DR. SZALAY ISTVÁN
főiskolai tanár
SZTE JGYPK
Szeged

Hogyan mutatja meg a tanító a kisiskolásoknak a matematika hasznosságát?

A tanítók általános matematikai képzése során – a Szegedi Tudományegyetem Pedagógusképző Karán tapasztaltak szerint – a problémák általában abból fakadnak, hogy a tanítóképzés szempontjából kiemelten fontos, azaz az 1–4 osztályban tanítandó alapvető matematikai ismeretek hallgatóinkban csupán evidenciaszinten rögzültek. (Evidenciaszint: fogalmaknak és a hozzájuk tartozó kijelentéseknek az a rendszere, amely magától értetődően elfogadott. Bővebben lásd [1].) Erre az evidenciaszintre az általános iskolai tanulmányaik során, tapasztalati úton tettek szert, és ezen a szinten a középiskolai tanulmányaik keveset változtattak. Meglepetésként éri őket, hogy a tanítóképzésben tanított matematika nem az, amit majd tanítóként a kisiskolásoknak tanítani fognak, mert alapfogalmakra és axiómákra építi definiált fogalmait és bizonyítja tételeit. A tanítók általános matematikai képzése eltér a matematika tantárgypedagógiai képzésétől: a tanító az általános képzés során tanultakat, háttérismeretként használja fel a tantervi anyag feldolgozásához, amelynek „hogyan"-ját a tantárgypedagógiában tanulja meg. Ugyanakkor *az általános matematika keretében is utalnunk kell arra, hogy hogyan tehetjük érdekeltté a kisiskolásokat a matematika tanulásában, ami egyúttal motiváló tényezőként hat a tanítóképzésben is.* A következőkben ezekre az utalásokra adunk példákat.

Múltbéli példák

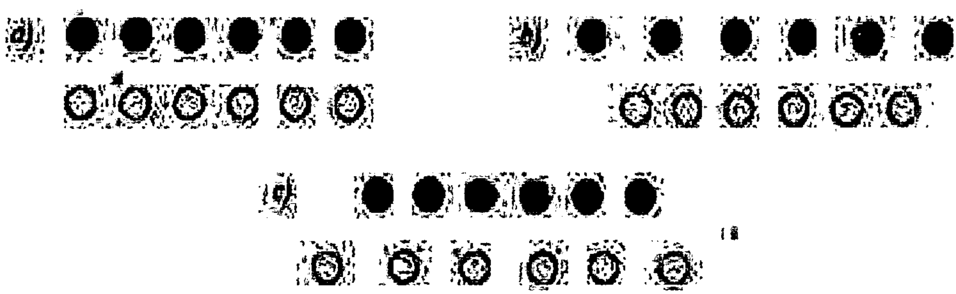
A matematika hasznossága bemutatásának gondolata a felnövekvő generáció számára korántsem új. Néhány példa a múltból (lásd [2]):

- Az 1900-ban megjelent „Számoló könyv" a népiskolába járó gyerekek (családja) számára is használható feladatokat (például, a vásári bevétel várható összegének kiszámítása) tartalmaz, az akkori reális adatokkal,
- Az 1936-ban megjelent „Az élet számokban" (tizedik, javított kiadás) köteteknek már a címe is beszédes. A II. osztályosok témái között az ebéd (szakácskönyvi recept szerinti) elkészítésének a piacon vásárlandó alapanyagok (valódi árakkal) miatti költsége is szerepel.
  A IV. osztályosoknál az adatok a nemzetgazdaság (mezőgazdaság, ipar) állapotát mutatják be. A témák között szerepel a forgalmi adó, házvétel- és eladás, nyereség és veszteség, házbér, házadó, százalékszámítás, kamatszámítás. Az egyes témákhoz tanácsok, intelmek társulnak: „Nem mindig az az olcsó, amiért keveset fizetünk!" „Aki nem fizeti meg az adót, magára vessen, ha rosszul jár!".

Természetesen ma, az információs társadalom „kiber-terében", már más példák is aktuálisak. Az iskola versenytársa a videó-, televízió-, GOOGLE stb., amelyekkel kifejezetten nehéz állni a versenyt az érdeklődés felkeltésében, az illusztrációkban, sőt az elméleti és gyakorlati tudás nyújtásában is. Például a matematikában megjelent a kalkulátor (mobiltelefon), amely az alapműveleteket, sőt a bonyolultabb műveleteket is elvégzi helyettünk, és feleslegessé tesz sok, eddig megszokott, és a tananyagban szereplő számolási eljárást. Szelektálni kell a tananyagot! (Sajnos, ez a szelekció lassú, nem tart lépést az új ismeretek rohamos bővülésével.) A szelektálás megoldása abban rejlik, hogy a tanítónak az új lehetőségeket fel kell használnia, a klasszikus tudnivalóknak pedig az „időtálló" lényegét kell megértetnie a tanítás során, ahol az „élő szó" és a közvetlen kommunikáció a rendelkezésére áll. A továbbiakban a számfogalom kapcsán említünk példákat, amelyeket úgy igyekeztünk válogatni, hogy ne csak a diák, hanem a tanítója érdeklődését is felkeltse.

Természetes számok felépítése

A gond itt abból fakad, hogy még *a tanító szakos hallgatók sem látják világosan a természetes számok rendezése és velük való számolás függetlenségét.* Ez nem meglepő, hiszen az emberi civilizáció részeként kialakuló számfogalom fejlődésében is tetten érhető ennek a két tevékenységnek az áthatása. Az első osztályos gyermek az ujjain számol, és könnyen megtéveszthető a „több" és „kevesebb" megítélésében:



(Ugyanez a látszat „nagyban": a törtszámok többen vannak, mint az egész számok. Persze, ennek valótlanságát elég, ha a tanító tudja.)

Rádöbbenthetjük őket, hogy arra a kérdésre: Lányok vagy fiúk vannak-e többen az osztályban, nem a megszámlálásuk adja a könnyű választ, hanem az, hogy a lányok és a fiúk párba állnak. Ha marad lány páratlanul, akkor a lányok, ha fiú, akkor a fiúk vannak többen. Különben – ha párosával állnak – egyforma sokan vannak. Nagyobb kisdiákoknál felvethető: ***Az egész számok, vagy a páros számok vannak-e többen?*** (Galilei paradoxon, lásd [3], 26. 48. és 49. pontok.)

A számok, a számlálás és a számolás annyira átszövik mindennapjainkat, hogy nem is nagyon gondolunk már arra, hogy a szám nem a természet adottsága, hanem az emberi elmének az emberi tevékenység során létrejött alkotása. A kisiskolások számfogalmának kialakításakor érdemes támaszkodnunk a ***nyelvi alapok***ra és a ***történelmi ismeretek***re. A számok eredete annyira régi, hogy például az 1, 2 és 3 szimbólumokkal jelölt számokat természetes számoknak nevezzük. Ugyanakkor tudjuk, hogy az ősidőkben nem így jelölték, továbbá akkor és manapság is, különféle nyelveken nevezik meg őket. Ez világosan utal arra, hogy a számokat vélhetően különböző időszakokban, a Földgolyó több helyén egymástól független civilizációk találták ki azonos tartalommal, de eltérő nyelvi formában:

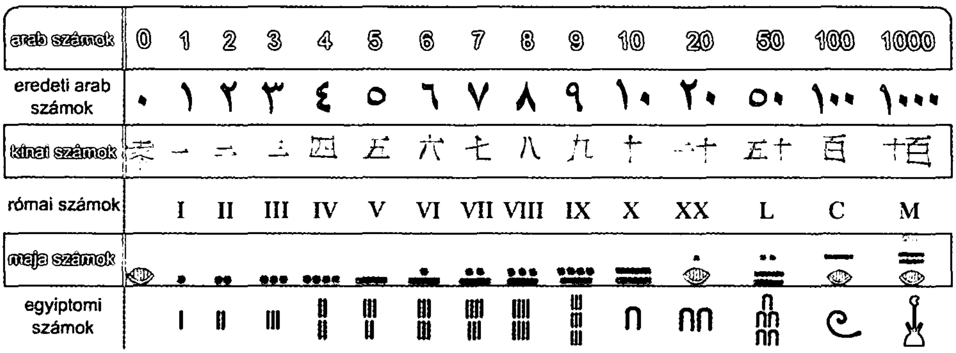
Tőszámnevek (számolás, egyesével)

Egy	Jedan	Jeden	One	Jekh	Unus – Una - Unum
Kettő	Dva	Dva	Two	Duj	Duo – Duae - Duo
Három	Tri	Tri	Three	Trin	Tres – Tria

Szerepük a számlálás irányába teljesedik ki a sorszámnevek megjelenésében

			Sorszámnevek (számozás, számlálás)		
Első	Prvi	Prvy	First	Anghuno	Primus – Prima - Primum
Második	Drugi	Druhy	Second	Dujto	Secundus – Secunda – Secundum
Harmadik	Treci	Tretí	Third	Trito	Tertius – Tertia – Tertium

Ha csak egyesével haladnánk előre, haladásunk nagyon nehézkes lenne, ezért alakultak ki a számrendszerek. Egyes civilizációk identitása, amelyet a nyelv őriz, él az elnevezésekben, de eltűnt a forma globalizálódásával. Négy évezreddel ezelőtt még az egyiptomi és a mezopotámiai számjelek formavilága is tükrözte a létrehozó civilizációk identitását. A globalizálódás, vélhetően, az ókori egyiptomi, mezopotámiai és indiai (amely kapcsolatba került Kínával is) civilizációknak a hellénizmussal kiteljesedő talaján kezdődött. A római birodalom plántálta át a középkorba, amelynek során az arab és közvetítésével a hellén kultúra Európába érkezett. E folyamat során a különféle, már fejlettnek tekinthető számrendszerek legjobb tulajdonságai ötvöződtek.



Megkérdezhetjük a gyerekeket: MIT LÁTNAK AZ EGYES SOROKBAN?
Amire fel kell figyelnünk (rá kell vezetnünk):
ARAB SZÁMOK: 10 darab számjegy, 10 többszörösei, 10 hatványai, helyi értékes, tízes számrendszer.
EREDETI ARAB SZÁMOK: formai eltérés ellenére, pontos megfelelés a felette lévő sorral.
KÍNAI SZÁMOK:

- „Haragos 0".(Azért „haragszik, mert nem látható a továbbiakban a szerepe.),
- az „egy" , „kettő" és „három" a számlálás nyomait viseli, a „négy" már nem,
- a „húsz" a $2 \cdot 10$, az „ötven" az $5 \cdot 10$, az „ezer" a $10 \cdot 100$ szorzást tükrözi.

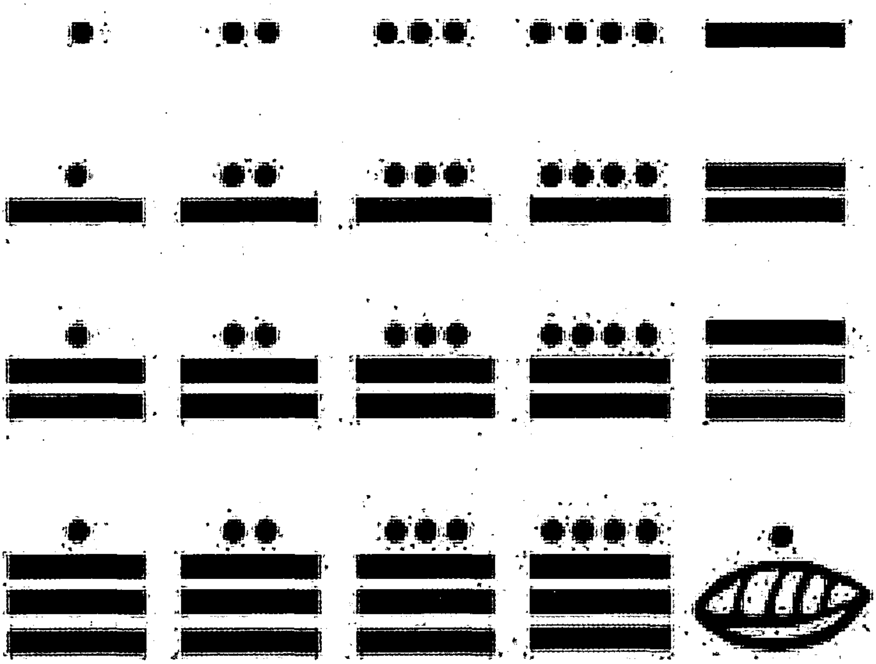
RÓMAI SZÁMOK:

- „Egy" -től „nyolc"- ig csak két jelet (I és V) használnak,
- az „egy" , „kettő" és „három" (hasonlóan a „tíz" és a „húsz" is) a számlálás nyomait viseli (Megkérdezhető a „harminc".),
- a „négy" az $5-1$ kivonást tükrözi,
- a „kilenc" a $10-1$ kivonást tükrözi, (Megkérdezhető a „tizenkilenc". Lesz -e olyan kisdiák aki „ráérez" a $XIX = 10+(10-1) = 10+(-1+10)$ szerkezetre?),
- az „öt" „ötven" miatt felfedezhetők az ötös számrendszer elemei,
- a „tíz", „száz" és „ezer" miatt felfedezhetők a tízes számrendszer elemei,
- nincs „nulla",
- nincs helyi érték.

MAJA SZÁMOK. (Ennek kapcsán érdemes vitát nyitni arról, hogy milyen számrendszereket ismerünk. Ennek során a következő „csomópontokra" érdemes ráirányítanunk a figyelmet:

- Amikor rovátkákat rajzolunk, lényegében az „egyes számrendszerrel" dolgozunk, egyetlen számjegy a rovátka. Előbb-utóbb a rovátkák összefutnak a szemünk előtt, ezért a négy //// rovátka után, az ötödikkel ezeket keresztben áthúzzuk. (Ötös számrendszer.)
- A tízes számrendszer a két kezünk tíz ujjának a következménye.
- A maják húszas számrendszere a lábujjakat is figyelembe veszi.
- Milyen számrendszer felelne meg annak, ha az ember kezek és lábak helyett csupán két „csillóval" rendelkezne?

Az első húsz maja számot érdemes külön is megmutatni:

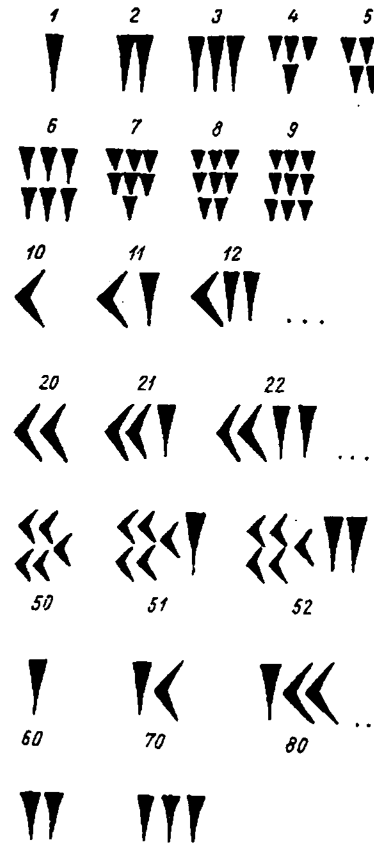


- „egy" -től „tizenkilencig"- ig csak két jelet (•,–) használnak,
- az „egy", „kettő", „három" és „négy" a számlálás nyomait viseli, az „öt" már nem,
- $5 + 1; 5 + 2; 5 + 3; 5 + 4; 5 + 5; 5 + 5 = 2 \cdot 5; 2 \cdot 5 + 1; 2 \cdot 5 + 2; 2 \cdot 5 + 3; 2 \cdot 5 + 4; 3 \cdot 5;$ $3 \cdot 5 + 1;\ 3 \cdot 5 + 3; 3 \cdot 5 + 4$ szerkezetek,
- van „nulla" jel (kagyló), helyi értékes, húszas számrendszer,
- „ötven" = $2 \cdot 20 + 10$ (húszasok helyén a „kettő", egyesek helyén a „tíz" számjegyekkel),
- „száz" = $5 \cdot 20$ (húszasok helyén az „öt", egyesek helyén a „nulla" számjegyekkel),
- „ezer" = $2 \cdot 400 + 10 \cdot 20$ (négyszázasok helyén a „kettő", húszasok helyén a „10", egyesek helyén a „nulla" számjegyekkel). (A húszas számrendszerben a 20 hatványait $(1 = 20^0; 20 = 20^1; 400 = 20^2; 8000 = 20^3; 160000 = 20^4 \ldots)$ szorozzák a „0","1",...,"19" számjegyek.) Felvethető kérdés: Hogyan írták a maják a 399 számot? $(19 \cdot 20 + 19)$

EGYIPTOMI SZÁMOK (Hieroglifák):

- „egy”-től „kilenc”- ig csak egy jelet (gabonaszál) használnak,
- az „egy” , „kettő” és „három” a számlálás nyomait viseli, a „négy” már nem (akárcsak a kínaiaknál, pedig aligha tudtak egymásról),
- a „négy” a $2+2=2\cdot 2$ szerkezetet tükrözi,
- $3+2;3+3=2\cdot 3;4+3;4+4=2\cdot 4;3+3+3=3\cdot 3$ szerkezetek,
- a „tíz” új jelet (összefogó kötél) és hatványai („száz”: felcsavart kötél; „ezer”: lótuszvirág) új jeleket kapnak, tízes számrendszer
- a „tiz” többszöröseit az „egy” többszöröseihez hasonlóan képezzük,
- nincs „nulla”, nincs helyi érték.

Mintegy 25 észrevételt tettünk! Közben érintettük az összeadást, szorzást, kivonást és a hatványozást (10 és 20 hatványai esetében), a zárójelek használatát, a műveletek sorrendiségét, a nulla szerepét (az összeadás szempontjából, bármihez adva, nincs változás), a 10-es, 20- as és 60-as számrendszereket és a helyi érték fogalmát, a szám többszörösének fogalmát (1, 5, 10 és 20 esetében). Persze, nem a tankönyvek (NAT, kerettanterv, helyi tanterv, tanmenet) didaktikus sorrendjében. Ez a tárgyalásmód viszont érdekesebb, érdekeltté teszi a kisiskolást a figyelésben, aktív szerepet ad neki a megfigyelésben, sőt következtetések levonásában, számára új dolgok felfedezésében.) Saját terminológiámban megkülönböztetem az **oktatás folytonos-, illetve szivacs- modelljeit.** (Lásd [4].) Vallom, hogy a matematikát – a témák egymásra épülése miatt – alapjában a folytonos modell szerint kell tanítani. Ennek kizárólagossága viszont unalmassá teszi a tanítást, ezért ötvözendő a szivacs-modellel, amelyre példa az előbb bemutatott tárgyalási mód. Az 5-8. osztályos diákoknál érdemes felvetni a hatvanas mezopotámiai számrendszert is, ami az oszthatóság, a prímtényezős felbontás, a 60 hatványai, az idő óra, perc, másodperc, a szög fok, perc mérése témákkal hozható kapcsolatba:

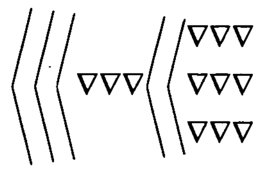


Csak két aspektusra térünk ki:

- A számrendszer hatvanas jellege abból látszik, hogy a „hatvan” jele ugyanaz az egyszerű ék, mint az „egy” jele. A pontos jelentés a szövegkörnyezetből derül ki.
- Nem látjuk a „nulla” jelét. Valóban, kezdetben nem is volt, de előbb-utóbb kikövetelte a helyét. (Lásd [5], 7. oldal.)

Mit tekinthetünk olyannak, amit „hanyagolhatunk”? Például, a „többtagú szorzását több taggal”. Manapság már a gyerekek is kalkulátorral (mobiltelefonnal) számolnak. Nem érdemes tiltani. Azt, hogy szükség van a kalkulátorok mellett is a matematika módszereire, ügyes kérdésekkel kell elfogadhatóvá tenni, ezek egyúttal érdekeltté teszik a kisdiákot is abban, hogy matematikát tanuljon. Például:

Melyik civilizációban szerepelhetett, és mit jelenthetett?



(Mezopotámia, $33 \cdot 60 + 29 = 2009$.)

Hogyan írták a maják a félmilliót?

. . .

. .

=

Kagyló

Kagyló

$(3 \cdot 160000 + 2 \cdot 8000 + 10 \cdot 400 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 1)$

Érdekességként (de nem számolási módszerként) megemlíthetjük a magyarok rovásírását:

𐳻	𐳺𐳺𐳺𐳺	𐳺𐳺𐳺	𐳺𐳺	𐳺
5	4	3	2	1
𐳿		𐳾	𐳽	𐳼
1000		100	50	10

Még egy feladat a kisebbek (alsó tagozatosok) számára:

Sorminták összeadása.

Sormintán egy tetszőleges hosszúságú, $\otimes$ *és* $\times$ *jelekből álló sorozatot értve, ezeket úgy adjuk össze, hogy egymás alá írva, a jobb oldali végük összeérjen, majd a jobb széllel kezdve, a következő szabály alapján járunk el:* $\begin{smallmatrix}\times\\ \times\end{smallmatrix}$ *esetben, alájuk* $\times$ *kerül;* $\begin{smallmatrix}\otimes\\ \times\end{smallmatrix}$ *vagy* $\begin{smallmatrix}\times\\ \otimes\end{smallmatrix}$ *esetben, alájuk* $\otimes$ *kerül;* $\begin{smallmatrix}\otimes\\ \otimes\end{smallmatrix}$ *esetben, alájuk* $\times$ *kerül, de ekkor egy* $\otimes$ *beszámít a jobb szélről következő osz-*

lopba, az alábbiak szerint: $\begin{matrix}\times\\ \times\end{matrix}$ *esetben, alájuk ⊗ kerül;* $\begin{matrix}\otimes\\ \times\end{matrix}$ *vagy* $\begin{matrix}\times\\ \otimes\end{matrix}$ *esetben, alájuk × kerül, de ekkor egy ⊗ beszámít a jobb szélről következő oszlopba;* $\begin{matrix}\otimes\\ \otimes\end{matrix}$ *esetben, alájuk ⊗ kerül, de ekkor egy ⊗ beszámít a jobb szélről következő oszlopba. Ezt folytatjuk, míg az oszlopok el nem fogynak. Például*

	⊗	×	×	⊗	⊗	⊗	×	⊗	×	×	×
		⊗	⊗	×	×	⊗	⊗	×	×	⊗	⊗
⊗	×	×	×	×	×	×	⊗	⊗	×	⊗	⊗

Mi is történik valójában?

Ha a $\otimes = 1; \times = 0$ jelölésekkel dolgozunk, akkor a kettes számrendszerben

$\otimes\times\times\otimes\otimes\otimes\times\otimes\times\times\times = 10011101000_2 =$

$= 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 =$

$= 1024 + 128 + 64 + 32 + 8 = 1256$

és

$\otimes\otimes\times\times\otimes\otimes\times\times\otimes\otimes = 1100110011_2 =$

$1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$

$= 512 + 256 + 32 + 16 + 2 + 1 = 819$

összeadandók, a harmadik sorban pedig az összeg jelenik meg.

Gyakorlatban használatos példát is mondhatunk. Senki sem vonhatja kétségbe, hogy az *üzenet-kódolás*nak óriási a jelentősége. Erre vonatkozik a következő példánk:

Kódolt üzenet küldése

Az osztályt nyolc csoportra osztjuk.

Kiosztunk közöttük nyolc papírlapot, amelyekre az 1;2;3;4;5;6;7;8 számokból egyet-egyet felírtunk, de a kiosztáskor nem nézzük meg, hogy melyik csoport melyiket kapta. A csoportokat felszólítjuk a következő lépések végrehajtására:

1. **Gondolj egy négyjegyű számot!**
2. **Szorozd meg 3-mal!**
3. **A második lépésben kapott eredményt szorozd meg önmagával!** (Itt már „elkel" a kalkulátor. A „nagyobbaknak" mondhatjuk: Emeld négyzetre a második lépésben kapott eredményt!)
4. **A harmadik lépésben kapott eredményhez add hozzá a papírlapon kapott számot!**
5. **Közöld a nyilvánossággal az eredményt!**

Itt az elsődleges cél, hogy számoljanak a diákok, ezért addig nem hajthatják végre az 5. lépést, amíg a csoporton belül az eredményt illetően egyezségre nem jutottak. A csoporton belüli funkciók elosztása a csoport belső ügye. Egy négytagú csoport dönthet úgy, hogy a 3. lépésben mindenki, egymástól függetlenül számol a kalkulátorával, és eltérés esetén megismétlik a számolást (esetleg „négyzetre emelés" gomb használatával). De lehet úgy is, hogy ketten számolnak kalkulátorral, egy százasokra, egy pedig ezresekre kerekítve becslést ad az eredményre, stb. A „másodlagos" cél a hatáskeltés: Mondjuk, hogy az 5. lépésben a csoport képviselője közli (felírja a táblára), hogy az eredmény: 877818390 (Nyolcszázhetvenhét millió nyolcszáztizennyolcezer háromszáz kilencven). Kicsit számol a tanár is és melléje írja: A csoport által gondolt szám: 9876 és hozzáteszi: a csoportnak kiosztott papírlapra a 6 szám volt írva. Interpretáció: A 6-os csoport volt a feladó, üzenete a 9876. (Ugyanez nagyban: pinkóddal bejelentkező a pénzkiadó automatában való összeg beütésével. Kisebbeknek: kém és jelentése a nyilvánosság orra előtt.) Természetesen, a diákokat érdekli, hogy hogyan jött rá a tanár minderre? Lehet, hogy azt kell mondanunk: Várj a magyarázatra, míg középiskolás leszel! Nos, a magyarázat:

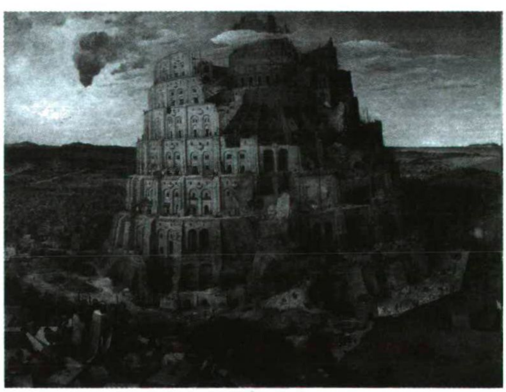
Legyen a gondolt négyjegyű szám x, a papírlapon lévő egyjegyű szám az y. Hajtsuk végre a lépéseket!

1. x
2. $3x$
3. $9x^2$
4. $9x^2 + y$
5. Kezünkben van a 4. lépésben kapott eredmény (fenti példánkban 877818390). Ha ezt osztjuk 9-cel, egy tört számot kapunk (97535376,67...), aminek egész része x^2 (97535376). Ebből négyzetgyököt vonva adódik az x ($\sqrt{97535376} = 9876$). Végül, $y = (9x^2 + y) - 9x^2$ (877818390-877818384 = 6)

A teljes indukció

Mit is jelent a teljes indukció? Röviden fogalmazva egy vélt tulajdonság minden esetre való érvényesülésének igazolását. Mondjunk rá közérthető példát! Tegyük fel, hogy a láz csillapítására egy bizonyos tablettát (Rubophen) akarnak bevezetni. Önként vállalkozó embereken tesztelik a készítmény hatását. Ha megfelelőnek találják, bevezetik mint gyógyszert. Ez a *nem – teljes indukció*. Miért? Azért, mert idővel jelentkezhetnek nem kívánt mellékhatások, azaz a gyógyszer *nem minden esetben* alkalmazható. Mondhatnánk, akkor nincs is teljes indukció. Valóban, a gyakorlati élet többnyire a nem teljes indukcióra épül.

Próbáljuk szemléletes úton megközelíteni a teljes indukciót! Tűzzük ki célul, hogy építsünk egy égig érő, emeletről emeletre haladó tornyot. Gondolhatunk a bibliai Bábel – toronyra, amely id. Peter Bruegel flamand festő 1563-ban készült képén meglehetősen romos látványt nyújt:



Tudjuk a Bibliából (Teremtés Könyve (Mózes első könyve), 11. 1-9.), hogy a próbálkozás sikertelen maradt. Könnyítsük meg a dolgunkat és képzeljünk el, egy végtelen lépcsősort! Most csupán azt kérdezzük, hogy végigjárható-e? Az egyszerű kísérletező elindul rajta, és elfáradva az ezredik lépcsőnél kijelenti, hogy végigjárható. Ez a nem teljes indukció útja és itt érezzük a kételyt: Mi van, ha a következő lépcsőfok már korhadt, és leszakad alattunk?

Mit mond a matematika?

I. Győződjünk meg arról, hogy el tudunk indulni!

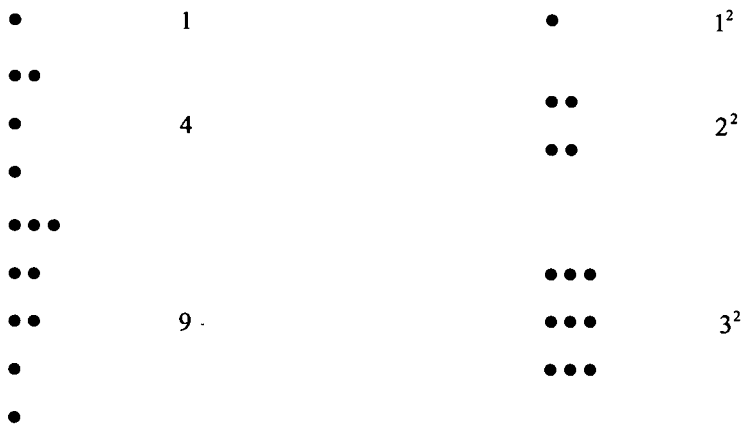
II. Feltéve, hogy valahova már eljutottunk, megmutatjuk, hogy onnan, a következő lépcsőre is fel tudunk jutni!

Miért meggyőzőbb ez? Azért, mert ha ez a kétpontos program teljesül, *nem tudunk olyan lépcsőt mondani, amihez ne juthatnánk el.* Például, az 1001. fokra, feltéve, hogy az 1000. fokon vagyunk, a II. pont alapján bátran felléphetünk. Jogos viszont a kérdés: De hogyan kerültünk az 1000. fokra? Válasz: a 999. fokról, feltéve, hogy oda eljutottunk. Így, visszafelé lépegetve eljutunk a lépcsősor aljára, ahol az I. pont alapján tudjuk, az indulásunk biztosítva van. Nos, ez a teljes indukció.

Természetesen ezt a gyerekeknek egyáltalán nem vagy csak nagyon óvatosan mondhatjuk el: Például: Adjátok össze az 1-el kezdve sorban a páratlan számokat! Mit vesztek észre? Igaz-e az észrevételetek, akárhány páratlan számot is adtok össze? A gyerekek elkezdik:

1. lépcső: maga az 1
2. lépcső: 1+3 = 4
3. lépcső: 1+3+5 = 9
4. lépcső: 1+3+5+7 = 16
5. lépcső: 1+3+4+5+7+9 = 25

Itt már lesz, aki észreveszi, hogy a jobb oldalakon négyzetszámok állnak, sőt azt is, hogy éppen annak a négyzete, ahány páratlan számot adtunk össze! Rá is vezethetjük őket az alábbi átrendezéssel:



A vélt szabályszerűség a matematika nyelvén: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Ezt már a pitagoreusok (i.e. VI. század) felismerték, de csak Maurolico itáliai bencés szerzetes bizonyította be a teljes indukcióval 1575 – ben:

I. $n = 1$ esetén $2n - 1 = 1$, ezért a baloldalon csak egy tag van és a jobb oldalon $n^2 = 1$.

II. Feltéve, hogy az n – edik lépcsőn állunk, erre érvényes, hogy

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

A $(2n-1)$ páratlan szám után a következő 2-vel nagyobb: $(2n-1)+2=2n+1$.

Ha ezt is bevesszük az összeadandók közé, akkor már $(n+1)$ számot adunk össze:

$$1+3+5+...+(2n+1)=(1+3+5+...+(2n-1))+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

ami azt jelenti, hogy feljutottunk az $(n+1)$-edik lépcsőfokra.

A szabály felismertetése után a teljes indukciós bizonyítást a középiskolára hagyhatjuk.

Másik látványos (és sokkal nehezebb) példa lehet a Dan Brown „Da Vinci kód" című könyve nyomán divatossá vált Fibonacci-sorozat, amely az

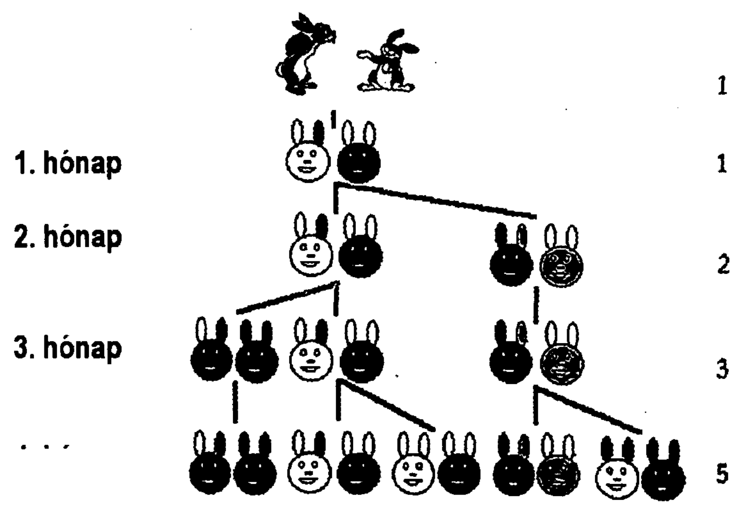
$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$$

számokkal kezdődik.

Miért így kezdődik, és hogyan folytatódik?

Fibonacci (Leonardo Pisano, 1170?-1240) eredeti feladatában egy olyan nyúlcsaládról van szó, amelyben minden egyes nyúlpár a második hónaptól kezdve, havonta, egy újabb nyúlpárnak ad életet. Az a kérdés, hogy ha az év elején egyetlen nyúlpárunk van, hány nyúlpárunk lesz az év végén?

Ha az év elejét a 0-adik hónappal kezdjük, akkor ebben a hónapban és az ezt követő 1. hónapban még csak ez az egyetlen nyúlpárunk lesz. A 2. hónapban az eredeti nyúlpár mellett, szaporulatként egy újabb nyúlpár jelenik meg. A 3. hónapban az eredeti nyúlpár mellett egy még ifjabb szaporulat is lesz, és ott van a 2. hónapban már meglévő szaporulat is:



Tehát a vélt szabályszerűség: Ha kiindulunk egy bizonyos hónap nyúlpárjainak a számából (a_n), akkor a rá következő hónapban a nyúlpárok száma (a_{n+1}) a kiindulási hónap nyúlpárjainak és a kiindulási hónapot megelőző hónap nyúlpárjainak (a_{n-1}) összege lesz.

A matematika nyelvén egyszerűbben, Az $(n+1)$- edik hónapban:

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \qquad ,\ n=1,2,3,...,$$

lesz a nyúlpárok száma. A matematikusi „lelkület" természetesen felteszi a kérdést, hogy mi van, ha, a nyúlcsalád tagjait halhatatlannak tekintve, az *n –edik* hónap végén vagyunk kíváncsiak a nyúlpárok számára. Erre ad választ a hihetetlennek tűnő

$$a_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}; n = 0,1,2,3,...$$

„explicit szaporodási képlet". Egy kézi számológéppel ellenőrizhetjük, hogy

$$a_{11} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{12} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12}}{\sqrt{5}} = 144,$$

ami a válasz Fibonacci eredeti kérdésére az 1 ,1, 2 , 3 , 5, 8 ,13 , 21 ,34 , 55 , 89, 144 sorozat végén. Ezt még akárki minősítheti szerencsés véletlennek, hiszen az „explicit szaporodási képlet" végtelenül sok állítást jelent. Hogyan lehet ezt bizonyítani? (Ezt a képletet Fibonacci sem ismerte.) A teljes indukciós bizonyítást hagyjuk meg a középiskolai tehetséggondozásnak, illetve a felsőoktatásnak.

Törtek

A folytonos modell szerint a természetes számok megismerése után a (pozitív és racionális) törteket be lehet vezetni. Erre (a szivacs – modell szellemében) adunk egy játékos példát, amelyben a matematikából „rossz" (illetve magukat annak minősítő) kisiskolások is jeleskedhetnek. Három azonos címletű pénzérmével játszunk „fej vagy írás" játékot. Legyen a pénzérme az idén (2009) kibocsátott 200 forintos. A „200" legyen az „írás", a másik oldala pedig a „fej". Azt kérdezzük, *mi az esélye annak, hogy a három érmét kezünkben jól összerázva, majd az asztalra dobva, „egy írást és két fejet" látunk?* Először az „esély" fogalmát érdemes tisztáznunk.

– Lesz, aki azt mondja: Vagy „egy írást és két fejet" látok vagy nem. Tehát: fele-fele. (Ez alkalom az $\frac{1}{2}$ bevezetésére.)

– Lesz, aki azt mondja: Láthatok, „három írást" vagy „két írást és egy fejet" vagy „egy írást és két fejet", vagy „három fejet". Tehát: $\frac{1}{4}$.

Kinek lesz igaza? Itt vezethetjük rá a gyerekeket arra, hogy fontos a kísérlet. Elvégezzük valahányszor, és feljegyezzük, hányszor látunk „egy írást és két fejet". Az esélyre abból következtetünk, hogy a dobások számának növekedésével hogyan alakul a

$$\frac{\textit{egy írás két fej dobás}}{\textit{összes dobás}}$$

hányados értéke. (A valószínűség-számításban ezt a hányadost *relatív gyakoriság*nak hívjuk, de ezzel az elnevezéssel ne terheljük a kisiskolást.)

Nosza, rajta, csináljunk 100 kísérletet! (A 100 kiválóan alkalmas a hányados tizedes törtként való szemlélésére is. Ha még nem tartunk a tizedes törteknél, közönséges törtekkel dolgozunk.) Nem sajnáltam a fáradságot, megcsináltam. (Az osztállyal csoportmunka, illetve egyénileg házi feladatként érdemes csináltatni.) A dobások eredményét 10-es bontásokban jegyeztem fel i_3 = három fej; $i_2 f_1$ = két írás és egy fej; $i_1 f_2$ = egy írás és két fej; f_3 = három fej jelölésekkel. A sorok a dobás eredményét, az oszlopok a dobások sorszámát jelzik:

	1-10	11-20	31-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	összesen
i_3	1	4	2	2	1	1	1	0	1	2	15
$i_2 f_1$	6	2	2	3	4	5	2	5	1	2	32
$i_1 f_2$	3	3	5	2	4	3	4	3	6	5	38
f_3	0	1	1	3	1	1	3	2	2	1	15

Most összehasonlítva az eredményeket, ismét megkérdezhetjük, hogyan látják az eredményt. Az „$\frac{1}{2}$ párt” (az én adataimmal 38, illetve 62 láttán) valószínűleg visszavonja az állítását, de az „$\frac{1}{4}$ párt” is meginog, hiszen 25-öt „várt” és 38-at „kapott”. Még jobban elbizonytalanodik, ha a relatív gyakoriságokat foglaljuk táblázatba, ahol az oszlopok az addigi dobások számát jelzik. (A relatív gyakoriságot tizedes törtben adjuk meg. Ha közönséges törtekkel dolgozunk, akkor ugyanezt a példát elővehetjük a tizedes törteknél, azok kerekítésénél, sőt, a véges és végtelen szakaszos tizedes törteknél is. Régi adatokkal tanítunk új ismereteket, ezáltal időt nyerhetünk)

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
i_3	0,1	0,25	0,233	0,225	0,2	0,183	0,171	0,15	0,144	0,15
$i_2 f_1$	0,6	0,4	0,333	0,325	0,34	0,367	0,343	0,3625	0,333	0,32
$i_1 f_2$	0,3	0,3	0,367	0,325	0,34	0,333	0,343	0,3375	0,367	0,38
f_3	0	0,05	0,067	0,125	0,12	0,117	0,143	0,15	0,156	0,15
összesen	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Az „$\frac{1}{4}$ párt” már nemcsak azt látja, hogy a várt 0.25 helyett a 0,38 adódik, de azt is, hogy az első 20 dobást követően a 0,25 „esély” egyáltalán nem látszik kialakulni. Most mi van? Ha a diákok kicsik (alsó tagozat), akkor nem érdemes többet mondani annál, hogy a kísérletek számát egyre növelve (például az osztály munkacsoportjainak az adatait egységesen tekintve) egyre közelebb jutunk az „esély” értékéhez, amire „jóslatként” (hadd lássa a diák, hogy a tanár többet tud) kijelenthetjük: *annak az esélye (valószínűsége), hogy „egy írás és két fej” legyen* 0,375. Ezt azonban előbb-utóbb indokolnunk kell! Ennek érdekében alaposabban meg kell vizsgálni az $i_1 f_2$ típusú dobásokat! A három pénzérme az asztalon háromszöget formáz. (Ha egy egyenesben lévőnek látszanak, akkor azt elfajult háromszögnek vesszük.) Ekkor (koordináta – rendszerként az asztalt használva) a három pénzérme „balról jobbra és azonos szint esetén aluról - felfelé” elrendezésben is különbözik egymástól. Például, a

	fej	fej fej	fej		fej
fej írás fej ;	fej ;	írás ;	írás ;	írás ;	fej stb.
	írás fej	fej		fej	írás

$f\,i\,f$ elrendezést mutatnak, de lehetséges $i\,f\,f$ (például, írás fej fej) és $f\,f\,i$ (például

írás
fej)
fej

elrendezés is, miközben mindhárom $i_1 f_2$ típusú. Az összes lehetőségről a következő típuselrendezési (eset) táblázat készíthető:

$$i_3 \quad : iii$$
$$i_2 f_1 : iif \; ifi \; fii$$
$$i_1 f_2 : iff \; fif \; ffi$$
$$f_3 \quad : fff$$

ami összesen 8 eset. Feltéve, hogy mindegyik eset egyformán valószínű, a kedvező $(i_1 f_2)$ esetek száma 3, tehát az „esély" $\frac{3}{8} = 0{,}125$.

A tanító szakos hallgatók számára ezt a példát felhasználhatjuk a *valószínűségi változó várható értéke* fogalmának megértetésére. Az egyes dobásokhoz az

$$i_3 \to 0$$
$$i_2 f_1 \to 1$$
$$i_1 f_2 \to 2$$
$$f_3 \to 3$$

számokat (fejek száma) rendelve megkérdezhetjük, hogy *mire számítsunk, ha egyetlen dobást tehetünk csak?* A várható értékre vonatkozó képlet (lásd [3], 57. pont (*)) azt mondja, hogy számítsuk ki az

$$\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3$$

szorzatösszeget, ami $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5$, tehát vagy $i_2 f_1$ -re vagy $i_1 f_2$ -re fogadjunk. Mennyre lehetünk ebben biztosak? Erre próbálunk a *szórás* (lásd [3], 57. pont (**))

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 9\right)-\left(\frac{12}{8}\right)^2}=\sqrt{3-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\approx 0{,}866$$

értékéből következtetni. E szerint a várható érték alatti 1,5 - 0,866 = 0,634 illetve a fölötti 1,5 + 0,866 = 2,366, tehát a 0,634 és 2,366 közötti sávot érdemes figyelembe venni. Ez megerősíti, hogy ne tippeljünk az i_3 és f_3 típusokra. Ugyanakkor ne feledjük, hogy valószínűség-számításnál csak a *lehetetlen esemény* 0, illetve a *biztos esemény* 1 valószínűségében lehetünk biztosak. (Valóban, az általam végzett 100 dobásos kísérletsorozat 11., 13., 14., és 15. dobásainál, tehát háromszor, sőt, majdnem négyszer egymás után az i_3 jött ki.)

A törtek körében tudunk példát mondani arra, amikor a kalkulátor „csődöt mond".

Törtek összehasonlítása

Egyenlők-e a $\frac{1010010000}{1010010001}$ és $\frac{1010010001}{1010010002}$ törtek?

A kalkulátor „csődjét" az jelenti, hogy mindkét törtre, a 0 után, végig csupa 9 szerepel a kijelzőn. Ez egyenlőnek mutatja őket, de nem érezzük hitelesnek. Ha nem egyenlők, akkor melyik a nagyobb? (A döntésre négy jó és egy rossz megoldás is található a [6] 18-20. oldalain.)

Negatív számok

A folytonos modell szerint a természetes számok megismerése után a negatív (egész) számokat be lehet vezetni. Erre, a kiváló didaktikai érzékkel rendelkező matematikus profeszszort, Péter Rózsát idézve adunk egy példát, amelyben szinte „észrevétlenül" keletkezik negatív szám.

Egy apa 52 éves, a fia 27. Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fiú? (Lásd [7], 79 – 81. oldalak.) Próbáljuk megoldani: Jövőre az apa 53, a fiú 28, ennek kétszerese 56. Két év múlva az apa 54, a fiú 29, ennek kétszerese 58. Továbbgondolva látjuk, hogy a fiú életkorának kétszerese mindig nagyobb lesz az apa életkoránál. A válasz: *soha*. Péter Rózsa azt mondja, hogy „Akinek érzéke van a számokhoz, az kiérzi belőlük, hogy 2 évvel ezelőtt az apa 50, a fiú 25 éves volt, és így ekkor *volt* az apa kora kétszer annyi, mint a fiúé." A példát át kell fogalmazni! *Hány évvel ezelőtt volt az apa kétszerte idősebb a fiánál?* Itt van a (-2) „elásva", „52 – 54" formájában. A negatív szám (amelyet az emberiség nagyon nehezen fogadott el, például a nyelvújítás korában „hamis szám" volt a nevük) megkönnyíti a dolgunkat. Ismét nekirugaszkodva a megoldásnak: x évvel számolva az

$$52 + x = 2(27 + x)$$

egyenlethez jutunk, aminek megoldása $x = -2$, azaz, a „most"-hoz képest 2 évvel ezelőtt volt a kívánt egyezés.

Szellemesen, két lépésben magyarázza meg a negatív számmal való szorzást is. (Lásd [7], 86 – 87. oldalak.) Egy egyszerű kérdéssel kezdi: *Ha valaki óránként 3 km-es egyenletes tempóban sétál, mekkora utat tesz meg 2 óra alatt?* Nyilvánvalóan a megtett út $2 \cdot 3 = 6$ km. Ezek után azt mondja, hogy „Az úton van egy pont – „itt"-nek fogom nevezni – amitől jobb felé haladó sétát pozitívnak, bal felé haladót negatívnak fogok tekinteni. Ha jobb felé tesz meg a sétáló óránként 3 km-t, azt fogom mondani, hogy a sebessége +3 km, ha bal felé, akkor azt, hogy a sebessége -3 km óránként. Végre választok egy időpontot – „most"-nak fogom nevezni – és az utána eltelt időt pozitívnak, az előtte elmúlt időt negatívnak tekintem."

„Mínusszor plusz, az mínusz"

Ezt a szabályt, amit sokan „dogmatikusan" fognak fel, Péter Rózsa a következő kérdéssel kezdi magyarázni: *Valaki +3 km-es óránkénti sebességgel sétál, most itt van, hol volt 2 órával ezelőtt?* Balra kellett, hogy legyen – érvel, ha jobbra haladva van most itt. Két óra alatt 6 km utat tett meg, de balra volt, azaz –6 km-re. Így $(-2)(+3) = -6$.

„Mínusszor mínusz, az plusz"

E „dogma" esetében Péter Rózsa kérdése: *Legyen a sebesség -3 km óránként, most itt van a sétáló, hol volt 2 órával ezelőtt?* A sétáló most balra halad, tehát most jobbról ért ide. Két óra alatt 6 km utat tett meg, de jobbra volt, az +6 km-re. Így $(-2)(-3) = +6$.

Nem kell mindig újat kitalálni. A régi mesterektől is lehet tanulni.

IRODALOM

[1] Szalay István : Alapkérdések a tanító – hallgatók matematika oktatásában és a közgondolkodás evidencia – szintje, Apáczai – Napok (Győr), Tanulmánykötet I. (2006), 406 – 411.

[2] Szemkeő Judit: A népiskolai matematika tankönyvek aktuális üzenete, előadás a Varga Tamás Módszertani Napok (Budapest) konferencián, 2008, november 7-8.

[3] Szalay István: Matematika előadások és gyakorlatok tanító szakon, Facsimile kiadás, kiadta a Bonifert Domonkos Alapítvány, Szeged, 2008, ISBN 978 – 963 – 06 – 3936 – 1.

[4] Szalay István: A folytonos és szivacs modell ötvözete a tanítók matematika képzésében, XII. Apáczai Napok (Győr), Tanulmányok (Disc), 235 – 239.

[5] Szalay István: A valós szám fogalmának fejlődése, Az esélyegyenlőség és a felzárkóztatás vetületei az oktatásban (Subotica) konferencián elhangzott munkák gyűjteménye (2009), I. kötet, Plenáris előadások 3 – 22.
[6] Szalay István: Kézi számológép használata matematika órán, Módszertani Közlemények, 49. évf. 1. szám (2009), 10 – 20.
[7] Péter Rózsa: Játék a végtelennel, Tankönyvkiadó, hatodik kiadás, Budapest, 1978, ISBN 963 17 3178 2.

DR. H. TÓTH ISTVÁN–RADEK PATLOKA
egyetemi oktatók
Károly Egyetem Filozófiai Fakultása
Prága

Bevezetés a nyelvi képek sokszínű világába

(Gondolatok, tanácsok a nyelvi képek tanításához – 1.)

A 6–14 éves korúak oktatásban több évtized után a „Nyelvi-irodalmi és kommunikációs nevelési program" 8. évfolyamának a tananyagtervében[1] szerepelt először a stílus és a stilisztika rendszerezett, immáron a kommunikációelméletre alapozott bemutatása és tanítása. Az ennek a tantervnek a nyomán készített tankönyv[2] széles körben vált ismertté, mivel nemcsak a nyik-es osztályokban használták.

A Módszertani Közlemények kiskönyvtár sorozatában jelent meg az a stilisztikai ábécé,[3] amely ez idő tájt is értékálló a tiszta fogalomrendszerének, a világos közlésmódjának és a gazdag példatárának köszönhetően. Nem túlzás erről a két évtizedes kötetről az az állítás, miszerint tanítók, tanárok, igényes olvasók hasznos stilisztikai zsebkönyveként is forgatható.

Az 1989–90. tanévet követően egyre inkább természetessé, sőt nélkülözhetetlenné vált a stilisztika problémáival való körültekintő foglalkozás tantervekben, tankönyvekben, irodalom- és magyar nyelvi órákon egyaránt. Mindeközben akadémiai kutatás tárta fel az irodalom- és művészetelméleti fogalmak tanítása, valamint tanulása, majd az ebből a körből megszerzett tudás alkalmazásának a mennyiségi és minőségi színvonalát. Az eredmények egyáltalán nem voltak dicséretesek.[4]

Természetesen a stílussal és a stilisztikával foglalkozó tudományterület is felmutatta a friss kutatások, diskurzusok nyomán bekövetkezett szemléletváltást. Semmiképpen sem belefeledkezve a bőséges kínálatba, csupán érintőlegesen, szemezgetve a sokszínű kínálatból adunk szerény mértékű kínálatot a stílus tudományához kötődő friss, frissebb kötetekből, rendezőelvül a kronológiát választottuk.

---

[1] Zsolnai József 1988: *A nyelvi, irodalmi és kommunikációs nevelési program tananyagterve (tanterve) az 5–8. osztály számára.* Törökbálinti Kísérleti Általános Iskola, Törökbálint – Budapest

[2] H. Tóth István 1993: *A stílus* (Munkáltató tankönyv az általános iskola 8. osztálya számára). Alkotószerkesztő: Zsolnai József. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[3] R. Molnár Emma–Vass László 1989: *Stilisztikai ábécé a magyar nyelv és irodalom tanításához.* Módszertani Közlemények Könyvtára, Szeged

[4] H. Tóth István 1997: *„Az olvasás: fölfedezés" – Egy korosztály irodalomértésének alakulása.* Kandidátusi értekezés. (Témavezető: dr. A. Jászó Anna tanszékvezető főiskolai tanár). MTA Doktori Tanácsa, Budapest