Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei

Von T. GALLAI in Budapest (Ungarn) und A. N. MILGRAM in Minneapolis (U. S. A.)

Ladislaus Rédei zum 60. Geburtstag

1. Es sei M eine nichtleere endliche Menge, und es bezeichne M_2 die Menge sämtlicher ungeordneter Paare, die man aus *verschiedenen* Elementen von M bilden kann. Die Elemente von M nennen wir *Punkte,* diejenigen von M_2 *Kanten.* Die durch die Punkte P und P' bestimmte Kante wollen wir mit PP' oder $P'P$ bezeichnen und sagen, daß PP' zu den Punkten P und P' *inzident* ist, sowie daß PP' die Punkte P und P' *verbindet.* Es sei N eine beliebige Teilmenge von M_2 $(N \subseteq M_2)$. Wir sagen: M und N bestimmen gemeinsam den *Graphen* $\Gamma = (M, N)$. Ist $M_2 = N$, so heißt Γ *vollständig.* Der Ausdruck „P und P' sind *unabhängig* in $\Gamma = (M, N)$“ soll bedeuten: $P' \neq P$; $P, P' \in M$; $PP' \notin N$. Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$[1]) *sind unabhängig in* Γ, wenn $P_1, \ldots, P_n$ Punkte von Γ sind und sie im Falle $n > 1$ paarweise unabhängig in Γ sind. Der Ausdruck $p_{\max}(\Gamma)$ soll *die maximale Anzahl der unabhängigen Punkte in* Γ bezeichnen, d. h. $p_{\max}(\Gamma) = k$ bedeutet: es gibt in Γ k unabhängige Punkte, $k+1$ jedoch nicht.

Wir *richten* eine Kante PP' dadurch, daß wir den einen Punkt der Kante als *Anfangspunkt,* den anderen als *Endpunkt* auszeichnen. Je nachdem ob P oder P' der Anfangspunkt ist, soll $\overrightarrow{PP'}$ bzw. $\overrightarrow{P'P}$ das Zeichen der *gerichteten* Kante sein. Richtet man in irgendeiner Weise jede Kante eines Graphen Γ, so entsteht ein *gerichteter* Graph $\vec{\Gamma}$. (Das Zeichen Γ bzw. $\vec{\Gamma}$, auch mit Index versehen, soll immer einen ungerichteten bzw. gerichteten Graphen bedeuten. Einen Graphen, der keine Kante enthält, können wir auch als gerichteten Graphen betrachten.) Sind $P_1, \ldots, P_n$ unabhängig in Γ, so nennen wir sie auch in $\vec{\Gamma}$ unabhängig. Es gilt $p_{\max}(\vec{\Gamma}) = p_{\max}(\Gamma)$.

Enthält $\vec{\Gamma}$ die Kanten $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, m)$, und sind die Punkte $P_1, \ldots, P_{m+1}$ verschieden, so sagen wir, daß diese Kanten eine *Bahn*

---

[1]) Der Ausdruck $e_m, \ldots, e_n$, wo m und n ganze Zahlen mit $m \leqq n$ bezeichnen, soll im Falle $m = n$ das einzige Element e_m bedeuten.

$b=(P_1, \ldots, P_{m+1})$ von $\vec{\Gamma}$ bilden. Wir wollen auch einen beliebigen Punkt P_1 von $\vec{\Gamma}$ in sich selbst als eine Bahn $b=(P_1)$ von $\vec{\Gamma}$ betrachten. Der Punkt P_1 heißt der Anfangspunkt von $b=(P_1, \ldots, P_{m+1})$ bzw. $b=(P_1)$. Haben die Bahnen $b_1, \ldots, b_n$ von $\vec{\Gamma}$ die Eigenschaft, daß jeder Punkt von $\vec{\Gamma}$ in mindestens einer dieser Bahnen vorkommt, so sagen wir, daß $b_1, \ldots, b_n$ den Graphen $\vec{\Gamma}$ *bedecken*, oder daß das „Bahnsystem" $S=\{b_1, \ldots, b_n\}$ $\vec{\Gamma}$ bedeckt. Die Behauptung „in $\vec{\Gamma}$ ist die minimale Anzahl der bedeckenden Bahnen gleich k" soll bedeuten: Es existieren in $\vec{\Gamma}$ k solche Bahnen, die $\vec{\Gamma}$ bedekken, weniger als k jedoch nicht.

Sind P und P' Punkte von $\vec{\Gamma}$ und existiert in $\vec{\Gamma}$ keine Bahn, die die beiden Punkte P und P' enthält, so sagen wir: P un P' sind *bahnunabhängig* in $\vec{\Gamma}$. $P_1, \ldots, P_n$ sind dann bahnunabhängig in $\vec{\Gamma}$, wenn sie Punkte von $\vec{\Gamma}$ sind und sie im Falle $n>1$ paarweise bahnunabhängig in $\vec{\Gamma}$ sind. „Die maximale Anzahl der bahnunabhängigen Punkte in $\vec{\Gamma}$ ist k" bedeutet: Es gibt in $\vec{\Gamma}$ k solche Punkte, die in $\vec{\Gamma}$ bahnunabhängig sind, $k+1$ jedoch nicht. Sind $P_1, \ldots, P_n$ bahnunabhängig in $\vec{\Gamma}$, so sind sie auch unabhängig in $\vec{\Gamma}$.

Ist $b=(P_1, \ldots, P_n)$ $(n \geqq 3)$ eine Bahn von $\vec{\Gamma}$ und enthält $\vec{\Gamma}$ auch die Kante $\overrightarrow{P_n P_1}$, so bilden die Kanten $\overrightarrow{P_1 P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_{n-1} P_n}, \overrightarrow{P_n P_1}$ einen in $\vec{\Gamma}$ liegenden *Kreis*. Enthält der Graph $\vec{\Gamma}$ keinen Kreis, so heißt er *azyklisch*.

Der Graph Γ' ist ein *Teilgraph* von Γ, wenn jeder Punkt und jede Kante von Γ' auch Punkt bzw. Kante von Γ ist. Die gleiche Bedeutung hat die Behauptung, daß $\vec{\Gamma}'$ ein Teilgraph von $\vec{\Gamma}$ ist.

2. Mit den im Abschnitt 1 eingeführten Begriffen kann man nun den im Titel erwähnten Rédeischen Satz folgendermaßen formulieren ([4], S. 30; [5]):

(2. 1) (Rédei) *Richtet man die Kanten eines vollständigen Graphen in beliebiger Weise, so enthält der entstehende gerichtete Graph immer eine Bahn, die den Graphen bedeckt.*[2])

Die Voraussetzung, daß der Graph Γ vollständig ist, kann man auch durch $p_{\max}(\Gamma)=1$ ausdrücken. Diese Formulierung ermöglicht folgende Verallgemeinerung von (2. 1).

(2. 2) Satz. *Gilt für Γ $p_{\max}(\Gamma)=k$ und richtet man die Kanten von Γ in beliebiger Weise, so enthält der entstehende gerichtete Graph immer k oder weniger als k solche Bahnen, die den Graphen bedecken.*

---

[2]) In [5] beweist Rédei eine wesentlich tiefere Behauptung. Er zeigt, daß die Anzahl derjenigen Bahnen des in (2. 1) vorkommenden gerichteten Graphen, die in sich allein den Graphen bedecken, ungerade ist.

Wir wollen bemerken: Ist $p_{\max}(\Gamma)=k$, so kann man die Kanten von Γ so richten, daß der entstehende Graph $\vec{\Gamma}$ nicht durch weniger, als k Bahnen von $\vec{\Gamma}$ bedeckt werden kann. Um eine solche Richtung der Kanten durchzuführen, wähle man k solche Punkte, die in Γ unabhängig sind und richte sämtliche mit den ausgewählten Punkten inzidente Kanten von Γ in solcher Weise, daß die ausgewählten Punkte die Anfangspunkte dieser Kanten werden.

(2. 2) wollen wir auf den folgenden Satz zurückführen:

(2. 3) Satz. *Ist $\vec{\Gamma}$ azyklisch, so ist die maximale Anzahl der bahnunabhängigen Punkte in $\vec{\Gamma}$ gleich der minimalen Anzahl der bedeckenden Bahnen.*

(Wir bemerken: Die Voraussetzung, daß $\vec{\Gamma}$ azyklisch ist, ist wesentlich.)

Den Satz (2. 3), den wir 1947 gefunden haben[3]), dürfen wir als bewiesen betrachten. Man kann nämlich leicht sehen (diese Ausführungen wollen wir hier unterlassen), daß (2. 3) eine einfache Folge des nachfolgenden Dilworthschen Satzes (2. 4) ist. ([2]. Auch (2. 4) ist eine unmittelbare Folge von (2. 3).)

(2. 4) (Dilworth) *Kann man aus der halbgeordneten endlichen Menge H k paarweise unvergleichbare Elemente auswählen, $k+1$ aber nicht, so kann man H in k paarweise fremde Ketten zerlegen.* (Eine Kette ist eine solche Teilmenge von H, deren Elemente paarweise vergleichbar sind.)[4])

Um (2. 2) auf (2. 3) zurückzuführen, genügt es zu zeigen, daß ein Graph $\vec{\Gamma}$ mit $p_{\max}(\vec{\Gamma})=k$ einen solchen azyklischen Teilgraphen $\vec{\Gamma}_1$ besitzt, der jeden Punkt von $\vec{\Gamma}$ enthält und in dem die maximale Anzahl der bahnunabhängigen Punkte nicht größer als k ist. Nehmen wir nun an, daß für $\vec{\Gamma}$ $p_{\max}(\vec{\Gamma})=k$ gilt, und bezeichnen wir mit G die Menge derjenigen Teilgraphen von $\vec{\Gamma}$, die azyklisch sind und die jeden Punkt von $\vec{\Gamma}$ enthalten. G ist nicht leer. Derjenige Teilgraph nämlich, der jeden Punkt von $\vec{\Gamma}$ enthält und keine Kante besitzt, ist ein Element von G. Nennen wir nun ein Element $\vec{\Gamma}_i$ von G *maximal*, wenn kein Element von G ein echter Teilgraph von $\vec{\Gamma}_i$ ist. G enthält maximale Elemente. Es sei $\vec{\Gamma}_1$ ein solches Element und $P_1, \ldots, P_h$ seien beliebige, in $\vec{\Gamma}_1$ bahnunabhängige Punkte. Um zu zeigen, daß $\vec{\Gamma}_1$ ein gewünschter Teilgraph von $\vec{\Gamma}$ ist, brauchen wir nur die Ungleichung $h \leqq k$ beweisen. Nehmen wir nun an, daß $h>k$ ist. Dann existiert in $\vec{\Gamma}$ eine Kante, die zwei Punkte der Menge $\{P_1, \ldots, P_h\}$ verbindet. Gehöre z. B. $\overrightarrow{P_1P_2}$ zu $\vec{\Gamma}$.

---

[3]) Dieser Satz wurde nicht publiziert.

[4]) In [2] beweist Dilworth (2. 4) auch auf unendliche Mengen.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ kann nicht in $\vec{\Gamma}_1$ liegen. Fügen wir $\overrightarrow{P_1P_2}$ zu $\vec{\Gamma}_1$, so muß wegen der Maximalität von $\vec{\Gamma}_1$ der entstehende Graph einen Kreis c enthalten. Da $\vec{\Gamma}_1$ azyklisch war, muß c $\overrightarrow{P_1P_2}$ enthalten. Lassen wir nun $\overrightarrow{P_1P_2}$ aus c weg, so bilden die zurückbleibenden Kanten von c eine Bahn von $\vec{\Gamma}_1$, die sowohl P_1 als auch P_2 enthält. Das widerspricht jedoch der Annahme, daß P_1 und P_2 in $\vec{\Gamma}_1$ bahnunabhängig sind.

3. Die im Satz (2. 4) vorkommenden Ketten haben paarweise kein gemeinsames Element. Von den in (2. 3) vorkommenden Bahnen kann man im allgemeinen nicht fordern, daß sie paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten sollen. Man kann aber diese Forderung bei (2. 2) stellen:

(3. 1) Satz. *Ist für Γ $p_{\max}(\Gamma)=k$ und richtet man die Kanten von Γ in beliebiger Weise, so enthält der entstehende gerichtete Graph $\vec{\Gamma}$ immer k oder weniger als k solche Bahnen, die $\vec{\Gamma}$ bedecken und paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten.*

Es ist uns nicht gelungen, diesen Satz auf (2. 2) bzw. (2. 3) zurückzuführen. Wir werden jetzt für (3. 1) einen von (2. 2), (2. 3) und (2. 4) unabhängigen Beweis geben. Wir bemerken, daß sich dadurch ein neuer Beweis für (2. 4) (und demzufolge auch für (2. 3)) ergibt. (2. 4) ist nämlich eine einfache Folge von (3. 1). (Auf diese Tatsache hat uns R. Rado aufmerksam gemacht.)

Wir führen einige neue Bezeichnungen ein: Ist $\vec{\Gamma}$ ein beliebiger gerichteter Graph, so soll $\pi(\vec{\Gamma})$ die Anzahl der Punkte von $\vec{\Gamma}$ bezeichnen. Ist S ein Bahnsystem, so bezeichne $\nu(S)$ die Anzahl der Elemente von S und $A(S)$ die Menge der Anfangspunkte der zu S gehörigen Bahnen. Bedeckt ferner das Bahnsystem S den Graphen $\vec{\Gamma}$ und haben je zwei Bahnen von S keinen gemeinsamen Punkt, so wollen wir S ein *zu $\vec{\Gamma}$ passendes* Bahnsystem nennen. Wir legen erst fest:

(3. 2) *Jeder Graph $\vec{\Gamma}$ enthält ein zu $\vec{\Gamma}$ passendes Bahnsystem.*

Ein solches System bekommt man im jedem Falle dadurch, daß man jeden Punkt von $\vec{\Gamma}$ als eine selbständige Bahn betrachtet und die Menge sämtlicher solcher Bahnen bildet.

Wir werden nun (3. 1) dadurch beweisen, daß wir die Richtigkeit des nachfolgenden Satzes (3. 3) zeigen. ((3.2) und (3. 3) sagen gemeinsam etwas mehr aus, als (3.1).)

(3. 3) Satz. *Gilt für $\vec{\Gamma}$ $p_{\max}(\vec{\Gamma})=k$ und ist S ein beliebiges zu $\vec{\Gamma}$ passendes Bahnsystem, so gibt es ein zu $\vec{\Gamma}$ passendes Bahnsystem S^* mit $\nu(S^*)\leqq k$ und $A(S^*)\subseteq A(S)$.*

Beweis. (1) Die Behauptung von (3. 3) ist trivial, falls $\pi(\vec{\Gamma})=1$ ist. Nehmen wir an, daß sie für jeden solchen Graphen richtig ist, der weniger als n $(n>1)$ Punkte enthält und es bezeichne jetzt $\vec{\Gamma}$ einen Graphen mit $\pi(\vec{\Gamma})=n$. Wir zeigen, daß unser Satz auch für $\vec{\Gamma}$ gilt. Es sei $p_{\max}(\vec{\Gamma})=k$ und S ein beliebiges zu $\vec{\Gamma}$ passendes Bahnsystem.

(2) Wir beweisen erst, daß es ein zu $\vec{\Gamma}$ passendes System S' mit $\nu(S')\leqq k+1$ und $A(S')\subseteq A(S)$ gibt. Ist $\nu(S)\leqq k+1$, so kann man $S'=S$ setzen. Ist $\nu(S)>k+1$, so sei b eine beliebige Bahn von S und es bezeichne $\vec{\Gamma}_1$ denjenigen Teilgraphen von $\vec{\Gamma}$, der aus $\vec{\Gamma}$ durch die Weglassung der Punkte von b und der zu diesen Punkten inzidenten Kanten entsteht. Es gilt $\pi(\vec{\Gamma}_1)<n$ und $p_{\max}(\vec{\Gamma}_1)\leqq k$. Das Bahnsystem $S_1=S-\{b\}$ ist ein zu $\vec{\Gamma}_1$ passendes System. Nach (1) gibt es dann ein zu $\vec{\Gamma}_1$ passendes System S_2 mit $\nu(S_2)\leqq k$ und $A(S_2)\subseteq A(S_1)$. Das System $S'=S_2\cup\{b\}$ paßt aber zu $\vec{\Gamma}$ und es gilt $\nu(S')\leqq k+1$ und $A(S')\subseteq A(S)$.

(3) Jetzt zeigen wir, daß ein zu $\vec{\Gamma}$ passendes S^* mit $\nu(S^*)\leqq k$ und $A(S^*)\subseteq A(S)$ existiert. Gilt für den unter (2) definierten S' $\nu(S')\leqq k$, so kann man $S^*=S'$ setzen. Nehmen wir nun an, daß $\nu(S')=k+1$ ist. Es sei $S'=\{b_1,\dots,b_{k+1}\}$ und es bezeichne P_i den Anfangspunkt von b_i $(i=1,\dots,k+1)$. Da $p_{\max}(\vec{\Gamma})=k$ ist, gibt es eine Kante von $\vec{\Gamma}$, die zwei Punkte von $A(S')=\{P_1,\dots,P_{k+1}\}$ verbindet. Es sei z. B. $\overrightarrow{P_1P_2}$ eine Kante von $\vec{\Gamma}$.

Besteht b_1 nur aus dem einzigen Punkt P_1, so füge man $\overrightarrow{P_1P_2}$ zu b_2. Die so entstehende Bahn bildet dann mit den von b_1 verschiedenen Bahnen von S' ein gewünschtes System S^*.

Enthält b_1 außer P_1 noch weitere Punkte, so bezeichne b_1' diejenige Bahn, die aus b_1 durch Weglassung der zu P_1 inzidenten Kante $\overrightarrow{P_1P_1'}$ von b_1 entsteht. (P_1' ist der Anfangspunkt von b_1'.) Es bezeichne ferner $\vec{\Gamma}_2$ denjenigen Teilgraphen von $\vec{\Gamma}$, der aus $\vec{\Gamma}$ durch Weglassung von P_1 und der zu P_1 inzidenten Kanten von $\vec{\Gamma}$ entsteht. Es gilt $\pi(\vec{\Gamma}_2)<n$ und $p_{\max}(\vec{\Gamma}_2)\leqq k$. Es ist weiter $S_3=\{b_1',b_2,\dots,b_{k+1}\}$ ein zu $\vec{\Gamma}_2$ passendes System. Nach (1) existiert ein zu $\vec{\Gamma}_2$ passendes $\bar{S}=\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_h\}$ mit $h\leqq k$ und $A(\bar{S})\subseteq A(S_3)=$ $=\{P_1',P_2,\dots,P_{k+1}\}$.

Ist $P_1'\in A(\bar{S})$ und ist z. B. P_1' der Anfangspunkt von $\bar{b}_1$, so füge man $\overrightarrow{P_1P_1'}$ zu $\bar{b}_1$. Die so entstehende Bahn bildet dann mit den von $\bar{b}_1$ verschiedenen Bahnen von $\bar{S}$ ein gesuchtes System S^*.

Ist $P_1'\notin A(\bar{S})$ und $h<k$, so bilden die Bahnen von $\bar{S}$ zusammen mit der Bahn $b^*=(P_1)$ ein gewünschtes S^*.

Ist endlich $P_1' \notin A(\bar{S})$ und $h=k$, so gilt $A(\bar{S})=\{P_2, \ldots, P_{k+1}\}$. Ist z. B. P_2 der Anfangspunkt von $\bar{b}_1$, so füge man $\overrightarrow{P_1 P_2}$ zu $\bar{b}_1$. Die so entstehende Bahn bildet dann mit den von $\bar{b}_1$ verschiedenen Bahnen von $\bar{S}$ ein gewünschtes S^*.

Literaturverzeichnis

[1] G. B. Dantzig and A. J. Hoffman, Dilworth's theorem on partially ordered sets, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Math. Studies*, **38** (1956), 215—221.

[2] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.*, **51** (1950), 161—166.

[3] T. Gallai, Maximum-Minimum Sätze über Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 395—434.

[4] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[5] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz, *Acta Sci. Math.*, **7** (1934), 39—43.

[6] T. Szele, Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban, *Math. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 223—254.

(Eingegangen am 29. Januar 1960)