Über die Nichteinfachheit von faktorisierbaren Gruppen

Von J. SZÉP in Szeged

Prof. L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Da es unendlich viele faktorisierbare einfache Gruppen gibt, spielt in der Theorie der faktorisierbaren Gruppen — wie auch in der Gruppentheorie überhaupt — die Frage der Nichteinfachheit eine wichtige Rolle. Bezüglich mehreren Klassen von faktorisierbaren Gruppen ist es bekannt, daß sie nichteinfach [6], ja sogar auflösbar sind [1], [2], [3], [8], [9]. Die Aufgabe entbehrt also nicht des Interesses, nach solchen Kriterien zu suchen, welche die Nichteinfachheit faktorisierbarer Gruppen gewährleisten. Die Untersuchung dieser Frage ist außerdem auch noch darum von Interesse, weil in gewißen Fällen die Nichteinfachheit die Auflösbarkeit der betreffenden faktorisierbaren Gruppe nach sich zieht. Zur Unterstützung dieser Behauptung mag folgender Gedankengang (der in speziellen Fällen schon in früheren Arbeiten angewandt ist) dienen:

Es sei $G=AB$ eine endliche faktorisierte Gruppe, wobei die Ordnungen der Gruppen A und B zueinander relativ prim sind. Es sollen A und B, sowie auch sämtliche Normalteiler und Faktorgruppen dieser beiden Gruppen eine gewiße Eigenschaft $\mathfrak{A}$ besitzen. Man sieht ohne Schwierigkeit ein, daß aus der Nichteinfachheit aller Gruppen mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}$ (für die Faktoren) die Auflösbarkeit von G folgt. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion. Nehmen wir an, daß die Auflösbarkeit für faktorisierbare Gruppen der Eigenschaft $\mathfrak{A}$ und einer niedrigeren Ordnung als G bereits bewiesen ist. Es sei N ein Normalteiler von G. Dann gilt $N=N_1N_2$ wo N_1 Normalteiler von A, und N_2 Normalteiler von B ist [5], und es ist $G/N \approx A/N_1 B/N_2$. Der Induktionsvoraussetzung gemäß sind G/N und N auflösbare Gruppen, und folglich ist auch G auflösbar.

Bei unserer Untersuchung spielt der schon auch von anderen Verfassern oft benutzte folgende Satz eine wichtige Rolle:

Satz A ([4] oder [7]). *$G=AB$ ist nicht einfach, wenn $A\cap B$ einen Normalteiler $\neq 1$ von A oder B enthält.*

Wir werden noch zwei Hilfssätze benutzen, die wir der Vollständigkeit halber beweisen werden, obwohl sie schon in einer früheren Arbeit [6] vorgekommen sind. Den Hilfssätzen schicken wir folgendes voran.

Die Elemente einer vorgelegten Gruppe $G = AB (= BA)$ können wir als $a_i b_k$ und $b_t a_s$ ($a_i, a_s \in A$; $b_k, b_t \in B$) darstellen. Ist $A \cap B = 1$, so durchläuft das Element a_i' in $a_i b = b_i a_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ zusammen mit a_i bei festem b $(b, b_i \in B)$ alle Elemente von A. Wir bezeichnen durchweg mit $[b]$ das durch b eindeutig bestimmte System der b_i in $a_i b = b_i a_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$; dabei zählen wir die Elemente b_i mit Multiplizität.

Hilfssatz 1. *Ist $\bar{b} \in [b]$, so ist $[\bar{b}] = [b]$.*

Beweis. Wegen $\bar{b} \in [b]$ gilt eine Gleichung $ab = \bar{b}a'$ $(a, a' \in A; b, \bar{b} \in B)$. Setzen wir das Element $b = a^{-1}\bar{b}a'$ in die Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein, so bekommen wir die Gleichungen $a_i a^{-1}\bar{b} = b_i a_i' a'^{-1}$ aus welchen die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *$[b]$ enthält alle seine Elemente mit gleicher Multiplizität.*

Beweis. Wir fassen unter allen Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ diejenigen ins Auge, für welche $b_i = b$ ist. Gilt $b_i = b$ für alle i so ist die Behauptung des Hilfssatzes trivial. Es sei dann $a_k b = b_k a_k'$ eine Gleichung, wo $b_k \neq b$ gilt. Setzen wir das Element $b = a_k^{-1} b_k a_k'$ in die rechte Seite jeder Gleichung $\bar{a}_i b = b \bar{a}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein, so bekommen wir die Gleichungen $a_k a_i b = b_k a_k' \bar{a}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es folgt aus diesen Gleichungen, daß die Multiplizität von b_k in $[b]$ nicht kleiner, als die von b. Andererseits wählen wir für festes k die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ aus den Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ aus. Setzen wir das Element $b_k = a_k b a_k'^{-1}$ in die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein, so entstehen die Gleichungen $a_k^{-1} \bar{\bar{a}}_i b = b a_k'^{-1} \bar{\bar{a}}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ also ist die Multiplizität von b in $[b]$ nicht kleiner, als die von b_k. Somit haben wir Hilfssatz 2 bewiesen.

Satz 1. *Es sei $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ eine faktorisierte Gruppe. Es seien N_A und N_A' je ein Normalteiler von A und $Z_B (\neq 1)$ das Zentrum von B. Gilt $b^{-1} N_A b = N_A'$ für ein $b \neq 1$ aus Z_B, so ist G nicht einfach.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nach dem die von $[b]$ erzeugte Gruppe $\{[b]\}$ eine echte Untergruppe von B ist oder nicht.

Fall 1. $[b]$ erzeugt nicht die Gruppe B. In diesem Fall ergibt sich (mit Verwendung des Hilfssatzes 1 und der Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$) $A\{[b]\} = \{[b]\}A = A' \subset G$, also ist $G = A'B$. Da der Normalteiler $\{b\}$ von B in $A' \cap B$ liegt, ist nach Satz A die Gruppe G nicht einfach.

Fall 2. $[b]$ erzeugt die Gruppe B. Wir werden mehrere Unterfälle unterscheiden:

a) Ist $b_i = b$ $(i = 1, 2, \ldots; b_i \in [b])$, so ist $b^{-1}Ab = A$, also ist A Normalteiler von G.

b) Gibt es ein l mit $[b] \ni b_l \neq b$, so ist $N_A b_l b^{-1} = b_l b^{-1} N_A$. Setzen wir nämlich das Element $b = a_l^{-1} b_l a_l'$ in $N_A b = b N_A'$ ein, so ergibt sich $N_A b_l = b_l N_A'$. Aus dieser Gleichung und aus $N_A b = b N_A'$ folgt die Behauptung. Man sieht auch, daß N_A durch $b_l b^{-1}$ also auch durch alle Elemente von $[b_i b^{-1}]$ $(i = 1, 2, \ldots; b_i \in [b])$ in sich transformiert wird.

Man bezeichne mit B' die durch die Elemente sämtlicher Komplexe $[b_i b^{-1}]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ erzeugte Gruppe.

b_1) Ist $B' = B$, so ist die Gruppe N_A Normalteiler in G.

b_2) Ist $B' \subset B$, so gilt $B' \not\ni b$ (wegen $\{[b_1 b^{-1}], [b_2 b^{-1}], \ldots, b\} \supseteqq \{b_1 b^{-1}, b_2 b^{-1}, \ldots, b\} \supseteqq \{[b]\} = B$). Es ist ferner klar, daß $\{[b_1 b^{-1}], [b_2 b^{-1}], \ldots\} \{b\} \supseteqq \{b_1 b^{-1}, b_2 b^{-1}, \ldots\} \{b\} \supseteqq \{[b]\} = B$ gilt, also ist $\{[b_1 b^{-1}], [b_2 b^{-1}], \ldots\} \{b\} = B$ und $AB' = B'A \neq G$. Folglich gilt $G = AB = (AB')(B'\{b\})$, $AB' \cap B'\{b\} = B'$. Die Gruppe B' ist Normalteiler in $B'\{b\} (= B)$, also ist G nach Satz A nicht einfach. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Es sei $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ eine endliche faktorisierte Gruppe. Es sei N_A ein Normalteiler von A mit der Eigenschaft, daß jede Untergruppe von N_A ein Normalteiler von A ist. Es sei weiterhin $Z_B (\neq 1)$ das Zentrum von B. Gilt $N_A Z_B' = Z_B' N_A$ $(Z_B' \neq 1; Z_B' \subseteq Z_B)$ mit $|Z_B'| \not\equiv 1 \pmod{|N_A|}$ so ist G nicht einfach; dabei bedeutet $|\ldots|$ die Anzahl der Verschieden Elemente der eingeklammerten Menge.*

Beweis. Es ist klar, daß N_A eine Hamiltonsche Gruppe ist. Betrachten wir die Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ $(a_i, a_i' \in N_A; b, b_i \in Z_B')$. Aus ihnen folgt, daß jeder Komplex $[b_i]$ höchstens $|N_A|$ verschiedene Elemente enthält; dieser Grenzfall tritt genau dann ein, wenn die Multiplizität der Elemente in $[b_i]$ den Wert 1 hat. Nach Hilfssatz 1 und 2 kann nicht jeder Komplex $[b_i]$ $(b_i \in Z_B')$ genau $|N_A|$ verschiedene Elemente haben. Denn sonst hätte Z_B' nach Hilfssatz 1 eine Zerlegung

$$Z_B' = [1] + [b'] + [b''] + \cdots \qquad (b', b'', \ldots \in Z_B')$$

mit $|[1]| = 1$, $|[b']| = |[b'']| = \cdots = |N_A|$. Dies widerspricht aber der Bedingung $|Z_B'| \not\equiv 1 \pmod{|N_A|}$.

Z_B' hat also ein Element b, dessen Multiplizität in $[b]$ mindestens zwei ist, also gilt eine Gleichung $N_A' b = b N_A''$ $(N_A', N_A'' \subseteq N_A)$. Nach Satz 1 ist also die Gruppe G nicht einfach.

Bemerkung. Die Bedingung $|Z_B'| \not\equiv 1 \pmod{|N_A|}$ ist z.B. dann trivialerweise befriedigt, wenn $|Z_B'| \leqq |N_A'|$ oder $(|Z_B'|, |N_A|) \neq 1$ ist.

Korollar 1. *Es sei $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ eine endliche Gruppe. Es sei $Z_A (\neq 1)$ bzw. $Z_B (\neq 1)$ das Zentrum von A bzw. B. Wenn es Untergruppen $Z'_A \neq 1$ und $Z'_B \neq 1$ in Z_A bzw. Z_B gibt für welche $Z'_A Z'_B = Z'_B Z'_A$ ist, so ist G nicht einfach.*

Beweis. Wir können $|Z'_A| \geqq |Z'_B|$ annehmen. Nach der vorigen Bemerkung ist die Bedingung $|Z'_B| \not\equiv 1 \pmod{|Z'_A|}$ befriedigt, also ist G nach Satz 2 nicht einfach.

Korollar 2.*) *Eine endliche Gruppe $G = AB$ ist nicht einfach, wenn A eine Abelsche Gruppe ist, B ein Zentrum $(\neq 1)$ hat und $|A| \geqq |B|$ gilt.*

Beweis. Ist $A \cap B \neq 1$, so ist $A \cap B$ ein Normalteiler von A, also ist G nach Satz A nicht einfach. Im Fall $A \cap B = 1$ sei b $(\neq 1)$ ein Element des Zentrums von B. In den Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ $(a_i, a'_i \in A;\ b, b_i \in B)$ sind wegen $|A| \geqq |B|$ nicht alle b_i verschieden, folglich ist nach Hilfssatz 2 die Multiplizität von b in $[b]$ mindestens zwei. Die Gruppe A hat also zwei Untergruppen $A', A'' (\neq 1)$, für welche $b^{-1}A'b = A''$ gilt. Also ist G nach Satz 1 nicht einfach.

Literaturverzeichnis

[1] B. Huppert, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **59** (1953), 1—7.

[2] C. Huppert—N. Itô, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II, *Math. Zeitschrift*, **61** (1954), 94—99.

[3] N. Itô, Remarks on factorisable groups, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951), 83—84.

[4] O. Ore, Contributions to the theory of finite order, *Duke Math. Journal*, **5** (1939), 431—460.

[5] J. Szép, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math.*, **12 A** (1950), 57—61.

[6] J. Szép, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 54—57.

[7] J. Szép—L. Rédei, On factorisable groups, *Acta Sci. Math.*, **13** (1950), 235—238.

[8] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7.

[9] H. Wielandt, Über Produkte von nilpotenter Gruppen, *Illinois Journal of Math.*, **2** (1958), 611—618.

(Eingegangen am 29. Februar 1960)

*) Dieser Satz wurde schon in der Arbeit [6] auf ähnliche Weise bewiesen.