshoz képest 10 perccel előbb érkezett a postára. Hány perccel érkezett korábban ezen a napon az autóbusz a szokásosnál?
Alföldi faluról lévén szó, feltehetjük, hogy az út a posta és az autóbusz-megálló között vízszintes, és a megtételéhez szükséges időtartam független az iránytól (posta - megálló, illetve megálló - posta). Tegyük fel, hogy a Petőfi-szobor előtt találkozott a küldeményt cipelő utas és a postás. Nyilván azért érkezett 10 perccel előbb vissza a postás a szokásosnál, mert a Petőfi-szobor és az autóbusz-megálló közötti utat sem oda, sem vissza nem kellett megtennie. Ezért amikor a Petőfi-szobornál van a postás, akkor az autóbusz szokásos érkezési időpontjáig még 5 perc van hátra. Tehát, ha pont akkor érkezett volna az autóbusz, akkor 5 perccel jött volna korábban. De már 4 perccel korábban megérkezett, hiszen ennyi ideig hozta az utas a küldeményt. Ezek szerint az autóbusz 9 perccel érkezett korábban a szokásosnál. Felmerülhet a kérdés, hogy az autóbusz-megálló és a Petőfi-szobor közötti út megtételéhez miért van különböző időtartamra szüksége a postásnak (5 perc) és az utasnak (4 perc). Erre vonatkozóan a feladat szövege korrekt, nincs is okunk ezt feltételezni. Gondoljunk például arra, hogy az utas siet haza a családjához, míg a postás munkaidőben gyalogol.

DR. H. TÓTH ISTVÁN
Tanítóképző Főiskola
Kecskemét

A kiejtéstanítás gyakorlatának alapozása

BESZÉDRITMUS- ÉS IDŐTARTAM-GYAKORLATOK

A légzéstechnikai és az artikulációs gyakorlatok megismerése, illetőleg megismertetése, továbbá a mindennapi gyakorlatban történő realizálása igen sok feladatot, kompenzációs tennivalót jelent a tanító számára (is).

A most bemutatásra kerülő kiejtéstanítási problémák összefüggenek egymással, ezért is történik egyszerre a felvezetésük. Gondoljuk végig: *a beszédritmus* kérdése *s az időtartam-gyakorlatok* ügye valóban *szervesen kapcsolódó anyanyelv-pedagógiai feladatok*at jelentenek a mindennapok során.