Mi következik abból, hogy a hegyek össze-vissza állanak a Balkán-félszigeten? (Politikai szétdaraboltság.) Hasonlítsuk össze a Balkán-félsziget felszínét hazánk felszínével! Miért esik sok eső a Skandináv-Alpok nyugati lejtőin? Miért osztott a Balkánfélsziget vízrajza? Sorold el az ottani folyóvizeket! Miért szállítanak hazánkból Svájcba gabonaféléket? Melyek a Tisza mellékfolyói? Miért ered sok folyó a Kárpátokban? Miért épült Nagyvárad oda, ahol van? Miért nem élhet sok ember a hegyvidékeken? stb., stb.

E kérdéssel is —tapasztalat szerint — valóban érdemes foglalkozni.

Udvarhelyi Károly.

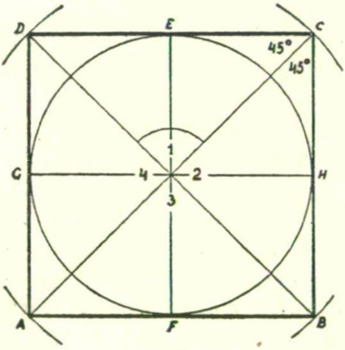
Mennyiségtan.

A négyzet és a téglalap.

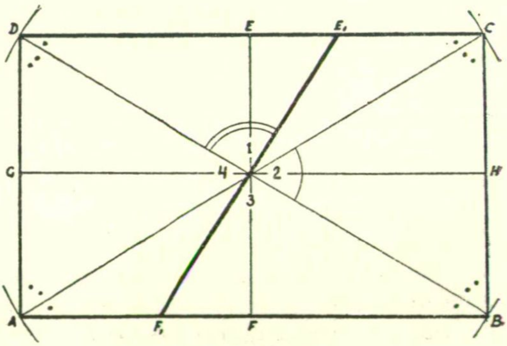
A polgári fiuiskola I. osztályában.

1. A négyzetről és a téglalapról már tanultunk. Foglaljuk össze és bővítsük ki a négyzetről és téglalapról tanultakat. Rajzoljunk ezért egymás mellé két derékszöget.

(A derékszögek megszerkesztését végezhetjük két háromszögvonalzóval, vagy egy vonalzóval és közővel. Ez utóbbi esetben a meghúzott egyenesek *A* végpontjában ismert módon 90°-os szöget kell szerkesztenünk.) (1. és 2. ábra.)



1. ábra.



2. ábra.

Most az A csúcspontból az első derékszög szárára mérjünk rá 4—4 cm-t, a második derékszög szárára 6, illetve 4 cm-t. A szögek szárain B és D pontokat kaptuk. Derékszögű vonalzónkkal emeljünk merőlegeseket a B és D pontokban. A merőlegesek mindkét ábrán C pontban metszik egymást. (A tanár az ábrákat pl. 6-szoros nagyításban a táblára rajzolja.) A szerkesztés szerint az AD és BC egyenesek az AB egyenesre, az AB és DC egyenesek pedig az AD egyenesre merőlegesen állanak. Mivel egy adott egyenesre merőlegesen húzott egyenesek egymással párhuzamosak, azért felírhatjuk, hogy mindkét ábrában AB || DC, és AD || BC.

Eszerint olyan négyszögeket kaptunk, amelyekben a szemközt fekvő oldalak párhuzamosak.

Az olyan négyszögeket, amelyekben a szemközt fekvő oldalak párhuzamosak, egyenlőközű (párhuzamosoldalú) négyszögeknek, vagy *parallelogrammáknak* nevezzük.

A felrajzolt két idom tehát egyenlőközű négyszög, parallelogramma.

A négyszögek további tulajdonságainak megvizsgálására húzzuk meg a parallelogrammákban az átlókat.

Egy átló a parallelogrammákat 2—2, két átló 4—4 háromszögre bontja.

Az átlók O pontban metszik egymást.

2. Most az első parallelogrammára vonatkozólag végezzük el a következő kísérleteket.

Helyezzünk el egy átlátszó papirost a négyszög OCD háromszögére s jelöljük meg azon ceruzánk hegyével az O, C és D pontokat, majd rajzoljuk meg és vágjuk ki ollóval az átlátszó papírból az OCD háromszöget. Fektessük a kivágott OCD háromszöget a felrajzolt idomra úgy, hogy az egyjelzésű pontok egymásra kerüljenek. Most szúrókörzőnk hegyét szúrjuk a kivágott háromszög O-pontjába, (a körző hegyét O pontból a CD oldal felé egy kissé beljebb kell tennünk) s forgassuk rá ezt a háromszöget sorban a felrajzolt idom OBC, OAB és ODA háromszögeire.

A körülforgáskor OCD háromszög a felrajzolt négyszög többi háromszögeit pontosan elföldte.

Ebből következik, hogy:

1. CD=BC=AB=DA, azaz: *a felrajzolt négyszög oldalai egyenlők;*
2. OC=OB=OA=OD, azaz *a négyszög átlóinak (O) metszéspontja a négyszög csúcsaitól egyenlő távolságra van; a négyszög átlói egyenlők s megfelezik egymást;*
3. a négyszög átlóinak O metszéspontjánál lévő 1, 2, 3 és 4 jelzésű szögek egyenlők, s mivel ezeknek a szögeknek összege 360°; az 1, 2, 3, 4 jelzésű szög mindegyike 90°-os (derékszög), ami azt jelenti, hogy *a felrajzolt négyszög átlói egymásra merőlegesen állanak;*
4. Az OCD, OBC, OAB és ODA egybevágó háromszögek egyenlőszárú derékszögű háromszögek s így *a négyszög csúcsainál két-két 45°-os szög, illetőleg egy-egy derékszög van.*

Összefoglalva a fentieket: A felrajzolt négyszög olyan parallelogramma, amelynek mind a négy oldala egyenlő s szögei derékszögek. Az ilyen négyszögnek *négyzet* a neve.

Négyzetnek nevezzük azt a parallelogrammát, melynek oldalai egyenlők, szögei derékszögek.

A négyzet átlói egyenlők, megfelezik egymást és egymásra merőlegesen állanak. A négyzet átlóinak (O) metszéspontja a négyzet csúcsaitól egyenlő távolságra van, eszerint ebből a pontból a négyzet köré kört rajzolhatunk. A négyzet átlói a négyzetet 4 egybevágó derékszögű egyenlőszárú háromszögre bontják. — A négyzet csúcsainál az átló két oldalán fekvő szögek egyenlők, azaz 45°-osak.

3. Most végezzük el az alábbi kísérleteket a felrajzolt második parallelogrammára vonatkozólag.

Helyezzünk el egy átlátszó papirost a második parallelogramma BCD háromszögére s jelöljük meg azon ceruzával a B, C, D, és az O pontokat, majd rajzoljuk meg és vágjuk ki ollóval a BCD háromszöget és húzzuk meg azon színes irónnal az OC egyenest is. Most fektessük a kivágott BCD háromszöget a felrajzolt idomra úgy, hogy az egyjelzésű pontok egymásra kerüljenek és szúrókörzőnk segítségével az O pont körül 180°-os elfordulással forgassuk azt rá a DAB háromszögre, mikor a ráforgatott idom C szöge az eredeti idom A szögére, BC oldala a DA és CD oldala az AB oldalra és az OC átlórész az OA átlórészre kerül.

A felrajzolt négyszög A, B és D szöge a szerkesztés szerint derékszög s mivel a C szög elfödte az A szöget, következik, hogy az A, B, C, D parallelogrammában *mind a négy szög derékszög* és a szögek összege 360°.

Az átforgással továbbá a BCD háromszög BC oldala a felrajzolt négyszög DA-, CD-oldala az AB oldalával került fedésbe; e szerint az ABCD parallelogrammában a *szemközt fekvő oldalak egyenlők*, BC=DA; CD=AB.

Az ilyen parallelogrammának *téglalap* a neve.

Téglalapnak nevezzük azt a parallelogrammát, melynek szemközt fekvő oldalai egyenlők s szögei derékszögek.

Az átlók a téglalapot négy háromszögre osztják fel. Az átforgatással meggyőződhetünk, hogy az OCD háromszög az OAB háromszögre és az OBC háromszög az ODA háromszöggel került fedésbe, e szerint a téglalap átlói a téglalapot olyan négy háromszögre bontják, melyek közül a 2—2 szembenfekvő háromszög egybevágó.

Az átforgatással továbbá arról is meggyőződhetünk, hogy az OC átforgatott átlórész az OA átlórésszel került fedésbe, e szerint a BD átló a téglalap AC átlóját megfelezi, vagyis OC=OA; továbbá, hogy az OD átforgatott átlórész az OB és az OB átlórész az OD átlórésszel került fedésbe, azaz OB=OD, e szerint az AC átló megfelezi az OD átlót. *A téglalapban tehát az átlók kölcsönösen megfelezik egymást.* Most, ha még egy jobbra való elfordulással az átforgatott háromszög BD átlóját a téglalap AC átlójához helyezzük, látni fogjuk, hogy *a téglalap* *átlói egyenlők* s hogy az egyik átló két fele, a másik átló két felével egyenlő.

Miután az átlók kölcsönösen megfelezik egymást s az átlók egyenlők, következik, hogy *az átlók O metszéspontja a téglalap négy csúcsától egyenlő távolságra van* (OC=OB=OA=OD), azaz a téglalap köré is kört rajzolhatunk.

A téglalap átlói nem állanak merőlegesen egymásra. Ezt úgy szemléltethetjük legegyszerűbben, ha a téglalap O pontjában a BD átlóra vonalzónkkal merőlegest (E_1 F_1) állítunk. A téglalap O csúcsánál csak a szemközt fekvő szögek egyenlők, amelyek közül az 1, 3 jelzésű szögek a derékszögnél nagyobbak, azaz tompaszögek, a 2, 4 jelzésű szögek pedig hegyes szögek. *A téglalap átlói e szerint ferdén állanak egymásra.*

Végül abból, hogy a téglalap O csúcsánál fekvő szögek közül az 1, 3 jelzésű szögek tompaszögek s a 2, 4 jelzésű szögek hegyes szögek, következik, hogy *a téglalap csúcsainál az átló két oldalán fekvő szögek nem egyenlők, s hogy ezek közül mindig a rövidebb oldalak mellett fekvő szög a nagyobb, a téglalap hosszabbik oldala mellett fekvő szög a kisebb.*

Összefoglalva a fentieket: Téglalapnak nevezzük azt a parallelogrammát, melyben a szembenfekvő oldalak egyenlők s szögei derékszögek. A téglalap átlói egyenlők, megfelezik egymást, de nem állanak merőlegesen egymásra. A téglalap átlóinak (O) metszéspontja a téglalap négy csúcsától egyenlő távolságra van, e szerint a O pontból a téglalap köré kört rajzolhatunk. A téglalap átlói a téglalapot négy egyenlőszárú háromszögre bontják; ezek közül a 2—2 szembenfekvő háromszög egybevágó. Az egybevágó háromszögek közül kettő tompaszögű, kettő hegyes szögű egyenlőszárú háromszög. A téglalap csúcsainál, az átló két oldalán fekvő szögek nem egyenlők és ezek közül a téglalap hosszabbik oldala mellett fekvő szög a kisebb s a kisebbik oldala mellett fekvő szög a nagyobb.

4. Rajzoljunk csomagoló papirosra egy négyzetet.

A négyzet megszerkesztéséhez egy oldal mértékszámát kell ismernünk.

Legyen az oldal hossza 5 cm. A tanár ugyanezt a szerkesztést végezze el 25 cm-es oldalakkal. Szerkesszük meg a négyzetet.

Húzunk egy egyenest és arra rámérünk 5 cm-t. A négyzet A és B pontját kaptuk. A négyzet AD oldala az AB egyenesre merőlegesen áll. Szerkesszünk az A pontban 90°-os szöget. Ennek merőleges szára az AD egyenes irányát mutatja. Az AD egyenes hossza szintén 5 cm. Mérjünk rá tehát az AD egyenesre 5 cm-t, megkaptuk a négyzet második (AD) oldalát és ezzel a megszerkesztendő négyzet A, B és D pontjait. A négyzet negyedik (C) csúcspontját kell még meghatároznunk. A négyzet negyedik csúcspontja a D és B csúcspontoktól egyaránt 5 cm távolságra van. Ezért 5 cm-es sugárral (körzőnyílással) a B és D pontoktól köríveket rajzolunk. A körívek C metszéspontja lesz a négyzet negyedik csúcsa.

5. Ollóval vágjuk ki ezt az idomot és *vizsgáljuk azt meg a szimmetria szempontjából.* (1. ábra.)

A régebben tanultak szerint tudjuk, hogy a négyzet középvonalaira szimmetrikus idom. Ezeket a szimmetria tengelyeket úgy kaptuk meg, hogy a négyzet 2—2 szembenfekvő oldalát egymásra hajtottuk és a hajtásvonalakat újjainkkal megrögzítettük. Ha a hajtásvonalak mentén a négyzetet először különkülön, majd egymásután kétszer összehajtjuk, a következőket állapíthatjuk meg:

a) a szimmetria tengelyek a négyzet szembenfekvő oldalainak (E, F és G, H) felezési pontjait (közepeit) kötik össze, ezért ezeket a szimmetria tengelyeket a négyzet *középvonalainak* nevezzük;

b) a középvonalak merőlegesen állanak a négyzet szemköztfekvő oldalaira s ezért a négyzet oldalaival egyenlők (párhuzamos egyenesek között a merőlegesek egyenlők);

c) a középvonalak kölcsönösen felezik egymást, merőlegesen állanak egymásra és a négyzetet négy olyan egybevágó kisebb négyzetre osztják, melyeknek egyik közös csúcsuk a középvonalak O metszéspontjában van.

d) a középvonalak metszéspontja egyenlő távolságra van a négyzet oldalaitól, ezért a négyzetbe az (O) középponttól kör rajzolható. A megrajzolt kör a négyzet oldalait az oldalak felezési E, F, G és H pontjaiban érinti.

6. A középvonalakon kívül a négyzetnek még más szimmetria tengelyei is vannak. Ezeket legkönnyebben úgy kapjuk meg, hogy a négyzet szemközt fekvő A, C és B, D csúcsait összeillesztjük s a hajtás vonalakat újjainkkal lesímítjuk. Az összehajtások után megállapíthatjuk: hogy ezek a szimmetria tengelyek a négyzet átlóival esnek egybe; *a négyzetben a két középvonal mellett, a két átló is szimmetria tengely.*

Rajzoljunk csomagoló papirosra egy téglalapot.

A téglalap megszerkesztéséhez a két szomszédos oldal mértékszámát kell ismernünk.

Legyen a téglalap hosszabbik oldala 8 cm, a rövidebbik oldala 5 cm. A tanár rajzolja fel ezt az ábrát 5-szörös nagyításban. Szerkesszük meg a téglalapot.

Húzunk egy egyenest és arra rámérünk 8 cm-t. A téglalap A és B csúcspontjait kaptuk. A téglalap AD oldala az AB egyenesre merőlegesen áll. Szerkesszünk azért az A pontban egy 90°-os szöget. Ennek a szögnek merőleges szára az AD egyenes irányát mutatja. Az AD egyenes hossza 5 cm. Mérjünk rá tehát az AD egyenesre 5 cm-t. Megkaptuk a téglalap második (AD) oldalát és ezzel a megszerkesztendő téglalap A, B és D pontjait. A négyzet negyedik csúcspontja a D csúcstól 8, a B csúcstól 5 cm-nyi távolságra van. Ezért 8 cm-es körzőnyílással a D és 5 cm-es körzőnyílással a B ponttól körívet rajzolunk. A körívek C metszéspontja lesz a téglalap negyedik csúcsa.

7. Ollóval vágjuk ki ezt az idomot s vizsgáljuk azt meg *a szimmetria szempontjából* (2. ábra.)

Az előbbiekben láttuk már, hogy a téglalap középvonalaira szimmetrikus idom. Ezeket a szimmetria tengelyeket úgy kaptuk meg, hogy a téglalap 2—2 szemberfekvő oldalát egymásra hajtottuk s a hajtásvonalakat újjainkkal megrögzítettük.

Ha a hajtásvonalak mentén a téglalapot először külön-külön majd egymásután kétszer össze összehajtjuk, a következőket állapítjuk meg:

a) a szimmetria tengelyek a téglalap szembenfekvő oldalainak (E, F és G, H) felezési pontjait kötik össze, ezért ezeket a szimmetria tengelyeket a téglalap *középvonalainak* nevezzük:

b) a középvonalak merőlegesen állanak a téglalap szemközt fekvő oldalaira s ezért (mivel a párhuzamosok között a merőlegesek egyenlők), a téglalap nagyobbik középvonala a téglalap hosszabbik, rövidebb középvonala a téglalap rövidebbik oldalával egyenlő;

c) a középvonalak kölcsönösen felezik egymást, merőlegesen állanak egymásra és a téglalapot olyan négy egybevágó, kisebb téglalapra osztják, melyeknek egyik közös csúcsuk a középvonalak O metszéspontjában van;

d) a középvonalak (O) metszéspontja a téglalap rövidebb oldalaitól távolabbra van, mint a téglalap hosszabbik oldalaitól, ezért a téglalap O pontjából a téglalapba kör nem rajozlható.

Most vizsgáljuk meg, hogy a téglalapnak a középvonalakon kívül van-e még más szimmetria tengelyük is. A négyzetnél az átlók is szimmetria tengelyek voltak. Vizsgáljuk meg ilyen szempontból a téglalapot is. (3. ábra.)

Húzzuk meg a téglalap egyik (AC) átlóját s az átló mentén hajtsuk össze a téglalapot. Ha az átló szimmetria tengelye lenne, akkor a téglalap ACD és ACB háromszögei fedésbe kerülnének, azaz a D pont a B pontra jutna. Ez, amint láttuk, nem történt meg, e helyett az ACD háromszög az ACD_1 helyzetbe került, ami világos, mert a D pontnak az AC egyenesre, mint szimmetria tengelyre vonatkozó D_1 szimmetrikus társát úgy kapjuk meg, hogy a D pontból az AC átlóra húzott merőleges egyenes meghosszabbítására a $DP=PD_1$ távolságot felmérjük.

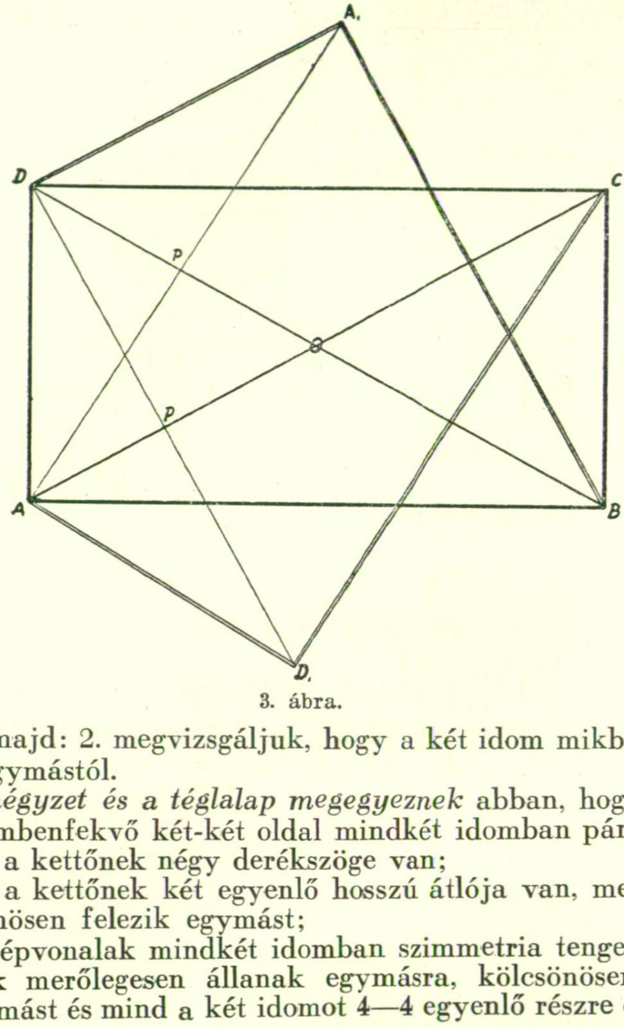
Ugyanúgy nyernénk az A_1 pontot is abban az esetben, ha a másik (BD) átlója mentén hajtanánk össze a téglalapot.

A téglalap átlói tehát nem szimmetria tengelyek, amely tény annak a következménye, hogy a téglalap átlói nem állanak merőlegesen egymásra.

8. Most *foglaljuk össze a négyzetről és a téglalapról* tanul-

takat, azaz *hasonlítsuk össze a két derékszögű parallelogrammát.*

Az összehasonlítás abból fog állani, hogy: 1. a tanultak alapján megállapítjuk a négyzet és a téglalap megegyező tulajdon-



3. ábra.

ságait, majd: 2. megvizsgáljuk, hogy a két idom mikben különbözik egymástól.

A négyzet és a téglalap megegyeznek abban, hogy:

1. a szembenfekvő két-két oldal mindkét idomban párhuzamos;
2. mind a kettőnek négy derékszöge van;
3. mind a kettőnek két egyenlő hosszú átlója van, melyek kölcsönösen felezik egymást;
4. a középvonalak mindkét idomban szimmetria tengelyek, melyek merőlegesen állanak egymásra, kölcsönösen fedezik egymást és mind a két idomot 4—4 egyenlő részre osztják.

Különböznek abban, hogy:

a négyzet$^{(nek)}_{(ben)}$:	a téglalap$^{(nak)}_{(ban)}$:
1. négy egyenlő oldala van;	1. csak a szemben fekvő 2—2 oldal egyenlő;
2. a középvonalak egyenlők;	2. a középvonalak nem egyenlők;

3. a középvonalak a négyzetet négy egybevágó négyzetre osztják;	3. a középvonalak a téglalapot négy egybevágó téglalapra osztják;
4. az átlók merőlegesek egymásra;	4. az átlók ferdén állanak egymásra;
5. négy szimmetria tengelye van: a két középvonal és a két átló;	5. két szimmetria tengelye van: a két középvonal;
6. megszerkesztéséhez egy oldal mértékszámát kell ismernünk;	6. megszerkesztéséhez két oldal mértékszámát kell ismernünk;
7. elsősorban díszítő alak.	7. díszítő és célszerűségi alak, ezért igen gyakori.

9. *Házi feladat: 1.* A kivágott idomot ragasszuk be a füzetünkbe.

2. Rajzoljunk tetszőleges méretekkel egy négyzetet és egy téglalapot. Mérjük meg a szükséges adatokat s számítsuk ki a felrajzolt idomok kerületét.

Kratofil Dezső.

Mennyiségtan.

A gyökvonás alapfogalmai. Négyzetgyökvonás közönséges számokból.

Két tanítási óra a polg. fiúisk. IV. o.-ban.

Az 1. órán a tanulók a gyökvonás alapfogalmain kívül megismerik, hogyan lehet próbálgatással egy számból négyzetgyököt vonni. A 2. órán megismerik a négyzetgyökvonás szokásos módját. Az 1. órát részletes kidolgozásban közlöm, a 2. órának csak óravázlatát adom meg.

1. óra.

I. Problémák felvetése és megoldása.

1. Rajzolnunk kell egy 169 cm² területű négyzetet!

Mit ismerünk ebben a példában? Mit kell meghatároznunk? Mit jelent a négyzet oldalát meghatározni? (Keresnünk kell egy oly számot, amely önmagával szorozva, 169-et ad.) A négyzet oldalának mértékszámát x-szel jelölve, feladatunkat írásban így fejezhetjük ki:

$$x^2 = 169.$$