Über gewisse spezielle kompatible Klasseneinteilungen von Halbgruppen

Von ISTVÁN PEÁK in Szeged

Herrn Prof. L. Rédei zum 60. Geburtstage gewidmet

Es sei $H = \alpha, \beta, \ldots$ eine Halbgruppe, d. h. eine nichtleere Menge, in der eine assoziative Multiplikation definiert ist. Wir beschäftigen uns mit einer besonderen Klasseneinteilung von H. Eine Klasseneinteilung C von H in die Klassen $C_1, C_2, \ldots$ wird kurz durch $H = C_1, C_2, \ldots$ bezeichnet. Die durch das Element $\alpha (\in H)$ repräsentierte Klasse C_i bezeichnen wir durch $C_i = C(\alpha)$.

Wir definieren die kompatible Klasseneinteilung einer Halbgruppe üblicherweise so:

Eine Klasseneinteilung C einer Halbgruppe H ist kompatibel, wenn die durch die Gleichung $C(\alpha)C(\beta) = C(\alpha\beta)$ definierte Klassenmultiplikation eindeutig ist.

Offenbar ist eine Klasseneinteilung C einer Halbgruppe H dann und nur dann kompatibel, wenn die zugehörige Äquivalenzrelation $\alpha \equiv \beta \Longleftrightarrow C(\alpha) = C(\beta)$ eine Kongruenzrelation ist, d. h.

$$\alpha \equiv \beta \Longrightarrow \varrho\alpha \equiv \varrho\beta, \quad \alpha\sigma \equiv \beta\sigma \qquad (\varrho, \sigma \in H).$$

Nach L. RÉDEI [2] nennen wir eine Unterhalbgruppe N einer Halbgruppe H mit Einselement ε, von der wir annehmen, daß sie ebenfalls ε zum Einselement hat, *linksnormal*, wenn eine kompatible Klasseneinteilung von H von der Form

$$(1) \qquad H = N, \ \alpha N, \ \beta N, \ \ldots$$

existiert. (Die ursprüngliche Definition von L. RÉDEI hat wegen der Anwendung auf das Schreiersche Erweiterungsproblem auch die Einschränkung enthalten, daß jedes Produkt αN schlicht (vgl. RÉDEI [3]) ist, d. h. $\alpha\nu_1 = \alpha\nu_2$ $(\alpha \in H, \ \nu_1, \nu_2 \in N)$ nur im Falle $\nu_1 = \nu_2$ gilt. Wir haben diese zusätzliche einschränkende Bedingung fallen lassen.) Entsprechend versteht man die *rechtsnormale* Unterhalbgruppe von H. Nach R. WIEGANDT [4] nennen wir eine

Unterhalbgruppe N von H *normal,* wenn N links- und rechtsnormal in H ist. WIEGANDT [4] hat die folgenden zwei Behauptungen bewiesen. Erstens, wenn N eine normale Unterhalbgruppe einer Halbgruppe H mit Einselement ist, dann sind die linksseitige Klasseneinteilung (1) und die entsprechende rechtsseitige Klasseneinteilung $H=N, N\varrho, N\sigma, \ldots$ übereinstimmend. Zweitens, wenn $\alpha(\in H)$ sein Inverses in H hat, dann ist $\alpha N=N\alpha$.

Wir geben eine Ergänzung dieser Resultate für den Fall, daß N eine Gruppe ist.

Im folgenden sei H immer eine Halbgruppe mit Einselement ε und N eine Untergruppe von H, die das Einselement von H enthält. Es ist bekannt, daß die sämtlichen verschiedenen Untermengen von der Form αN $(\alpha\in H)$ eine Klasseneinteilung von H bilden (s. RÉDEI [3]). Leicht folgt ferner (s. WIEGANDT [4]), daß jetzt für jede Klasse αN und für ihre sämtlichen Elemente α' $(\in\alpha N)$ die Gleichung $\alpha' N=\alpha N$ gilt. Die Klasseneinteilung

(2) $$H=N,\ \alpha N,\ \beta N,\ \ldots$$

von H nennen wir jetzt die *linksseitige Klasseneinteilung von H nach N.* Im folgenden interessieren wir uns nur für die Klasseneinteilungen dieser Art.

Satz 1. *Es sei N eine Untergruppe einer Halbgruppe H mit Einselement ε, die das Einselement von H enthält. Dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

(A) *N ist linksnormal in H,*

(B) *$\alpha N=N\alpha$ gilt für jedes $\alpha(\in H)$,*

(C) *die linksseitige und rechtsseitige Klasseneinteilungen von H nach N sind übereinstimmend,*

(D) *N ist rechtsnormal in H.*

Beweis. (A)$\Longrightarrow$(B): Ist N linksnormal in H, so ist die Klasseneinteilung $H=N, \varrho N, \sigma N, \ldots$ kompatibel und die zugehörige Äquivalenzrelation ist eine Kongruenzrelation. Für $\alpha(\in H)$, $\nu(\in N)$ gilt $\nu\equiv\varepsilon$, also auch $\nu\alpha\equiv\equiv\varepsilon\alpha\equiv\alpha\varepsilon$. Daraus folgt $\nu\alpha\in\alpha N$ d. h. $N\alpha\subseteqq\alpha N$. Ähnlich erhalten wir $\alpha N\subseteqq N\alpha$, also $\alpha N=N\alpha$.

(B)$\Longrightarrow$(C): Diese Behauptung ist trivial.

(C)$\Longrightarrow$(A): Wenn die Klasseneinteilungen $H=N, \alpha N, \beta N, \ldots$ und $H=N, N\varkappa, N\lambda, \ldots$ übereinstimmend sind, existiert für jedes αN ein $\nu(\in H)$ mit $\alpha N=N\nu$. Dann gilt wegen $\alpha\in N\nu$ auch $N\alpha=N\nu$, also $\alpha N=N\alpha$ für jedes $\alpha(\in H)$. Wir zeigen, daß die zur Klasseneinteilung $H=N, \alpha N, \beta N, \ldots$ gehörige Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation ist. Hierzu betrachten wir eine Äquivalenz $\varrho\equiv\sigma\Longleftrightarrow\varrho N=\sigma N$. Für jedes $\mu(\in H)$ gilt $\mu\varrho N=\mu\sigma N$,

d. h. $\mu\varrho \equiv \mu\sigma$. Da $\alpha N = N\alpha$ $(\alpha \in H)$ ist, folgt noch $\varrho\mu N = \varrho N\mu = \sigma N\mu = \sigma\mu N$ also $\varrho\mu \equiv \sigma\mu$.

Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen (B) und (C) sind die Implikationen (D)$\Longrightarrow$(B) und (C)$\Longrightarrow$(D) ähnlich ableitbar. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Menge der Klassen von der Form αN $(\alpha \in H)$ von H nach N bezeichnen wir durch H/N. Definieren wir die Multiplikation in H/N durch die Gleichung $\alpha N \cdot \beta N = \alpha\beta N$, so ist H/N eine Halbgruppe, die wir, wie es üblich ist, die Faktorhalbgruppe von H nach N nennen.

Wir beweisen leicht noch den folgenden

Satz 2. *Enthalten die Untergruppen M, N einer Halbgruppe H das Einselement ε von H und sind sie linksnormal in H, so ist MN und im regulären Fall*[1]) *auch $M \cap N$ linksnormal in H.*

Beweis. Nach Satz 1 gilt $MN = NM$. Daraus folgt $(MN)^2 = MNMN = M^2N^2 = MN$ und ersichtlich $\varepsilon \in MN$. Anderseits ist $\nu^{-1}\mu^{-1}$ $(\nu \in N, \mu \in M)$ wegen $NM = MN$ ein Element von MN und dies ist das Inverse von $\mu\nu (\in MN)$ in MN.[2]) Also ist MN eine Untergruppe von H mit Einselement ε. Wegen $\varrho MN = M\varrho N = MN\varrho$ $(\varrho \in H)$ ist MN linksnormal in H.

Der Durchschnitt $M \cap N$ der Gruppen M, N ist auch eine Gruppe und $\varepsilon \in M \cap N$. Für ein reguläres H ist wegen $\varrho(M \cap N) = \varrho M \cap \varrho N = M\varrho \cap N\varrho = (M \cap N)\varrho$ auch $M \cap N$ linksnormal in H. Damit haben wir den Beweis des Satzes beendet.

Für die Halbgruppen mit Einselement hat E. S. LJAPIN [1] den Begriff der normalen Unterhalbgruppe folgenderweise eingeführt. Es sei H eine Halbgruppe mit Einselement und N eine Unterhalbgruppe von H, die das Einselement von H enthält. N ist normal im Sinne von LJAPIN in H, wenn für beliebige Elemente $\alpha, \beta (\in H)$, $\nu (\in N)$

$$\alpha\nu\beta \in N \Longleftrightarrow \alpha\beta \in N$$

erfüllt. Wir bemerken, daß eine das Einselement von H enthaltende, im Sinne von RÉDEI normale Untergruppe von H auch im Sinne von LJAPIN normal ist. Wirklich, seien $\alpha, \beta \in H$, $\nu \in N$ und $\alpha\nu\beta \in N$, dann gibt es nach Satz 1 ein Element $\mu (\in N)$ mit $\alpha\nu\beta = \mu\alpha\beta$ und auch $\alpha\beta = \varepsilon\alpha\beta = \mu^{-1}\mu\alpha\beta = \mu^{-1} \cdot \alpha\nu\beta \in N$ (μ^{-1} bedeutet das Inverse von μ in der Gruppe N) gilt. Umgekehrt, nehmen wir an, daß $\alpha\beta \in N$ ist und sei $\nu \in N$. Dann gibt es $\nu' (\in N)$ mit $\alpha\nu\beta = \nu'\alpha\beta$, daraus folgt $\alpha\nu\beta \in N$. Also ist N tatsächlich normal auch im Sinne von LJAPIN.

---

1) Regulär heißt eine Halbgruppe, in der die Kürzungsregeln gelten.

2) μ^{-1} und ν^{-1} bedeuten das Inverse von μ bzw. ν in der Gruppe M bzw. N.

Es sei N eine Untergruppe der Halbgruppe H mit Einselement, die das Einselement von H enthält und normal im Sinne von RÉDEI ist. Nach LJAPIN [1] definieren wir in H die folgende Relation: Es gelte $\varrho \sim \sigma$ dann und nur dann, wenn $\mu, \mu' (\in N)$ mit $\varrho\mu = \mu'\sigma$ existieren. Wir zeigen, daß die zur Relation $\varrho \sim \sigma$ gehörige Klasseneinteilung von H und die Klasseneinteilung von H nach N übereinstimmen. Es sei, nämlich $\varrho \equiv \sigma \Longleftrightarrow \varrho, \sigma \in \alpha N$. Dann gibt es Elemente $\nu, \nu' (\in N)$ mit $\varrho = \alpha\nu$, $\sigma = \alpha\nu'$. Sei $\varkappa \in N$ mit $\nu = \varkappa\nu'$, dann gilt $\varrho\varepsilon = \varrho = \alpha\nu = \alpha\varkappa\nu' = \varkappa'\alpha\nu' = \varkappa'\sigma$ $(\varkappa' \in N)$ und somit ist $\varrho \sim \sigma$. Umgekehrt, nehmen wir an, daß $\varrho \sim \sigma$ gilt, d. h. existieren $\varkappa, \lambda (\in N)$ mit $\varrho\varkappa = \lambda\sigma$. Dann gilt $\sigma = \lambda^{-1}\varrho\varkappa = \varrho\tau\varkappa$ $(\tau \in N)$ und daraus folgt $\sigma \in \varrho N$, ist also $\varrho \equiv \sigma$ erfüllt.

Aus diesen und aus den Sätzen 3.7 und 5.1 von LJAPIN [1] erhalten wir die

Folgerung. *Durchläufe N die Menge der (im Sinne von* RÉDEI) *normalen Untergruppen*[3]) *der Halbgruppe H mit Einselement, die das Einselement von H enthalten. Dann entweder gibt es keine Gruppe unter den Faktorhalbgruppen H/N der Halbgruppe H, oder ist jede Faktorhalbgruppe H/N eine Gruppe.*

Literaturverzeichnis

[1] Е. С. Ляпин, Ядра гомоморфизмов ассоциативных систем, Мат. сборник, **20** (62) (1947), 497—514.

[2] L. RÉDEI, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 252—273.

[3] L. RÉDEI, *Algebra.* I (Leipzig, 1959), Satz 69, Seite 127.

[4] R. WIEGANDT, On complete semi-groups, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 93—97.

(Eingegangen am 22. Februar 1960)

[3]) D. h. N ist eine normale Unterhalbgruppe von H, die gleichzeitig eine Gruppe ist.