Hallgruppen mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem

Von RUDOLF KOCHENDÖRFFER in Rostock (Deutschland)

Ladislaus Rédei zum 60. Geburtstag

Besitzt in der Nebenklassenzerlegung

$$\mathfrak{G} = \sum_{R \in \mathfrak{R}} \mathfrak{U} R$$

der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach ihrer Untergruppe $\mathfrak{U}$ das Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft:

$$U^{-1} \mathfrak{R} U = \mathfrak{R} \quad \text{für jedes } U \text{ aus } \mathfrak{U},$$

so wird $\mathfrak{R}$ ein *ausgezeichnetes* Repräsentantensystem genannt. Auf Untergruppen, die ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem besitzen, wird man bei Untersuchungen über den Schurschen Multiplikator geführt [3]. Jedoch scheint dieser Begriff auch für allgemeine Strukturuntersuchungen einige Bedeutung zu besitzen. So hat z. B. kürzlich G. ZAPPA [4] unter Benutzung dieses Begriffes einen wohlbekannten Satz von BURNSIDE wesentlich verallgemeinert. Zweck der vorliegenden Note ist es, den Begriff des ausgezeichneten Repräsentantensystems zu anderen gruppentheoretischen Begriffen in Verbindung zu setzen. So zeigt sich, daß nilpotente Untergruppen mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem im Sinne von D. G. HIGMAN [2] *hyperfokal* sind. Infolgedessen läßt sich der Satz von ZAPPA unmittelbar aus einem Satz von HIGMAN folgern. Diese Überlegungen beziehen sich auf nilpotente Hallgruppen. Es ist unbekannt, ob ein analoger Satz auch für auflösbare Hallgruppen richtig ist. Daher sollen weiter einige zusätzliche Bedingungen angegeben werden, die eine Übertragung auf den Fall auflösbarer Hallgruppen ermöglichen.

Sämtliche im folgenden betrachteten Gruppen sind endlich.

I

Unter einer *Hallgruppe* der Gruppe $\mathfrak{G}$ versteht man eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung $|\mathfrak{H}|$ zu ihrem Index $[\mathfrak{G}:\mathfrak{H}]$ teilerfremd ist. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von BURNSIDE ist folgender

Satz von Zappa. *Besitzt die nilpotente Hallgruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in $\mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}=1$.*

Der Beweis von ZAPPA stützt sich auf eine Arbeit von R. BAER [1]. Wir wollen diesem Satz aus einem Ergebnis von HIGMAN herleiten.

Für eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ betrachte man die *Fokalreihe* $\mathfrak{U}\geqq\mathfrak{U}_1\geqq\mathfrak{U}_2\geqq\dots$ von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$, die nach HIGMAN folgendermaßen definiert wird: $\mathfrak{U}_0=\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}_{i+1}=$ Erzeugnis aller in $\mathfrak{U}_i$ gelegenen Kommutatoren $U_i G U_i^{-1} G^{-1}$ mit $U_i\in\mathfrak{U}_i$, $G\in\mathfrak{G}$. Wird einmal $\mathfrak{U}_k=1$, so nennt man $\mathfrak{U}$ *hyperfokal* in $\mathfrak{G}$. Jede hyperfokale Untergruppe ist nilpotent. Ein wichtiges Ergebnis der Arbeit [2] ist der

Satz von Higman. *Ist $\mathfrak{H}$ eine hyperfokale Hallgruppe in $\mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}=1$.*

Es sei nun $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$. Für jedes $U\in\mathfrak{U}$ und jedes $R\in\mathfrak{R}$ gilt also $RU=UR_1$ mit $R_1\in\mathfrak{R}$. Um die Glieder der Fokalreihe von $\mathfrak{U}$ zu bestimmen, hat man die Kommutatoren $U_i G U_i^{-1} G^{-1}$ mit $U_i\in\mathfrak{U}_i$, $G\in\mathfrak{G}$ zu betrachten. Setzt man $G=UR$ mit $U\in\mathfrak{U}$, $R\in\mathfrak{R}$, so wird, weil $\mathfrak{R}$ ausgezeichnet ist,

$$U_i G U_i^{-1} G^{-1}=U_i U R U_i^{-1} R^{-1} U^{-1}=U_i U U_i^{-1} U^{-1} R_1 R_2^{-1}$$

mit $R_1, R_2\in\mathfrak{R}$. Dieser Kommutator liegt genau dann in $\mathfrak{U}_i$ wenn $R_1=R_2$ ist. Also wird $\mathfrak{U}_{i+1}$ von allen Kommutatoren $U_i U U_i^{-1} U^{-1}$ mit $U_i\in\mathfrak{U}_i$, $U\in\mathfrak{U}$ erzeugt. Das bedeutet aber: $\mathfrak{U}_i$ ist das i-te Glied der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{U}$. Insbesondere ergibt sich:

Ist $\mathfrak{U}$ eine nilpotente Untergruppe mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem, so ist $\mathfrak{U}$ hyperfokal.

Mithin folgt der Satz von ZAPPA aus dem Satz von HIGMAN.

Ist umgekehrt $\mathfrak{H}$ eine hyperfokale Hallgruppe, so besitzt $\mathfrak{H}$ nach dem Satz von HIGMAN ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, nämlich den Normalteiler $\mathfrak{N}$. Damit ist festgestellt:

Eine nilpotente Hallgruppe besitzt dann und nur dann ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, wenn sie hyperfokal ist.

Insbesondere besitzt eine Sylowgruppe genau dann ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, wenn sie hyperfokal ist. Weiter ergibt sich aus der Arbeit von HIGMAN: Dann und nur dann ist $\mathfrak{G}$ nilpotent, wenn jede Sylowgruppe ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem besitzt.

II

Es ist unbekannt, ob der Satz von ZAPPA richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung, daß $\mathfrak{H}$ nilpotent ist, durch eine schwächere ersetzt. Wir werden im folgenden von $\mathfrak{H}$ nur Auflösbarkeit voraussetzen, dafür aber an das ausgezeichnete Repräsentantensystem zusätzliche Forderungen stellen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine auflösbare Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$. Jedes Element aus $\mathfrak{R}$ lasse sich als Produkt solcher Elemente darstellen, deren Ordnungen zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd sind. Dann gibt es in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}=1$.*

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $[\mathfrak{G}:\mathfrak{H}]=n$, bezeichnen die Elemente aus $\mathfrak{R}$ mit $R_1,\ldots R_n$ und haben dann

$$\mathfrak{G}=\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{H}R_\nu.$$

Für ein Element

$$G=HR_\nu \qquad (H\in\mathfrak{H},\ R_\nu\in\mathfrak{R})$$

setzen wir $\underline{G}=H$. Dann läßt sich die Verlagerung $v(X)$ eines Elementes X aus $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ folgendermaßen schreiben:

$$v(X)=\mathfrak{H}'\prod_{\nu=1}^{n}\underline{R_\nu X},$$

wobei $\mathfrak{H}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ bedeutet. Da $\mathfrak{R}$ ausgezeichnet ist, wird für ein Element H aus $\mathfrak{H}$

$$R_\nu H=HR_{\nu'} \qquad (\nu=1,\ldots,n)$$

mit $R_{\nu'}\in\mathfrak{R}$, d. h. $\underline{R_\nu H}=H$. Folglich ist

$$v(H)=\mathfrak{H}'H^n.$$

Da n zur Ordnung $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd ist, treten sämtliche Nebenklassen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}'$ als Werte $v(H)$ mit passenden $H\in\mathfrak{H}$ auf, und genau für die Elemente H' aus $\mathfrak{H}'$ wird $v(H')=\mathfrak{H}'$.

Diejenigen Elemente aus $\mathfrak{G}$, die bei der Verlagerung auf $\mathfrak{H}'$ abgebildet werden, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$. Nach dem oben Bemerkten ist

$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}\frown\mathfrak{G}_1=\mathfrak{H}'$. Da sich jedes Element aus $\mathfrak{N}$ als Produkt solcher Elemente darstellen läßt, deren Ordnungen zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd sind, und da die Verlagerung eine homomorphe Abbildung auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ darstellt, wird $v(R_\nu)=\mathfrak{H}'$ für jedes $R_\nu\in\mathfrak{N}$. Folglich bildet $\mathfrak{N}$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem für $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{G}_1$:

$$\mathfrak{G}_1=\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{H}'R_\nu .$$

Mithin treffen auf die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ wieder die Voraussetzungen des Satzes 1 zu.

Ist $\mathfrak{H}$ insbesondere abelsch, also $\mathfrak{H}'=1$, so lehren die soeben angestellten Überlegungen, daß $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{N}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist und $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{H}\frown\mathfrak{N}=1$. Also ist Satz 1 für abelsche Hallgruppen gewiß richtig. Damit können wir einen Induktionsschluß nach der Anzahl der von 1 verschiedenen höheren Kommutatorgruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{H}$ beginnen. Dieser Induktionssluß liefert die Existenz eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{H}'\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}'\frown\mathfrak{N}=1$. Wegen $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{G}_1$ wird $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$. Weiter ist

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1\cong\mathfrak{H}/\mathfrak{H}\frown\mathfrak{G}_1=\mathfrak{H}/\mathfrak{H}',$$

so daß $|\mathfrak{N}|=n$ und mithin auch $\mathfrak{H}\frown\mathfrak{N}=1$ wird. Zu zeigen bleibt noch, daß $\mathfrak{N}$ sogar Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, d. h. $H^{-1}\mathfrak{N}H=\mathfrak{N}$ für jedes $H\in\mathfrak{H}$. Für beliebige Elemente $N\in\mathfrak{N}$ und $H\in\mathfrak{H}$ wird, da $\mathfrak{G}_1$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist,

$$H^{-1}NH=H'N_1 \quad \text{mit} \quad H'\in\mathfrak{H}',\, N_1\in\mathfrak{N}.$$

Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung in die n-te Potenz, so erhält man links 1. Die n-te Potenz der rechten Seite hat, weil $\mathfrak{N}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}_1$ ist, die Form $H'^n N_2$ mit $N_2\in\mathfrak{N}$. Da $|\mathfrak{H}'|$ zu n teilerfremd ist, muß $H'=1$ sein.

Damit ist Satz 1 bewiesen. Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{N}$ ausgezeichnet ist, wurde übrigens nicht voll ausgenutzt. Es hätte genügt, von $\mathfrak{N}$ folgendes zu fordern: Mit $\mathfrak{H}^{(0)}=\mathfrak{H},\mathfrak{H}^1,\dots,\mathfrak{H}^{(i)},\dots,1$ bezeichne man die höheren Kommutatorgruppen von $\mathfrak{H}$. Für $i=0,1,\dots,$ beliebige $H^{(i)}\in\mathfrak{H}^{(i)}$ und $R_\nu\in\mathfrak{N}$ sei dann

$$H^{(i)^{-1}}R_\nu H^{(i)}=H^{(i+1)}R_\mu \quad \text{mit} \quad H^{(i+1)}\in\mathfrak{H}^{(i+1)},\, R_\mu\in\mathfrak{N}.$$

Wir setzen zur Abkürzung $|\mathfrak{H}|=h$ und bezeichnen mit $\mathfrak{N}^h$ den Komplex aller R^h mit $R\in\mathfrak{N}$. Aus Satz 1 erhalten wir als

Folgerung 1. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine auflösbare Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem $\mathfrak{N}$. Ist auch $\mathfrak{N}^h$ ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$, so enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}\frown\mathfrak{N}=1$.*

Jedes Element R aus $\mathfrak{N}$ läßt sich nämlich in der Form $R=R'R''$ schreiben, wobei R' und R'' Potenzen von R sind mit $R'^h=1, R''^n=1$. Ist nun auch $\mathfrak{R}^h$ ein Repräsentantensystem, so ist es ebenfalls ausgezeichnet, und die Ordnungen seiner von 1 verschiedenen Elemente sind Teiler von n. Also läßt sich Satz 1 unmittelbar anwenden.

Folgerung 2. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine auflösbare Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem. Die von $\mathfrak{H}$ verschiedenen Durchschnitte $\mathfrak{H} \frown G^{-1}\mathfrak{H}G$ mögen im Zentrum von $\mathfrak{H}$ enthalten sein. Dann enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{N} = 1$.*

Wir werden wieder zeigen, daß unter den Bedingungen der Folgerung 2 ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem existiert, das der Forderung des Satzes 1 genügt. Durch Transformation mit den Elementen aus $\mathfrak{H}$ werden die Elemente des ausgezeichneten Repräsentantensystems $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ permutiert. Wir betrachten die dabei entstehenden Transitivitätssysteme. Besteht ein solches Transitivitätssystem aus einem einzigen Element R, so ist R mit $\mathfrak{H}$ elementweise vertauschbar und besitzt daher, weil $\mathfrak{H}$ eine Hallgruppe ist, eine Ordnung, die kein Teiler von $|\mathfrak{H}|$ ist. Eine geeignete Potenz von R ist daher ein Vertreter der Nebenklasse $\mathfrak{H}R$ mit einer zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremden Ordnung. Sei weiter $R_1, \ldots, R_m$ ein Transitivitätssystem der Länge $m > 1$. Ist $H \in \mathfrak{H} \frown R_1^{-1}\mathfrak{H}R_1$ so wird $H = R_1^{-1}H_1R_1$ mit $H_1 \in \mathfrak{H}$ oder $R_1H = H_1R_1$. Da $\mathfrak{R}$ ausgezeichnet ist, wird bei passender Numerierung $R_1H = HR_2$, also $HR_2 = H_1R_1$. Mithin wird $H = H_1$, also H mit R_1 vertauschbar. Folglich besteht der Durchschnitt $\mathfrak{H} \frown R_1^{-1}\mathfrak{H}R_1$ genau aus den mit R_1 vertauschbaren Elementen von $\mathfrak{H}$.

Mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir das Erzeugnis aller Elemente aus $\mathfrak{G}$, deren Ordnung zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd ist. Man erkennt leicht, daß in jeder Nebenklasse von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ mindestens ein Element aus $\mathfrak{T}$ liegt (vgl [2], 1.3). Insbesondere sei $T_1 \in \mathfrak{T} \frown \mathfrak{H}R_1$, also $T_1 = H_1R_1$ mit $H_1 \in \mathfrak{H}$. Man ersetze R_1 durch H_1R_1 und $R_2, \ldots, R_m$ entsprechend, nämlich folgendermaßen: Ist $R_i = K_i^{-1}R_1K_i$ mit $K_i \in \mathfrak{H}$, so ersetze man R_i durch $K_i^{-1}H_1K_iR_i = H_iR_i$. Da die mit R_1 vertauschbaren Elemente voraussetzungsgemäß im Zentrum von $\mathfrak{H}$ liegen, werden die Elemente $H_1R_1, \ldots, H_mR_m$ bei Transformation mit Elementen aus $\mathfrak{H}$ nur untereinander vertauscht. Außerdem sind alle H_iR_i in $\mathfrak{T}$ enthalten.

Führt man die entsprechende Abänderung in allen Transitivitätssystemen durch, so erhält man ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, dessen sämtliche Elemente in $\mathfrak{T}$ enthalten sind, also ein Repräsentantensystem der in Satz 1 geforderten Art.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine auflösbare Hallgruppe in $\mathfrak{G}$ vom Index n mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem. Hat eine der Gruppen $\mathfrak{H}', \mathfrak{H}'', \ldots$ in einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ den Index n, so möge sie darin ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem besitzen. Dann enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H} \frown \mathfrak{N} = 1$.*

Beweis. Mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichnen wir wieder den Normalteiler aus allen denjenigen Elementen von $\mathfrak{G}$, die bei der Verlagerung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ abgebildet werden. Wie beim Beweis von Satz 1 schließt man wieder $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}'$. Weiter sei $\mathfrak{T}$ das Erzeugnis aller Elemente aus $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd sind. Da in jeder Nebenklasse von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ mindestens ein Element aus $\mathfrak{T}$ liegt, wird

$$\mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{H} T_\nu \qquad (T_\nu \in \mathfrak{T}).$$

Da die T_ν bei der Verlagerung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ abgebildet werden gilt weiter

$$\mathfrak{G}_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{H}' T_\nu .$$

Da somit $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{G}_1$ eine Untergruppe vom Index n ist, existiert in $\mathfrak{G}_1$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem für die Nebenklassen nach $\mathfrak{H}'$. Der weitere Beweis verläuft genau wie bei Satz 1.

Es ist übrigens klar, daß die Bedingungen in Satz 1, in Folgerung 1 und in Satz 2 auch notwendig sind.

Literatur

[1] R. Baer, Kriterium für die Abgeschlossenheit endlicher Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **71** (1959), 325—334.

[2] D. G. Higman, Focal Series in Finite Groups, *Canadian J. Math.*, **5** (1953), 477—497.

[3] R. Kochendörffer, Über den Multiplikator einer Gruppe, *Math. Zeitschrift*, **63** (1956), 507—513.

[4] G. Zappa, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Le Matematiche*, Catania, **13** (1958), 61—64.

(Eingegangen am 6. Februar 1960)