Pythagoras tantétele

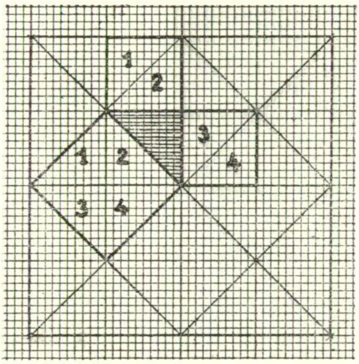
Tanítás a polgári fiúiskola IV. osztályában.
(Két egymásután következő óra anyaga.)
(I. rész: a tantétel ismertetése; II. rész: a tétel begyakorlása és további taglalása.)

I.

1. *Kapcsoló ismétlés.* A III. osztályban tanultunk a háromszögekről. Milyen idomot nevezünk háromszögnek? Hogy betűzzük meg a háromszöget? (Az idom csúcsaihoz az óramutató járásával ellenkező irányban egy-egy nagy betűt írunk.) Oldalaik szerint milyen háromszögeket ismerünk? Mennyi a háromszögben a szögek összege? Milyen alkotórészekből tudunk háromszöget szerkeszteni? Milyen háromszöget nevezünk derékszögű háromszögnek? Hogy nevezzük a derékszögű háromszög oldalait? Mennyi a derékszögű háromszögekben a szögek összszege? Hány adatból tudunk derékszögű háromszöget szerkeszteni? (Két adatból, miért nem három adatból?) Pl. hogy szerkesztenénk derékszögű háromszöget, ha annak egyik befogója 6 cm, a másik befogója 8 cm? Hogy szerkesztenénk derékszögű háromszöget pl. 12 cm-es befogóból és 13 cm-es átfogóból? (A 12 cm-es befogó egyik pontján merőlegest állítanánk és a befogó másik pontjából a rajzolt merőlegest 13 cm-es körzőnyílással lemetszenénk.) Mit tanultunk a harmadik osztályban az átmérőre rajzolt kerületi szögekről? Ki tudná már most az előbbi szerkesztést ennek a tételnek az alkalmazásával megoldani? (A 13 cm-es átmérő felezési pontjában rajzolt félkört az átmérő egyik végpontjából 12 cm-es körzőnyílással lemetszük. A metszéspontból az átmérő két végpontjához húzott egyenes az átmérővel derékszögű háromszöget alkot.) Mit tanultunk az egyenlőszárú derékszögű háromszögről? (Két befogója egyenlő, hegyes szögei 45°-osak, megszerkesztéséhez csak egy adatra, — vagy az átfogóra, vagy a befogóra — van szükségünk.) Pl. hogy szerkesztünk egy 10 cm-es átfogóval egyenlőszárú derékszögű háromszöget? (A 10 cm-es átfogóra, mint átmérőre félkört rajzolunk s a kör középpontjában merőlegest állítunk; vagy, ha a 10 cm-es átfogó két végéhez 45°-os szögeket rajzolunk.)

2. *A probléma felvetése.* A III. osztályban tanultunk már a derékszögű háromszögek egy nevezetes tételéről. Milyen nevet adtunk e tételnek? A mai órán szintén ezzel a tétellel fogunk foglalkozni. A tétel bizonyításánál most algebrai ismereteinket is fel fogjuk használni s arra törekszünk, hogy új ismereteink felhasználásával mennél több gyakorlati feladatot is megoldhassunk. A mult órán arra kértelek benneteket, hogy

azokat a papírból kivágott ábrákat, melyekkel a III. osztályban Pythagoras tételét megismertük — hozzátok magatokkal. Az első ábra értelmét elmagyarázza N. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszöget rajzoltunk. Annak két egyenlő befogójára és az átfogójára négyzeteket szerkesztettünk. Megrajzoltuk a kapott négyzetek átlóit. Ollóval kivágtuk az átfogóra rajzolt négy egyenlőszárú háromszöget s azokat a befogókra rajzolt két négyzet háromszögeire helyeztük. Az átfogóra rajzolt négyzet területe olyan nagy volt, mint a befogókra rajzolt két négyzet területe együttvéve. (Megjegyzés. Ezt a bizonyító eljárást a tanulók milliméterpapír-füzeteibe rajzolt mellékelt ábrával még külön is igen szemléletessé tehetjük.) *(1. ábra.)*

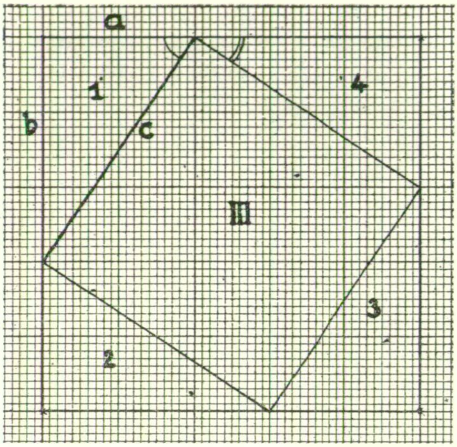


1. ábra.

Most egy tanuló előveszi a mult tanévben felhasznált másik kivágott ábrát is s elmondja, hogy annak segítségével hogyan igazoltuk Pithagoras tantételének helyességét: 3 és 4 cm-es befogókkal egy derékszögű háromszöget rajzoltunk, megmértük az így kapott háromszög átfogóját s azt pontosan 5 cm-nek találtuk. A befogókra és az átfogóra négyzeteket rajzoltunk s a háromszög oldalainak és a kapott négyzetek egy-egy oldalának cm-enkénti osztáspontjaiból két vonalzó segítségével húzott egyenesekkel a három négyzetet cm^2-ekre osztottuk. A két befogóra rajzolt négyzetben $9+16 \text{ cm}^2$, az átfogóra rajzolt négyzetben 25 cm^2-t olvastunk meg. Eszerint igazolva láttuk, hogy a derékszögű háromszög befogóira rajzolt két négyzet területe együttvéve az átfogóra rajzolt négyzet területével egyenlő.

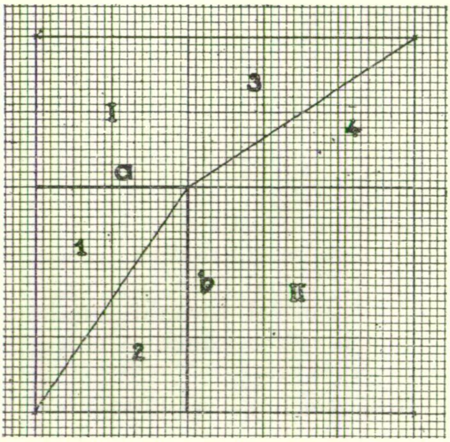
3. A probléma tárgyalása. Amint láttuk, Pithagoras tantételét eddig az egyenlőszárú derékszögű háromszögön és egy olyan derékszögű háromszögön mutattuk be, melynek oldalai 3, 4 és 5 cm hosszúak voltak. A mai órán azt fogjuk beigazolni, hogy ez a fontos tétel, — mellyel további tanulmányaink folyamán még a IV. osztályban is sokszor találkozunk — bármilyen derékszögű háromszögre érvényes.

A tanulók milliméterpapir-füzeteikbe rajzolnak, vagy még sokkal célszerűbb, ha e célra a női kézimunka tanításánál használatos 2 m/m-es oldalakkal biró négyzetes beosztású papirost használunk. Mi e feladatot ilyen papiron oldottuk meg, *(2. és 3. ábra,* az eredetihez képest 1/2-szeres kisebbítéssel), de használható a rajzoláshoz közönséges csomagolópapiros is, ez esetben azonban még külön szerkesztéseket is kell végeznünk. (Ami egyébként igen ajánlatos.) Célszerű, ha a tanár az ábrákat nagy alakban csomagoló papirosra előre megrajzolja s azokat rajzszögek segítségével a táblára felerősíti. A tanulók az ábrák megrajzolását a tanár utasításai alapján végzik el.



2. ábra.

Megállapítják, hogy a 2. és 3. ábrában felrajzolt négyzetek területe egyenlő, mindkettő 25 területegység. Elmondják, hogy az első, 5 egységnyi oldalú négyzetbe négy derékszögű háromszöget rajzoltunk be; a derékszögű háromszögek befogói 2, —



3. ábra.

illetőleg 3 egység. Megállapítják, hogy a második négyzetbe előbb 2, illetőleg 3 egységnyi oldalakkal biró két téglalapot rajzoltak be s azokat az átlók meghúzásával bontották fel négy 2, illetőleg 3 egységnyi befogókkal biró derékszögű háromszögekre. Most a tanulók előveszik ollóikat s levágják az első négyzet (2. ábra) négy (1—4) egybevágó háromszögét. (A tanár a táblán a négy derékszögű háromszöget szintén leveszi.) A négy derékszögű háromszöget egymásra helyezik és megállapítják, hogy azok egybevágók. (A háromszögek egybevágóságát a 2—2 befogó s a befogók által közbezárt szögek egyenlőségéből még külön is megállapítják.) Az első négyzet négy egybevágó háromszögének levágása után egy idomot kaptunk. (III.) Milyen idom ez? Négyzet. Tényleg négyzet ez? Igen. Oldalai egyenlők, mert azok a levágott háromszögek befogóival egyenlők. Szögei derékszögek. Ezt pontosan meg kell állapitanunk. A megállapitásnál két utat követünk. Először derékszögű faháromszögünk derékszögét a négy szögbe behelyezzük. Mind a négy szög 90°-os. De rávezethetjük a tanulót arra is, hogy a négyzet bármelyik csúcsánál lévő 3 szög közül, — melyek összege 180° —, az egyíves és kétíves szög összege (egy derékszögű háromszög két hegyes szöge) csak 90° lehet. Világos ezek után, hogy a négyzet egy-egy szögére is 90° jut.

Ezekután most már bizonyos, hogy az első 5 egységnyi oldallal felrajzolt négyzetből a négy egybevágó háromszög levágása után a 2, illetőleg 3 egységnyi befogókkal biró derékszögű háromszögek átfogóival megrajzolt négyzet maradt meg.

Hasonló módszerrel dolgozunk a másik ábránál (3. ábra.) Levágatjuk a négy derékszögű háromszöget. Megállapíttatjuk azok egybevágóságát is. Megkérdezzük, mi maradt most meg? Egy kisebb és egy nagyobb négyzet. Ezek közül az egyik a 2 cm-es, a másik a 3 cm-es befogóval szerkesztett négyzet.

Irjuk fel a táblára a szemléletek eddigi eredményeit. A felsorolt első négyzet részei, (mutatjuk és írjuk:)

$$4.\ \frac{ab}{2} + c^2$$

A vele egyenlő területű második négyzet részei, (mutatjuk és írjuk:)

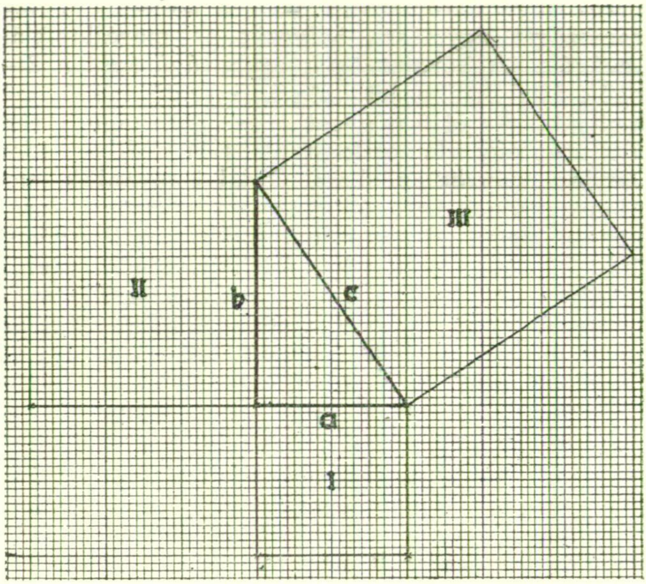
$$4.\ \frac{ab}{2} + a^2 + b^2$$

Elvettük mindkét négyzetből a négy derékszögű háromszöget, (mutatjuk és írjuk:) maradt:

az első helyen c^2 a második helyen $a^2 + b^2$

Eszerint: $c^2 = a^2 + b^2$

Olvassuk le az egyenlőség értelmét. A három négyzetet rakják fel a tanulók egyik derékszögű háromszögük oldalaira. *(4. ábra.)* Ez Pythagoras tantétele. Négyzeteinket tetszőleges méretekkel vettük fel. A négyzetekből levágott derékszögű háromszögek is tetszőlegesek voltak. Eszerint Pythagoras tantétele bármelyik derékszögű háromszögre érvényes. A tanulók kivágott ábráikat tegyék egy borítékba, írják rá, mi van a borítékban s írják rá a mai óra dátumát is. A borítékot helyezzék el mértani füzetjeikbe. A tételt pontos szövegezésben írják le.



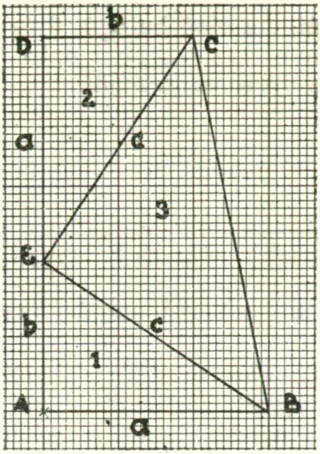
4. ábra.

E helyen említjük meg Pythagoras tantételének *lényegében* a fenti eljárással teljesen megegyező, bár a konkrét szemlélet szempontjából absztraktabb, másrészről azonban igen szellemes bizonyítását. Két kongruens derékszögű háromszöget és az ezek átfogóival rajzolt egyenlőszárú derékszögű háromszöget helyezzünk egymásmellé a következőképpen: *(5. ábra.)* Azok egy trapezalakú (ABCD) idomot formáltak. Most írjuk fel az így formált trapez területét: a két párh. oldal összegét $(a+b)$ szoroztuk a magassággal $(a+b)$ és a szorzatot osztottuk 2-vel.

Az eredményt leírtuk: $\dfrac{(a+b)\,(a+b)}{2}$

Másrészről a kirakott trapez 3 idomból áll. Ezek területe különkülön:

$$\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2}, \frac{c^2}{2}.$$



5. ábra.

Kétségtelen, hogy ezen alábbi területek összege a trapez már felírt területével egyenlő:

$$\frac{(a+b)\,(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Az egyenlőség minden tagját kétszer vesszük:

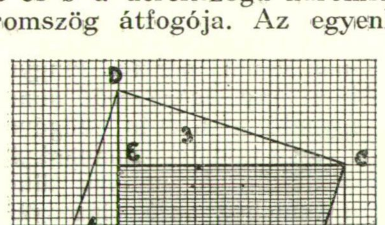
$$(a+b)\;(a+b) = ab + ab + c^2$$

Vagy ami ugyanaz:

$$(a+b)^2 = 2\,ab + c^2\;;\; a^2 + 2\,ab + b^2 = 2\,ab + c^2\;;$$

eszerint: $\underline{a^2 + b^2 = c^2\;;}$

a és *b* a derékszögű háromszögek befogói, *c* a derékszögű háromszög átfogója. Az egyenlőség tehát Pythagoras tantétele.



6. ábra.

4. *Összefoglalás.* Mondassuk el a tanulókkal a mai órán letárgyalt tétel (2., 3. és 4. ábra) menetét.)

5. *Házi feladat. a)* Most rajzoljuk fel a táblán a mellékelt ábra vázlatát. (6. ábra.) Annak elkészítésére adjuk meg a szükséges útbaigazításokat. A tanulók odahaza használt rajzpapiros tiszta oldalára rajzolják fel az ábrát pontosan.

b) Szerkesszenek ezen kívül a tanulók a jövő órára két derékszögű háromszöget. Az első befogói 6 és 8 cm, a második befogói 4·5 és 6 cm hosszúak. A jövő órán a tanítást ezeknek a feladatoknak számbavételével kezdjük.

Kratofil Dezső.

A fény törése és az optikai lencsék

Három tanítási óra a gyakorló polgári iskola III. osztályából.

A következőkben lehetőleg hűen közöljük a fenti egységnek 3 órán lefolyt tárgyalását. Tételünkre a fizika egész anyagához mérten kevés óraszám miatt több időt nem fordíthattunk. Ha emiatt ragaszkodtunk Utasításunk »legfontosabb«, »legszükségesebb« és »legjelentősebb« megszorításaihoz, azonkívül tekintetbe vesszük azt is, hogy tanításunkba beleszól a tanuló is, érthető lesz, ha sokan azt mondják reá, én nem így csinálltam volna. Bizonyos, hogy minden következő évben más- és másképen fog e 3 óra alakulni nálam is, mert hiszen a tanítást részben irányító tanulók is változnak.

A 3 óra lefolyásában változatos. Az első olyan óra, amelyen tanári demonstráció és tanulókisérlet felváltja egymást, a második óra tanári igazoló kisérletek, a harmadik óra tisztán tanulókisérletekre épül.

Tételünk előtt foglalkoztunk a fény visszaverődésével, a sík-, domború és homorú tükrök jelenségeivel. Az óra elején tehát főbb pontjait átismételjük felelés formájában.

Mi tesz minden nem világító tárgyat láthatóvá? Az a tény, hogy a tárgyak a reájuk eső fényt szemünkbe visszaverik. Milyen vonalon halad a fény? Egyenes vonal mentén. Hogyan téríthetjük el útjából? Tükrökkel. Mi a fény visszaverődésének törvénye? A visszaverődés szöge egyenlő a beesés szögével. Melyik tükör nem változtatja meg a sugarak párhuzamosságát, összetartását vagy széttartását? A síktükör. A homorú tükör hogyan változtatja meg a sugarak egymáshoz való viszonyát? A párhuzamosan érkező sugarakat összetartóvá teszi, s ezek egy ponton, a gyüjtő vagy gyujtóponton haladnak át. A széttartó sugarakat, ha a fényforrás a gyujtótávolságnál messzebb van, szintén összetartóvá teszi, s ahol ezek találkoznak, ott megtalálható a fényforrás valódi, fordított képe. A gyujtópontból induló széttartó sugarakat párhuzamosan veri vissza. A széttartó sugarak csak akkor maradnak széttartók, ha a fényforrás a tükör és gyujtópontja között van. A tükör háta mögött képzeletben való meghosszabbításuk egy pontban találkozik. Ott