Sull'esistenza di sottogruppi normali di Hall in un gruppo finito

Di GUIDO ZAPPA in Firenze (Italia)

A L. Rédei nel suo 60^0 compleanno

1. Si deve a R. KOCHENDÖRFFER [1] l'introduzione del concetto di *sistema privilegiato di rappresentanti* di un sottogruppo in un gruppo. Precisamente, se G è un gruppo, e H un suo sottogruppo, dicesi sistema privilegiato di rappresentanti di H in G un insieme R di elementi di G che ha a comune con ciascun laterale di H in G uno ed un solo elemento, e tale che, comunque si prenda un elemento x in H, si abbia $x^{-1}Rx = R$.

Ovviamente, un complemento normale di H, cioè un sottogruppo normale N di G tale che $G = HN$, $H \cap N = 1$, è un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G. Viceversa, si pone il problema di vedere quando, dati il gruppo G e il suo sottogruppo H, un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G sia un complemento normale di H.

Limitandosi ai gruppi finiti, il caso più interessante è quello in cui H è un sottogruppo di Hall, cioè avente ordine primo con l'indice. KOCHENDÖRFFER ha dimostrato [1] che se G è un gruppo finito e H un suo sottogruppo di Sylow il cui derivato sia contenuto nel centro di H, e se esiste un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G, esiste necessariamente un complemento normale di H.

Recentemente, in [2] ho generalizzato il precedente teorema di KOCHENDÖRFFER, sostituendo in esso, all'ipotesi che H sia un sottogruppo di Sylow a derivato contenuto nel centro, quella meno restrittiva che H sia un sottogruppo di Hall speciale (in particolare un sottogruppo di Sylow qualunque). In una osservazione fatta in fondo alla nota citata in sede di correzione delle bozze, ho indicato come l'ipotesi che H sia un sottogruppo di Hall speciale si può sostituire con l'altra, meno restrittiva, che H sia un sottogruppo di Hall disperso, vale a dire dotato di una catena principale i cui fattoriali siano tutti isomorfi a sottogruppi di Sylow di H (in particolare ciò avviene quando H è supersolubile).

Resta aperto il problema di vedere se si può sostituire all'ipotesi che H sia un sottogruppo di Hall disperso quella, ancora meno restrittiva, che esso sia soltanto risolubile. In questa Nota, pur non giungendo a tale risultato, dimostro che se esiste un sistema privilegiato di rappresentanti del sottogruppo risolubile H del gruppo finito G, esiste un complemento normale di H sotto l'ipotesi ulteriore che G e i suoi sottogruppi verifichino certe condizioni relative ai sottogruppi di Hall (cond. (a) e (b) dell'enunciato del teorema del n. 4).

2. Lemma 1. *Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo, ed R un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G. Allora, se r è un elemento di R, r è permutabile con ogni elemento di $H \cap r^{-1}Hr$.*

Infatti, se x è un elemento di $H \cap r^{-1}Hr$, esso è in $r^{-1}Hr$, onde esiste un elemento y di H tale che $r^{-1}yr = x$. Sarà allora $x^{-1}rx = x^{-1}r(r^{-1}yr) = x^{-1}yr$. Poichè x et y sono in H, $x^{-1}yr$ è in Hr, ed ivi è quindi $x^{-1}rx$. Ma $x^{-1}rx$ è in R, essendo R un sistema privilegiato; e poichè l'unico elemento di R che sia in Hr è r, si ha $x^{-1}rx = r$, onde r è permutabile con x, come si voleva.

Lemma 2. *Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo. L'insieme dei laterali di H in G venga decomposto in classi disgiunte in modo che due laterali appartengano alla stessa classe quando e solo quando sono trasformati l'uno nell'altro da un elemento di H. Allora, scelto un laterale L_i per ciascuna classe C_i, se in ciascun laterale scelto L_i c'è un elemento r_i che sia permutabile con ogni elemento di $H \cap r_i^{-1}Hr_i$, l'insieme R dei trasformati degli elementi r_i mediante gli elementi di H è un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G.*

E' evidente che ogni laterale di H in G ha almeno un elemento in R, e che, se x è in H, $x^{-1}Rx = R$. Per provare che R è un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G basterà far vedere che se due elementi di R appartengono allo stesso laterale di H, essi coincidono.

Siano $x^{-1}r_ix$, $y^{-1}r_jy$ due elementi di R appartenenti allo stesso laterale di H (r_i, r_j in R; x, y in H). Dovrà aversi anzitutto $r_i = r_j$, altrimenti $x^{-1}r_ix$ e $y^{-1}r_jy$ apparterrebbero addirittura a due laterali contenuti in classi distinte. Si avrà $x^{-1}r_ix = hy^{-1}r_iy$ con h conveniente elemento di H. Ne discende

$$(1) \qquad r_i^{-1}yh^{-1}x^{-1}r_i = yx^{-1}.$$

Orbene, essendo $yh^{-1}x^{-1}$ in H, si ha che $r_i^{-1}yh^{-1}xr_i$, cioè yx^{-1}, è in $r_i^{-1}Hr_i$. D'altra parte yx^{-1} è pure in H, onde yx^{-1} è in $H \cap r_i^{-1}Hr_i$. Per ipotesi è allora $r_i^{-1}yx^{-1}r_i = yx^{-1}$. Dalla (1) quindi segue $yh^{-1}x^{-1} = yx^{-1}$, cioé $h = 1$, onde $x^{-1}r_ix = y^{-1}r_iy$, come si voleva.

3. Sia π un insieme di numeri primi, e π' l'insieme complementare di π rispetto all'insieme di tutti i numeri primi.

Diremo *π-intero* ogni intero positivo i cui fattori primi appartengano tutti a π. Diremo *π-gruppo* (*π-elemento*) un gruppo finito (un elemento di un gruppo finito) il cui ordine sia un π-intero, e *π-sottogruppo* di un gruppo G un sottogruppo di G che sia un π-gruppo. Diremo poi *π-sottogruppo di Hall* di un gruppo finito G un π-sottogruppo di G il cui ordine sia il massimo π-intero che divida l'ordine di G.

Si dirà che un gruppo finito G verifica la *π-condizione esistenziale di Hall* se esso contiene un π-sottogruppo di Hall, e si dirà che G verifica la *π-condizione d'immersione di Hall* se esso verifica la π-condizione esistenziale di Hall e, detti H un π-sottogruppo di Hall e D un π-sottogruppo di G, si ha che D è contenuto in un coniugato ad H in G.

Proviamo anzitutto il seguente:

Lemma 3. *Se un gruppo finito G verifica la π-condizione d'immersione di Hall, la verifica anche ogni sottogruppo normale di G il cui indice sia un π-intero.*

Sia hk l'ordine di G, con h π-intero e k π'-intero. Sia poi N un sottogruppo normale di G, il cui indice sia un π-intero, e sia H un π-sottogruppo di Hall di G. L'ordine di H vale h, mentre l'ordine di N è multiplo di k, onde l'ordine di $H \cup N$ è divisibile per hk, vale a dire $H \cup N = G$. Si ha poi $H \cup N = HN$, essendo N normale in G, onde, detto $o(X)$ l'ordine di un gruppo X, si ha

$$o(H \cap N) = \frac{o(H)o(N)}{o(G)} = \frac{o(N)}{k}.$$

Poichè k è il massimo π'-intero che divide l'ordine di N, si ha che l'ordine di $H \cap N$ è il massimo π-intero che divide l'ordine di N, onde $H \cap N$ è un π-sottogruppo di Hall di N, vale a dire N verifica la π-condizione esistenziale di Hall.

Si noti ora che, se L è un π-sottogruppo di Hall di N, L è contenuto in un coniugato $\overline{H}$ di H (perchè G verifica la π-condizione di immersione di Hall) onde si ha $L \subseteq N \cap \overline{H}$, e poichè $N \cap \overline{H}$ è di Hall per N, si ha $L = N \cap \overline{H}$. Essendo $\overline{H}$ un π-sottogruppo di Hall di G, al pari di H, ne segue che i π-sottogruppi di Hall di N sono dati tutti e soli dalle intersezioni di N coi π-sottogruppi di Hall di G.

Sia ora D un π-sottogruppo di N, e L^* un π-sottogruppo di Hall di N. Per quanto si è osservato, è $L^* = N \cap H^*$, con H^* π-sottogruppo di Hall di G. Inoltre D è contenuto in un coniugato H_0 di H^* in G, quindi anche in

$N \cap H_0$. Sia c un elemento di G tale che $c^{-1}H^*c = H_0$. Ogni elemento di H^*c trasforma H^* in H_0, e poichè in H^*c c'è almeno un elemento di N, esiste un elemento b di N tale che $b^{-1}H^*b = H_0$, cioè tale che $b^{-1}L^*b = b^{-1}(N \cap H^*)b = N \cap H_0$. Poichè $N \supseteq D$ e $H_0 \supseteq D$, si ha $b^{-1}L^*b \supseteq D$, onde, essendo D un π-sottogruppo di N e L^* un π-sottogruppo di Hall di N, si ha che N verifica la π-condizione d'immersione di Hall.

4. Possiamo ora provare il

Teorema. *Sia G un gruppo finito tale che:*

(*a*) *G verifica la π-condizione d'immersione di Hall;*

(*b*) *Ogni sottogruppo di G verifica la π-condizione esistenziale di Hall, e la π'-condizione esistenziale di Hall;*

(*c*) *Esiste un π-sottogruppo di Hall risolubile H di G, dotato di un sistema privilegiato R di rappresentanti.*

Allora G possiede un π'-sottogruppo di Hall normale.

Procediamo per induzione rispetto all'ordine del gruppo. Si decomponga anzitutto G in laterali di H prendendo gli elementi di R come rappresentanti dei laterali. Si esegua poi il traslato (Verlagerung) del gruppo G rispetto ad H. Sia g un elemento di H non contenuto in H', e sia r un elemento di R. Si avrà $rg = g(g^{-1}rg) = g\bar{r}$, con $\bar{r}$ ancora elemento di R, onde, indicato con $V(x)$ il traslato dell'elemento x di G, e con k il massimo π'-intero che divide l'ordine di G, si ha che i laterali di H in G sono in numero di k, e pertanto $V(g) = H'g^k$. Poichè k è primo con l'ordine di H, quindi anche con l'ordine di g, esiste un intero $d > 0$ tale che $(g^k)^d = 1$, onde $V(g^d) = H'g$. Ciò basta per concludere che $V(G) = H/H'$, onde G è omomorfo sopra H/H', e il nucleo di tale omomorfismo è un sottogruppo M normale in G, tale che G/M sia isomorfo ad H/H'. Evidentemente è $H' = H \cap M$. Essendo H risolubile, è $H' \subset H$, onde $M \subset G$.

Ogni π'-elemento di G è in M, perchè ad esso corrisponde l'unità nel suddetto omomorfismo di G sul π-gruppo H/H'. Mostriamo ora che esiste un sistema privilegiato di rappresentanti di H in G formato unicamente da π'-elementi, cioè contenuto in M.

Il sistema R è formato di classi complete di elementi coniugati rispetto ad H. Sia K_i la generica di queste classi, e sia r_i un elemento scelto in K_i. Si abbia $r_i^{-1}Hr_i = \bar{H}$. Allora, se x è in $H \cap \bar{H}$ si ha, in base al lemma 1, $r_i^{-1}xr_i = x$. Di conseguenza r_i è nel centralizzante C di $H \cap \bar{H} = L$.

Sia ora $B = C \cap H$. Mostriamo che B è un π-sottogruppo di Hall di C. Per la (*b*) dell'enunciato del teorema, C possiede π-sottogruppi di Hall: sia B^* uno di essi. Si noti che $B^* \supseteq L$, perchè, essendo L un π-sottogruppo normale di C, LB^* è anch'esso un π-sottogruppo di C, onde $B^* \supseteq LB^* \supseteq L$. Per la ($a$) dell'enunciato del teorema, B^* deve essere contenuto in un coniugato H^* di H. Si avrà allora $L \subseteq B^* \subseteq H^*$, ed essendo B^* un π-sottogruppo di Hall di C, è $B^* = C \cap H^*$. Detto y un elemento di G tale che $y^{-1}Hy = H^*$, si ha che ogni elemento del laterale Hy trasforma H in H^*. Se r è l'elemento di R che rappresenta detto laterale, si avrà $r^{-1}Hr = H^*$. Per il lemma 1, r è permutabile con ogni elemento di $H^* \cap H$, e poichè $L \subseteq H$, $L \subseteq B^* \subseteq H^*$, e quindi $L \subseteq H \cap H^*$, r è permutabile con ogni elemento di L, vale a dire è in C. Si avrà allora $r^{-1}Br = r^{-1}(C \cap H)r = (r^{-1}Cr) \cap (r^{-1}Hr) = C \cap H^* = B^*$, ed essendo B^* un π-sottogruppo di Hall di C, tale è B, come si era affermato.

Per la (b) dell'enunciato del teorema, C possiede un π'-sottogruppo di Hall D. Si avrà allora $C = BD$. Poichè r_i è in C, si avrà $r_i = b_i d_i$, con b_i in B, e d_i in D. Essendo $B \subseteq H$, r_i e d_i appartengono allo stesso laterale di H.

Nel laterale Hr_i, che abbiamo scelto nella classe K_i, prendiamo allora come rappresentante l'elemento d_i, anzichè l'elemento r_i. Si avrà $d_i^{-1}Hd_i = r_i^{-1} b_i^{-1} H b_i r_i = r_i^{-1} H r_i$, onde $H \cap d_i^{-1}Hd_i = L$. Essendo d_i in C, d_i è permutabile con ogni elemento di L. Allora, per il lemma 2, si ha che i trasformati, mediante gli elementi di H, degli elementi d_i scelti nei laterali Hr_i presi uno da ciascuna classe K_i formano un sistema privilegiato di rappresentanti $\overline{R}$ di H in G. Ma gli elementi d_i, e quindi anche i loro trasformati, sono π'-elementi, e quindi sono contenuti in M. Essendo ogni laterale di B in M contenuto in uno ed un solo laterale di H in G, si ha che $\overline{R}$ è anche un sistema privilegiato di rappresentanti di B in M, poichè si ha $x^{-1}\overline{R}x = \overline{R}$ per x in H e quindi in particolare per x in B. Inoltre, per il lemma 3, che può applicarsi perchè in G vale la (a), M verifica la π-condizione di immersione di Hall, ed ovviamente ogni suo sottogruppo, quale sottogruppo di G, verifica, per la (b) la π-condizione esistenziale e la π'-condizione esistenziale di Hall. In base all'ipotesi d'induzione, allora, M ha un π'-sottogruppo di Hall normale N. Esso è caratteristico in M, quindi è un π'-sottogruppo di Hall normale in G.

Il teorema è quindi dimostrato.

Bibliografia

[1] R. Kochendörffer, Ein Satz über Sylowgruppen, *Mat. Nachrichten*, **17** (1959), 189—194.
[2] G. Zappa, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Le Mathematiche*, Catania, **13** (1958), 61—64.

(Ricevuto l'11 febbraio 1960)