Bemerkung über die einstufig nichtregulären Ringe

Von RICHARD WIEGANDT in Orosháza (Ungarn)

Herrn Professor L. Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Professor RÉDEI hat in seiner Arbeit [1] die einstufig nichtregulären Ringe definiert und charakterisiert. Nach ihm nennen wir einen Ring einstufig nichtregulär, wenn er nichtregulär ist und seine echten Unterringe regulär sind. (Regulär heißt ein Ring, wenn er nullteilerfrei ist.) Die sämtlichen einstufig nichtregulären Ringe sind nach [1] die Zeroringe von Primzahlordnung und die direkten Summen von zwei endlichen Primkörpern.

Auf Grund dieses Ergebnisses können wir die einstufig nichtregulären Ringe auch anders charakterisieren.

Satz 1. *Für jeden Ring R sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(1) *R ist einstufig nichtregulär,*

(2) *R ist kein Schiefkörper und die sämtlichen echten Unterringe von R sind Schiefkörper,*

(3) *R ist ein Zeroring von Primzahlordnung oder die direkte Summe von zwei endlichen Primkörpern.*

Zu dem Beweis gebrauchen wir den folgenden

Satz 2. *Für jeden Ring R sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

(a) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Linksideal von R ist ein Schiefkörper,*

(b) *R ist ein Zeroring von Primzahlordnung oder die direkte Summe von zwei Schiefkörpern.*

Außerdem beweisen wir den folgenden

Satz 3. *Für einen Artinschen Ring R (d. h. R erfüllt die Minimalbedingung für die Linksideale) sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(1°) *R ist nichtregulär und jedes echte Linksideal von R ist regulär,*

(2°) *R ist kein Schiefkörper und jedes echte Linksideal von R ist ein Schiefkörper,*

(3°) *R ist ein Zeroring von Primzahlordnung oder die direkte Summe von zwei Schiefkörpern.*

Zuerst beweisen wir Satz 2. Aus Bedingung (b) folgt (a) unmittelbar.

Umgekehrt, nehmen wir an, daß der Ring R die Bedingung (a) erfüllt. Dann ist R ein Artinscher Ring.

Es bezeichne $\mathfrak{n}$ das Radikal von R. Nur die Fälle $\mathfrak{n}=R, 0$ sind möglich, denn sonst wäre $\mathfrak{n}$ ein echtes Linksideal von R mit lauter nilpotenten Elementen, entgegen der Voraussetzung.

Im Fall $\mathfrak{n}=R$ sind alle Elemente von R nilpotent. Wegen der Annahme enthält dann der Ring R keine echten Linksideale, also ist der Ring R nach einem Satz von T. SZELE [2] ein Zeroring von Primzahlordnung.

Im Fall $\mathfrak{n}=0$ ist R halbeinfach, also gilt nach dem Satz von WEDDERBURN—ARTIN eine Zerlegung

$$R=S_1+\cdots+S_k \qquad (k\geqq 1)$$

in eine direkte Summe von vollen Matrixringen $S_1,\ldots,S_k$ über Schiefkörpern. Jedoch müssen diese Matrixringe den Rang 1 haben, d. h. lauter Schiefkörper sein, denn sonst hätte R echte Linksideale mit Nullteilern. Da ferner R nullteiler hat, so muß $k>1$ sein. Da die echten Linksideale von R nullteilerfrei sind, so muß $k=2$ bestehen. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

Jetzt können wir schon Satz 1 beweisen. Nach dem Satz von RÉDEI [1] sind die Bedingungen (1) und (3) äquivalent. Wir zeigen aus, daß die Bedingungen (2) und (3) auch äquivalent sind.

Aus (3) folgt (2) unmittelbar. Umgekehrt, nehmen wir an, daß der Ring R die Bedingung (2) erfüllt. Da die echten Linksideale von R Schiefkörper sind, so ist R wegen Satz 2 ein Zeroring von Primzahlordnung oder die direkte Summe von zwei Schiefkörpern S_1, S_2. Wegen der Voraussetzung sind die echten Unterringe von R nullteilerfrei, also müssen die Schiefkörper S_1, S_2 endliche Primkörper sein. Somit ist der Satz bewiesen.

Endlich beweisen wir Satz 3. Wegen Satz 2 sind die Bedingungen (2°) und (3°) äquivalent, ferner folgt (1°) aus (3°) trivial. Umgekehrt nehmen wir die Bedingung (1°) an. Jetzt muß das Radikal $\mathfrak{n}$ von R entweder R oder 0 sein. Wegen der Annahme kann der Ring R im Fall $\mathfrak{n}=R$ keine echten Linksideale enthalten, also ist R ein Zeroring von Primzahlordnung. Im Fall $\mathfrak{n}=0$ ist R halbeinfach, also gilt eine Zerlegung

$$R=T_1+\cdots+T_n \qquad (n\geqq 1)$$

in eine direkte Summe von vollen Matrixringen $T_1, \dots, T_n$ über Schiefkörpern. Diese Matrixringe müssen Schiefkörper sein, denn sonst hätte R echte Linksideale mit Nullteilern. Da R Nullteiler hat, so muß $n > 1$ sein. Da die echten Linksideale von R regulär sind, muß $n = 2$ sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei, Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 238—244.
[2] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1949), 783—789.

(Eingegangen am 19. Februar 1960)