DR. SZALAY ISTVÁN
főiskolai tanár
SZTE JGYPK Tanító- és Óvóképző Intézet
Matematikai Szakcsoport
Szeged

A következetes gondolkodás és a pontosan végzett munka összehangolására való nevelés a matematika eszközeivel

Azt a kérdést, hogy mióta gondolkodik az ember, lehetetlen megválaszolni, hiszen az ember meghatározó attribútuma a gondolkodás. Hasonlóképpen nehéz azt megmondani, hogy mióta végez az ember munkát, mert az embert a munkavégzés alakította ki. Feltűnő viszont a kettő összehangolásának hiánya, a pontos, de értelmetlen munka és a kristálytiszta, de meg nem valósuló ötlet. A nevelés célja e kettő összehangolása, és ez nem is olyan egyszerű. Ezt az összehangolást mutatjuk be néhány példán. Természetesen felvethető, hogy miért éppen a közgondolkodásban bonyolult tudománynak tekintett matematika területét vélem alkalmasnak ilyen példákra? Nos azért, mert a matematika egzaktsága lehetővé teszi a precíz gondolkodást, és kevésbé a „tekintély elv" alapján ad választ egy fáradságos munka elvégzésének szükségességére. Megmagyarázható, hogy mit, miért teszünk

1. A végtelen szakaszos tizedes törtek

Gondolati előkészítés nélkül az **1 : 17** osztás

1 : 17 = 0,0588235294117647	**Maradék: 1**
100	**10**
150	**15**
140	**14**
40	**4**
60	**6**
90	**9**
50	**5**
160	**16**
70	**7**
20	**2**
30	**3**
130	**13**
110	**11**
80	**8**
120	**12**
1	**(Innentől kezdve ismétlődik)**

egy értelmetlen sziszifuszi munka, egy fáradságos algoritmus vég nélküli ismétlése. Másrészt, ha értelmet adunk is a végtelen sok összeadandóból álló (végtelen szakaszos tizedes tört)

$$0+\frac{0}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\frac{5}{10^7}+\frac{2}{10^8}+\frac{9}{10^9}+\frac{4}{10^{10}}+\frac{1}{10^{11}}+\frac{1}{10^{12}}+\frac{7}{10^{13}}+\frac{6}{10^{14}}+\frac{4}{10^{15}}+\frac{7}{10^{16}}+$$

$$+\frac{0}{10^{17}}+\frac{5}{10^{18}}+\frac{8}{10^{19}}+\frac{8}{10^{20}}+\frac{2}{10^{21}}+\frac{3}{10^{22}}+\frac{5}{10^{23}}+\frac{2}{10^{24}}+\frac{9}{10^{25}}+\frac{4}{10^{26}}+\frac{1}{10^{27}}+\frac{1}{10^{28}}+\frac{7}{10^{29}}+\frac{6}{10^{30}}+\frac{4}{10^{31}}+\frac{7}{10^{32}}+$$

$$+\frac{0}{10^{33}}+\frac{5}{10^{34}}+\frac{8}{10^{35}}+\frac{8}{10^{36}}+\frac{2}{10^{37}}+\frac{3}{10^{38}}+\frac{5}{10^{39}}+\frac{2}{10^{40}}+\frac{9}{10^{41}}+\frac{4}{10^{42}}+\frac{1}{10^{43}}+\frac{1}{10^{44}}+\frac{7}{10^{45}}+\frac{6}{10^{46}}+\frac{4}{10^{47}}+\frac{7}{10^{48}}+\ldots$$

összegnek, ugyan ki hiszi el, hogy ezt **17**- tel szorozva az **1** jön ki?

Az **1 : 17** osztás („maradékhoz hozzáveszünk egy 0-át", a „hányadosban a tizedesvessző mögött egyet lépünk jobbra") mechanizmusát még meg tudjuk világítani a szorzás és az összeadás segítségével.

$$1:17=\frac{1}{17}=\frac{100}{17}\cdot\frac{1}{100}=\left(5+\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{1}{100}=0{,}05+\frac{15}{17}\cdot\frac{1}{100}=0{,}05+\frac{150}{17}\cdot\frac{1}{1000}=$$

$$=0{,}05+\left(8+\frac{14}{17}\right)\cdot\frac{1}{1000}=0{,}058+\frac{14}{17}\cdot\frac{1}{1000}=0{,}058+\frac{140}{17}\cdot\frac{1}{10000}=$$

$$=0{,}058+\left(8+\frac{4}{17}\right)\cdot\frac{1}{10000}=0{,}0588+\frac{4}{17}\cdot\frac{1}{10000}=0{,}0588+\frac{40}{17}\cdot\frac{1}{100000}=$$

$$=0{,}0588+\left(2+\frac{6}{17}\right)\cdot\frac{1}{100000}=0{,}05882+\ldots,$$

ami után „beletörődünk" hogy ezt vég nélkül folytassuk. Itt jön az a nevelési feladat, hogy ebbe nem szabad egyszerűen belenyugodni! Különösen a mai korban, a számítógépek korában, nem. Különben a felnövekvő generációk számítógép – vezérelte bio – robottá fognak válni. Természetesen nem a megfigyelés és tapasztalatszerzés eredményeiből való következtetést kell üldözni. (Gondoljunk például arra, hogy az időszámításunk is a természet megfigyeléséből alakult ki. Sokkal előbb keletkezett az év, hónap stb. fogalma annál, hogy felfedeztük volna ezek égi mechanikai lényegét.) Ugyanakkor fejleszteni kell a kritikai szemléletet is! Ha felületesen fogadjuk el az osztási algoritmust, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{l}\underline{1}:(1-x)=1+x+x^2+x^3+\ldots\\ x\\ \quad x^2\\ \qquad x^3\\ \qquad\quad x^4\\ \qquad\qquad .\\ \qquad\qquad\ .\\ \qquad\qquad\quad .\end{array}$$

ahol – úgy tűnik – az x helyébe az 1 kivételével bármit írhatunk. (Az $x = 1$ esetén 0-val osztanánk, aminek a tilalma már a közgondolkodás evidencia-szintjében van.) Ha próbát teszünk az $x=\frac{1}{2}$ esetével, a $2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ eredményt még reálisnak érezhetjük. (Gondoljunk egy 2 egység hosszú teremre, amelynek az egyik végéből a másikba megyünk. Nyilván leszünk félúton (1 egységet tettünk meg). Utána megtesszük a hátralévő út felét ($1+\frac{1}{2}$ egységet tettünk meg.) Ezután jön a hátralévő negyedrésznyi út fele ($1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ egységet tettünk meg.) Így folytatva, mire átérünk, az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ egységnyi utat tesszük meg, ami a terem hossza, azaz 2 egység.) Mi van ha az $x = 2$ behelyettesítésével próbálkozunk? Az ekkor adódó

$$-1 = 1+2+4+8+\ldots$$

eredmény elfogadhatatlan. Osztási algoritmusunk tehát nem megbízható!

Nem véletlen, hogy ehhez hasonló probléma már az ókorban is felvetődött. Az eleai Zenon (i.e. 490? – i.e. 430?) nevéhez fűződik az „Akhilleusz és teknősbéka" néven ismeretes paradoxon (lásd [1], 170. oldal), amely szerint a gyorsabban futó Akhilleusz előnyt ad a nála lassúbb teknősnek, és emiatt sohasem éri utol. A mi szempontunkból itt az a lényeges, hogy mindkettejük által megtett út egy- egy végtelen sok szakaszhosszból álló összeg, aminek a fogalma tisztázásra szorul. A végtelen sok összeadandóból álló összeg (matematikai terminológiával végtelen sor) fogalmát általánosságban Cauchy (1789–1857) francia matematikus értelmezte. (Lásd [1], 704. oldal.) Mi itt, egy ezzel összhangban lévő, de csak a nem negatív összeadandókból álló végtelen összeg értelmezésére szorítkozunk (amely véleményünk szerint középiskolában is tárgyalható.)

Legyen $a_n \geq 0, n = 0,1,2,\ldots$. Értelmezni kívánjuk az $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ végtelen sok összeadandóból álló összeget. Ha csak az „elején" lévő tagokat kívánjuk összeadni, akkor az

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

részletösszeggel nincs gond, mert ez véges sok összeadandóból áll. Kérdés az, hogy mi történik, ha az *n* minden határon túlnő. Ekkor az s_n vagy korlátos (van egy olyan K korlát, hogy minden *n*- re $s_n \leq K$), vagy nem (nem létezik az előbbi tulajdonsággal rendelkező K). A korlátos esetre egy egyszerű példaként az asztal hosszának lemérését említhetjük: Rátéve a méterrudat ez adja az a_0 hosszat, az asztalból kimaradó résznél folytatjuk a deciméterrel (a_1), az ezután kimaradó részt a centiméterrel mérjük (a_2) és így tovább, általában egy végtelen $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ méréssorozathoz jutunk. Az asztal vége nem ér el a szoba végéig, így a kettő között az asztal elejétől vett bármely hosszúság lehet a K. A nem korlátos esetre könnyű példa, ha minden *n* – re $a_n = 1$. Ekkor $s_n = n+1$, ami minden határon túlnő. A végtelen sok összeadandóból álló összeget a korlátos esetre értelmezzük. Nyilvánvaló, hogy ha egy K korlátot találunk, akkor bármely ennél nagyobb szám is korlát. Nem mondhatjuk el ugyanezt a K korlátnál kisebb számokról. Ez vezet el a legkisebb korlát fogalmához. Az *s* számot akkor nevezzük legkisebb korlátnak, ha korlát, de bármely nála kisebb szám már nem az. (Azt, hogy korlátos esetben ilyen *s* létezik, teljességi axiómának nevezzük, de eddig a mélységig a középiskolában nem megyünk el.) Ezt a legkisebb korlátot, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik

(1.1) minden *n* –re $s_n \leq s$

(1.2) ha $L < s$, akkor van olyan *n*, hogy $s_n > L$

tekintjük a végtelen sok összeadandóból álló összegnek. Szemléltetésképpen elmondhatjuk, hogy $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s$, mert akárhány tagot összeadva sem kapunk s – nél nagyobbat, míg elég sok tagot összeadva az s – nél kisebb számok bármelyikét meghaladjuk.

Most nézzük meg, hogy hogyan működik ez az értelmezés az **1:17** osztási algoritmusból kialakult végtelen szakaszos tizedes tört esetében! Áttekintve ennek szerkezetét célszerűnek látszik az s_{16m}, m=1,2,3,... alakú részletösszegek vizsgálata. Mivel nem negatív tagokat adunk össze, ha $16m \le n < 16(m+1)$ akkor $s_{16m} \le s_n < s_{16(m+1)}$ miatt, az $\{s_n\}$ sorozat legkisebb korlátja azonos az $\{s_{16m}\}$ sorozat legkisebb korlátjával. Feladatunk ennek megkeresése. A könnyebb írás kedvéért a $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ írásmódot használva, látjuk, hogy

$$s_{16m} = \sum_{k=0}^{m-1} \Big(\frac{0}{10^{16k+1}} + \frac{5}{10^{16k+2}} + \frac{8}{10^{16+3}} + \frac{8}{10^{16k+4}} + \frac{2}{10^{16k+5}} + \frac{3}{10^{16k+6}} + \frac{5}{10^{16k+7}} =$$

$$+\frac{2}{10^{16k+8}} + \frac{9}{10^{16k+9}} + \frac{4}{10^{16k+10}} + \frac{1}{10^{16k+11}} + \frac{1}{10^{16k+12}} + \frac{7}{10^{16k+13}} + \frac{6}{10^{16k+14}} + \frac{4}{10^{16k+15}} + \frac{7}{10^{16k+16}}\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{10^{16k}} \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{0}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \\ + \frac{2}{10^8} + \frac{9}{10^9} + \frac{4}{10^{10}} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{7}{10^{13}} + \frac{6}{10^{14}} + \frac{4}{10^{15}} + \frac{7}{10^{16}} \end{array} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \Big(\frac{1}{10^{16k}} \cdot 0{,}0588235294117647\Big) = 0{,}0588235294117647 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{10^{16k}}$$

Eddig eljutni is igen éles megfigyelőképesség és pontos munka kellett, de hátra van még az

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{10^{16k}} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{10^{16}}\right)^k, \quad m=1,2,3,\ldots \tag{1.3}$$

sorozat legkisebb korlátjának meghatározása. Bevezetve a $q = \frac{1}{10^{16}}$ jelölést, az (1.3) jobb oldala, a (középiskolában tanult) mértani sorozat tagjait összegző képlet szerint

$$\sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^m}{1 - q}.$$

Az $\frac{1-q^m}{1-q} < \frac{1}{1-q}$ egyenlőtlenségből könnyen látszik, hogy $s = \frac{1}{1-q}$ az (1.3) - ban lévő sorozat korlátja. (Lásd (1.1).) Meg fogjuk mutatni, hogy nála kisebb korlát nincs. Ehhez felhasználjuk a (teljes indukcióval bizonyítható) Bernoulli (1654 – 1705) nevét viselő

$$(1 + x)^n > 1 + nx; \quad -1 < x, \quad x \neq 0, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

egyenlőtlenséget. (Lásd [1], 690. oldal.) Tételezzük fel, hogy van olyan (0<)$L < \frac{1}{1-q}$ szám, hogy minden m –re

(1.4) $$\frac{1-q^m}{1-q} \le L$$

Innen kapjuk, hogy

$$(0<)1 - L(1-q) \le q^m$$

$$\left(\frac{1}{q}\right)^m \le \frac{1}{1-L(1-q)}.$$

Alkalmazva a Bernoulli-egyenlőtlenséget, adódik, hogy

$\left(\frac{1}{q}\right)^m = \left(1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\right)^m > 1+m\left(\frac{1}{q}-1\right)$ minden m=2,3,4,... értékre fennáll. Ekkor ezekre az m értékekre az is teljesül, hogy

$$1+m\left(\frac{1}{q}-1\right) < \frac{1}{1-L(1-q)}$$

$$m < \frac{\frac{1}{1-L(1-q)}-1}{\frac{1}{q}-1}$$

ami lehetetlen, mivel az m minden határon túlnő. E szerint az L –re tett (1.4) feltételezés hamis, tehát van olyan m, amelyre $\frac{1-q^m}{1-q} > L$. Így, az (1.2) és (1.3) alapján kapjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{10^{16k}}$ legkisebb korlátja $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10^{16}}} = \frac{10^{16}}{10^{16}-1}$. Emiatt, az s_{16m} (és vele együtt az s_n) legkisebb korlátja $0{,}0588235294117647 \cdot \frac{10^{16}}{10^{16}-1} = \frac{588235294117647}{9999999999999999}$. Így az **1:17** osztás algoritmusából kapott végtelen tizedes törtre

$$0{,}\overline{0588235294117647} = \frac{588235294117647}{9999999999999999}$$

adódott. Ez lenne az $\frac{1}{17}$? Nos, ezt ellenőrizhetjük az

588235294117647 • 17
<u>4117647058823529</u>
9999999999999999

szorzás elvégzésével. Így, $\dfrac{588235294117647}{9999999999999999} = \dfrac{588235294117647}{588235294117647 \cdot 17}$. Végül a 588235294117647- tel való egyszerűsítés adja

$$0,\overline{0588235294117647} = \frac{1}{17}.$$

Ezzel igazoltuk az **1:17** osztás algoritmusát!

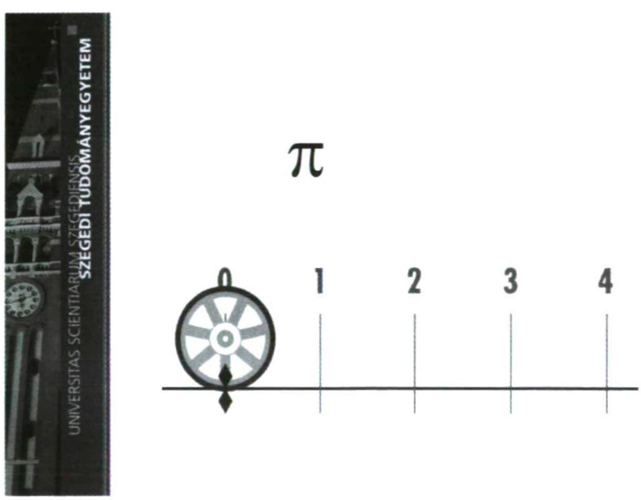
2. Végtelen (nem szakaszos) tizedes törtek

Jól ismert, hogy az irracionális számok tizedes tört alakjai végtelen nem szakaszos tizedes törtek, amelyek szintén végtelen sok összeadandóból álló összegek. (Ezek értelmezését az 1. pontban láttuk.) Közülük egyik legnevezetesebb a π, amelynek definíciója

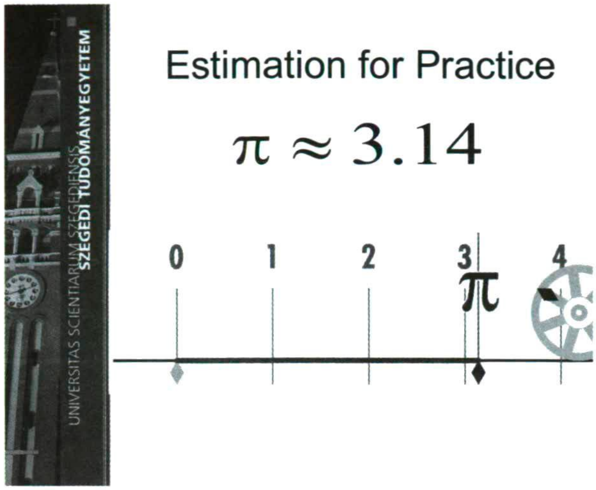
(2.1) $\pi =$ Az egységnyi átmérőjű kör kerülete

és amelyet a közgondolkodás a **3,14** értéken tart számon. (Mivel a körök egymáshoz hasonlóak, ezért bármely *r* sugarú kör kerületét ($2r\pi$) osztva az átmérőjével ($2r$) a π adódik.) Természetesen, ez csak közelítő érték, hiszen a $\pi = 3{,}14 = \dfrac{314}{100}$ azt jelentené, hogy a π racionális szám, ami nem igaz! Itt fel kell oldani azt az ellentmondást, hogy akkor miért használjuk a köztudatban a 3,14 értéket? Fontos tudatosítani, hogy itt csak közelítésről van szó, amelyet „kezelni" lehet.

Tekintve egy egységnyi átmérőjű kört, (kerülete éppen π) a π közelítő értékét jól szemléltethetjük a következő ábrákkal



ahol a számegyenesen gördülő kör jelzett pontjának első leérkezését kell figyelnünk:



A π további számjegyeinek keresését már az iskolában használatos kalkulátorral végezzük. Kalkulátorunk (CASIO *fx-570ES*) azt mondja, hogy

(2.2) $$\pi = 3{,}141592654$$

ami (a (2.1) definíciót közelítő 3,14 becsléshez hasonlóan) hamis, hiszen $\pi = \dfrac{3141592654}{1000000000}$ is azt jelentené, hogy a π racionális szám. Ekkor, vagy

(2.3) $$\pi < 3{,}141592654.$$

vagy

(2.4) $$\pi > 3{,}141592654.$$

Melyik a helyes a (2.3) és a (2.4) közül? Íme, egy éles kérdés! Például, az 1 és 2 forintos pénzérmék forgalomból való kivonása miatt, amikor a boltban fizetünk, legfeljebb 5 forintos pénzérmével számolhatunk: ha az összeg 1 vagy 2, illetve 8 vagy 9 forintra végződik, helyébe a 0, illetve 10 forint, ha 3, 4, 6 vagy 7 forintra végződik, akkor helyébe 5 forint kerül. Már észre sem vesszük, hogy nem a pontos összeget fizetjük ki. Nem baj, ha ezt – a fenti ok miatt- tudatosan tesszük. Ha viszont az 1 és 2 forintos pénzérmék is használatban vannak, akkor ez a fajta „kerekítés" már csalásnak minősül.

Induljunk ki abból, hogy a (2.2) jobb oldalán lévő utolsó számjegy, a „4" a kalkulátor által kerekített érték. E szerint

(2.5) $$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926544\,.$$

Mivel

$$3{,}1415926535 < 3{,}141592654 < 3{,}1415926544,$$

érvényes a

(2.6) $$|\pi - 3{,}141592654| < 9 \cdot 10^{-10} < 10^{-9}$$

approximáció. Továbbá, a (2.5) alapján

$$314159265{,}35 < 10^8 \cdot \pi < 314159265{,}44$$

így

$$0{,}35 < 10^8 \cdot \pi - 314159265 < 0{,}44 .$$

A kalkulátor azt is megadja, hogy

$$10^8 \cdot \pi - 314159265 = 0{,}35898 \; ,$$

ahol a jobb oldalon lévő utolsó számjegy, a „8" ugyancsak kerekített, tehát

$$0{,}358975 < 10^8 \cdot \pi - 314159265 < 0{,}358984 .$$

Innen,

$$314159265{,}358975 < 10^8 \cdot \pi < 314159265{,}358984$$

ezért

$$3{,}14159265358975 < \pi < 3{,}14159265358984.$$

Mivel

$$3{,}14159265358975 < 3{,}1415926535898 < 3{,}14159265358984$$

adódik

(2.7) $$|\pi - 3{,}1415926535898| < 9 \cdot 10^{14} < 10^{-13} .$$

teljesül.

A (2.6) még nem elegendő a kérdés megválaszolásához, de a (2.7) már igen:

$$\pi = (\pi - 3{,}1415926535898) + 3{,}1415926535898 \le$$
$$\le |\pi - 3{,}1415926535898| + 3{,}1415926535898 <$$
$$< 10^{-13} + 3{,}1415926535898 = 3{,}1415926535899 < 3{,}141592654$$

azaz, a (2.3) a helyes.

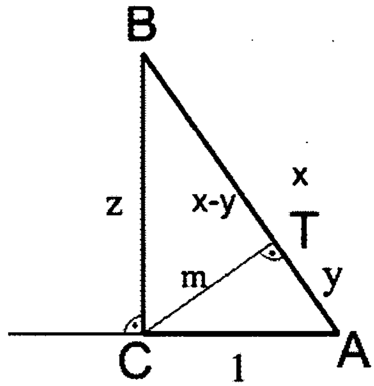
3. Osztás irracionális számmal

Valljuk be, hogy még a természettudományi (nem matematikusi vagy matematika tanári) oklevéllel rendelkező emberek is a „Mi az $\frac{1}{\pi}$?" kérdésre az evidencia-szintjükből előkapva a számológépüket legfeljebb a

(3.1) $$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183098862$$

választ adják, miközben nem is gondolnak arra, hogy az $\frac{1}{\pi}$ szimbólum jelent-e egyáltalán valamit. Hétköznapi vitáinkban gyakran előfordul, a „Tudja egyáltalán, hogy miről beszél?" kérdés. Itt éppen egy matematikai példa alapján döbbenünk rá ennek jogosságára.

Ismét értelmezési probléma előtt állunk! Próbáljuk meg értelmezni az $x \neq 0$ valós szám reciprokát! Az $1 < x$ speciális esetben – geometriai ismereteinkre alapozva – tekintsük az alábbi (Thalesz-körrel megszerkeszthető) ábrát:



A területekkel való okoskodással (elkerülve a derékszögű háromszögre vonatkozó arányossági tételek alkalmazását) igazolható Pitagorász-tétel többszöri alkalmazásával kideríthetjük, hogy a TA szakasz hosszára teljesül, hogy $x \cdot y = 1$. (Lásd [2], 151-153. old.) Innen, az y értelmezése (mint olyan számé, amelyet az x-szel szorozva 1-et kapunk) az $y = \frac{1}{x}$. Ha már a reciprokot értelmeztük, akkor az ókori görög matematikusok példáját követve, a valós számok szorzását a téglalap területének mértékszámára vezetjük vissza, és működik a $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}; a(\neq 0), b \in R$ definíció. Ekkor például, a $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ tört esetében a következő lépéseket tesszük

1. Előállítjuk a π hosszúságú szakaszt az 1 átmérőjű kör gurításával. (Lásd 2. pont.)
2. Előállítjuk az $\frac{1}{\pi}$ hosszúságú szakaszt a fenti ábra alapján.
3. Előállítjuk a $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszt az egységnyi oldalú négyzet átlójaként.
4. Téglalapot szerkesztünk az $\frac{1}{\pi}$ és a $\sqrt{2}$ hosszúságú oldalakkal.

A kalkulátor által adott

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}4501581581 \tag{3.2}$$

Az előbbi eljárás 4. lépésben kapott téglalap területének közelítő értéke. A 2. pontban megismert approximációs eljárással mind a (3.1), mind a (3.2) további jegyeit tárhatjuk fel.

IRODALOM

[1] Sain Márton: Nincs királyi út! (Matematikatörténet) Gondolat Kiadó, Budapest, 1986, ISBN 963 281 7044.

[2] Krisztin Német István: Megjegyzés a valós számok tanítóképzésbeli oktatásához, OTE Tükörkép, 2009, Kiadta az Óvó- és Tanítóképzők Egyesülete, Baja, 149-164, ISSN 1589-1488.