gyes számot először átalakítom áltörtté, és azután összeszorzom a két törtet.) Számítsd ki hangosan!

$2^1/_4 \times {}^2/_3 = {}^9/_4 \times {}^2/_3 = {}^{18}/_{12} = 1^1/_2.$

Mennyi ${}^2/_5 \times 3^2/_3$?

4. *Vegyesszám szorzása vegyesszámmal.* Még egy eset hátra van! Melyik az? Mondj egy példát és számítsd ki!

$2^1/_3 \times 3^3/_4 = {}^7/_3 \times {}^{15}/_4 = {}^{105}/_{12} = 8^9/_{12} = 8^3/_4.$

Mondj te is egy példát! Számítsd ki!

IV. Összefoglalás.

Hogyan szorzunk törtet egész számmal? Hogyan szorzunk törtet törttel? Mit csinálunk, ha a tényezők egyike, vagy mindkettő vegyesszám? Van egy eset, amikor nem célszerű az átalakítás. Melyik az? (Vegyesszám szorzása egésszel.) A szabályokat tanuljátok meg jól! A jövő órán nehezebb példákat veszünk.

V. Házi feladat kijelölése.

(A tankönyvből kijelölök megfelelő példákat. A könyv lapszámát és a példák számát a tanulók beírják füzetükbe.)

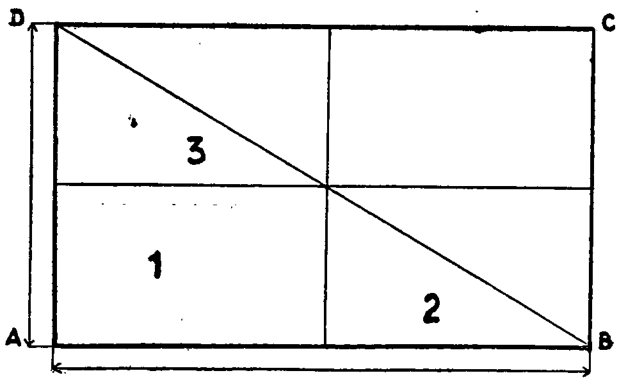
Krix Márton.

A háromszögek területe.

Tanitás a polgári fiuiskolában.

1. Rajzoljunk csomagolópapirosra egy olyan téglalapot, melynek hosszúsága 10 cm, szélessége 6 cm.

Vágjuk ki ollóval és mutassuk meg, hogy hajtogatással hányféleképen felezhetjük meg a nyert téglalapot. *(1. ábra.)*



1. ábra.

Összehajthatjuk a téglalapot: a) a szembenfekvő két nagyobbik párhuzamos oldal, b) a szembenfekvő két kisebbik párhuzamos oldal mentén. A téglalap területét mindkét esetben megfeleztük.

Győződjünk meg számítás útján, hogy az első hajtogatás által nyert fél-téglalap és a második hajtogatással nyert féltéglalap egyenlő területű. A számítás szerint a féltéglalap területe az első esetben: 10 cm . 3 cm = 30 cm^2, a második esetben 5 cm . 6 cm = 30 cm^2 lesz. E szerint a két fél-téglalap területe egyenlő.

Hogy tudnók az adott téglalapot még egy harmadik módon is felezni?

A tanulók bizonyára rájönnek, hogy a téglalapot még az egyik (pl. BD) átlója meghúzásával is lehet felezni.

Ily módon két derékszögű háromszöget kaptunk. Borítsuk rá a BCD △-et az ABD △-re. Bár a hajtogatás nem mutatja a két háromszög egyenlőségét, azok mégis egyenlő területűek, amiről úgy győződhetünk meg, hogy a BCD △-et ollóval levágjuk és azt az ABD △-re ráborítjuk. E szerint a nyert derékszögű háromszög mindegyike fele az adott téglalapnak, vagyis mindegyik 30 cm^2.

Hogy juthatunk el számítás útján ehhez az eredményhez, azaz, hogy számítjuk ki a derékszögű háromszög területét.

Vizsgáljuk meg közelebbről az ABD derékszögű △-et.

Az ABD derékszögű △ alapja és magassága megegyezik a téglalap alapjával és magasságával. A téglalap területét az alap és magasság mértékszámainak szorzata adja meg. A derékszögű △ a téglalap fele.

E szerint a derékszögű △ területét úgy kapjuk meg, hogy alapjának és magasságának a mértékszámát összeszorozzuk és a nyert szorzatot 2-vel elosztjuk (a nyert szorzat felét vesszük.).

Irásban: $t = a \cdot m : 2 = \frac{a \cdot m}{2}$

Számokban: $t = \frac{10 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = \frac{60 \text{ cm}^2}{2} = 30 \text{ cm}^2$.

Mivel a derékszögű △ alapja a derékszögű △ egyik, magassága a másik befogója, az előbbi szabályt így is megfogalmazhatjuk: a derékszögű háromszög területét úgy kapjuk meg, hogy a befogók mértékszámainak szorzatát 2-vel elosztjuk.

Az ABD derékszögű △ területe a rajz szerint 3 részből adódik. Tegyünk próbát számítás útján, hogy a három területrész együttesen tényleg 30 cm^2.

$$5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2; \quad \frac{5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{2} = 7{\cdot}5 \text{ cm}^2;$$

$$15 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 7{\cdot}5 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2.$$

2. Rajzoljunk milliméterpapírfüzetünkbe egy 3 cm. oldallal bíró négyzetet. Húzzuk meg a négyzet átlóját.

A négyzetet egyik átlója két egyenlőszárú derékszögű $\triangle$-re bontja.

Az előbbiek szerint az egyenlőszárú derékszögű $\triangle$ területe:

$$\frac{3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = \frac{9\text{ cm}^2}{2} = 4{\cdot}5\text{ cm}^2 \text{ lesz.}$$

A derékszögű egyenlőszárú háromszög területét megkapjuk, ha egyik befogójának mértékszámát önmagával megszorozzuk s az így kapott szorzatot 2-vel elosztjuk.

Győződjünk meg az ABD derékszögű egyenlőszárú $\triangle$-ben lévő területegységek megszámlálásával is, hogy a $\triangle$ területe tényleg $4{\cdot}5$ cm^2.

A számlálás szerint: 3 egész és 3 fél területegységet kaptunk.

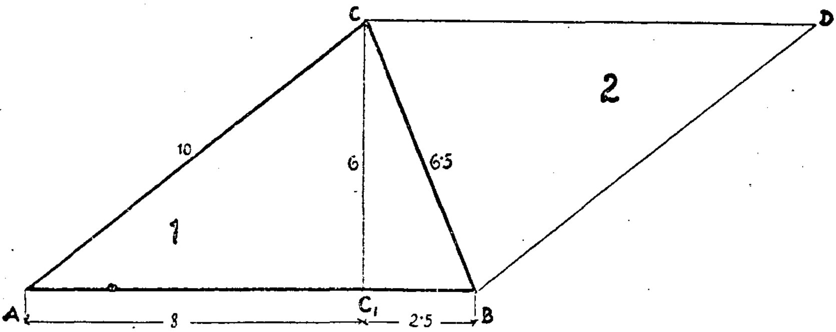
E szerint a terület: $3\text{ cm}^2 + 3 \cdot 0{\cdot}5\text{ cm}^2 = 3\text{ cm}^2 + 1{\cdot}5\text{ cm}^2 = 4{\cdot}5\text{ cm}^2$ lesz.

3. Az a kérdés most, hogyan határozzuk meg a hegyesszögű és tompaszögű háromszögek területét.

Mivel az ilyen idomoknak a területét még nem tudjuk kiszámítani, arra kell törekednünk, hogy azokat is olyan idomokkal hasonlítsuk össze, amelyeknek a területét már meg tudjuk határozni.

Rajzoljanak e végből a tanulók csomagolópapirosra 10·5, 10 és 6·5 cm-es oldalakkal egy háromszöget. (A felrajzolt $\triangle$ mind a három csúcsában hegyesszögű $\triangle$ lesz. Miért?)

Nevezzük meg a háromszöget s derékszögű háromszögvonalzónk segítségével határozzuk meg a $\triangle$ AB alapjához tartozó CC_1 magasságot. A háromszög területét a CC_1 magasság két derékszögű háromszögre bontja. (2. *ábra.)*



2. *ábra.*

A háromszög területét tehát az eddig tanultak alapján úgy számíthatjuk ki, hogy a két derékszögű háromszög területét külön-külön kiszámítjuk s az így kapott területeket összegezzük.

Végezzük el a megfelelő méréseket és számításokat.

$$\frac{8\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}}{2} + \frac{2{\cdot}5\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}}{2} = 24\ \text{cm}^2 + 7{\cdot}5\ \text{cm}^2 = 31{\cdot}5\ \text{cm}^2.$$

A hegyesszögű háromszög területének ilyen kiszámítása azonban hosszadalmas, azért egyszerűbb eljáráshoz folyamodunk.

E végből két vonalzó segítségével a C pontból az alappal s a B pontból az AC oldallal húzunk párhuzamos egyeneseket. Ezek metszéspontja D lesz. Igy kapjuk az ABDC romboidot.

A romboid területét már ki tudjuk számítani, azért az adott ABC △ területét a nyert romboid területével kell összehasonlítanunk.

A romboid 1 és 2 jelzésű háromszögei a tanultak szerint egybevágók.

E szerint a romboid területe a felvett △ területének a kétszerese, vagy ami ugyanaz a △ területe a romboid területének a fele.

Nevezzük meg és mutassuk meg a romboid alapját és magasságát, majd a felvett ABC △ alapját és magasságát.

Mivel a háromszög alapja és magassága a hozzátartozó romboid alapjával és magasságával azonos, azért a △ területét úgy kapjuk meg, hogy: alapjának mértékszámát a magasság mértékszámával megszorozzuk és e szorzatot 2-vel elosztjuk.

$$\text{Képlettel: } \triangle\ t = \frac{\text{romboid területe}}{2} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Mérjük meg a △ alapját és magasságát és végezzük el a vonatkozó számítást:

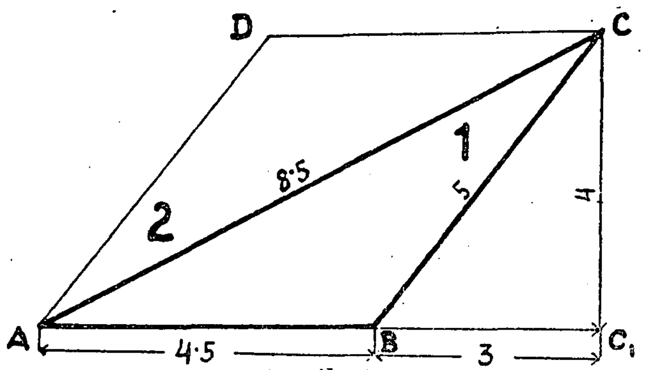
$$\frac{10{\cdot}5\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}}{2} = \frac{63\ \text{cm}^2}{2} = 31{\cdot}5\ \text{cm}^2.$$

A kapott eredmény a fentebb lehozott eredménnyel azonos.

4. A tompaszögű háromszögek területének meghatározására a felvett △-et szintén a △-höz tartozó romboid területével legcélszerűbb összehasonlítanunk.

Rajzoljanak e végből a tanulók egy tompaszögű △-et. A △-et állítsuk elő úgy, hogy először 7·5 cm és 4 cm befogókkal egy derékszögű △-et (AC_1C) szerkesztünk s ennek a △-nek C_1 csúcspontjából 3 cm-nyire a B pontot az alapon levágjuk.

Az ABC △ B csúcspontjában tompaszögű. *(3. ábra.)*



3. *ábra.*

Nevezzük meg a △-et s derékszögű háromszögvonalzónk segítségével húzzuk meg a △ alapjához tartozó CC_1 magasságot. (A tompaszögű △-nek hegyesszögeiből húzott magasságok a szembenfekvő oldalakat csak meghosszabbításaikban metszik.)

A magasság (CC_1) meghúzásával két derékszögű △-et (AC_1C BC_1C) kaptunk.

Könnyű belátni, hogy az AC_1C és BC_1C derékszögű háromszögek különbsége az ABC △ területével egyenlő.

E szerint a kérdéses △ területét úgy tudnánk kiszámítani, hogy az említett derékszögű △-ek területeit külön-külön kiszámítanánk s a nagyobb terület mérőszámából a kisebb terület mérőszámát kivonnánk.

Végezzük el a szükséges méréseket és számításokat:

$$\frac{7 \cdot 5 \ . \ 4 \text{ cm}}{2} - \frac{3 \text{ cm} \ . \ 4 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Ez az eljárás azonban hosszadalmas, azért egyszerűbb eljáráshoz folyamodunk.

E végből hasonló módon, mint a hegyesszögű △-et a tompaszögű △-et is kiegészíthetjük romboiddá. Végezzük el a kiegészítést és húzzuk meg a romboid DD_1 magasságát. Most hasonlítsuk össze a romboid területét a kérdéses tompaszögű △ területével.

A romboid 1 és 2 jelzésű háromszöge a tanultak szerint egybevágó. E szerint a romboid területe a felvett ABC △ területének a kétszerese, vagy ami ugyanaz, a △ területe a romboid területének a fele.

Mivel a háromszög alapja és magassága a hozzátartozó romboid alapjával és magasságával azonos, azért a tompaszögű háromszög területét is úgy kapjuk meg, hogy alapjának mértékszámát magasságának mértékszámával megszorozzuk és a szorzatot 2-vel elosztjuk.

Képlettel: $\triangle t = \frac{\text{Romboid területe}}{2} = \frac{a \ . \ m}{2}$

Mérjük meg a $\triangle$ alapját és magasságát, végezzük el a vonatkozó számítást:

$$\frac{4{\cdot}5 \text{ cm}^2 \,.\, 4 \text{ cm}}{2} = \frac{18 \text{ cm}^2}{2} = 9 \text{ cm}^2.$$

5. Összehasonlítva a derékszögű-, hegyesszögű- és tompaszögű háromszögek területére vonatkozó szabályokat, megállapíthatjuk, hogy a területi szabály bármilyen alakú háromszögre nézve ugyanaz. Kimondhatjuk tehát, hogy a háromszögek területét mindig az alap és magasság mértékszámainak a félszorzata adja meg:

Képletben: $\triangle t = (a \,.\, m) : 2 = \frac{a \,.\, m}{2}$

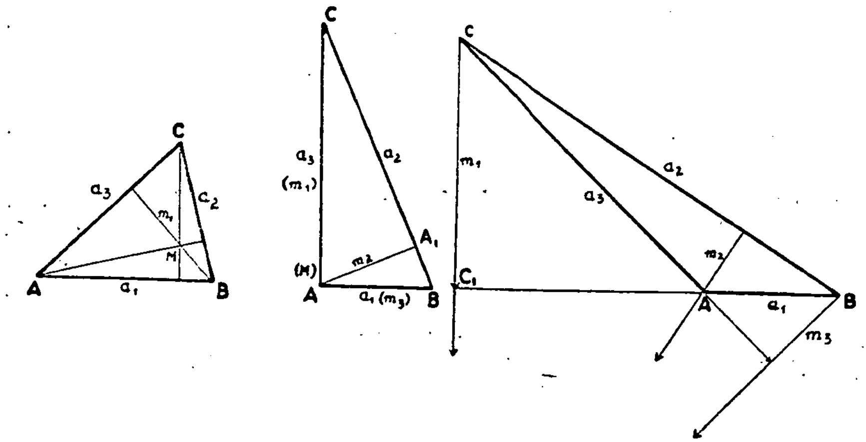
Könnyű belátni, hogy a $\triangle$-ek területének kiszámításánál alapvonalul a háromszög bármely oldalát választhatjuk, csak az a fontos, hogy magasságul minden alaphoz a hozzátartozó magasságot vegyük, vagyis azt a merőleges szakaszt, melyet mindig a felvett alapvonallal szemköztfekvő csúcsból húztunk.

E miatt a háromszög területének mértékszámához háromféle úton lehet eljutni.

Rajzoljunk egy hegyesszögű-, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget és ellenőrizzük, hogy az egyes háromszögeknek a háromféle úton kapott területei megegyeznek.

A hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű $\triangle$-eket időnyerés szempontjából legkönnyebben úgy rajzolhatjuk meg, hogy pl. egy 45°-os hegyesszög, egy derékszög és egy 135°-os tompaszög szárait egy harmadik egyenessel átmetsszük. (Ezeket a szögeket ugyanis körző nélkül, tisztán egyenlőszárú derékszögű háromszögvonalzónk segítségével is előállíthatjuk.)

Az átmetszésnél az első $\triangle$-re vonatkozólag legyen AB = 4 cm, AC = 4·5 cm, a második $\triangle$-re vonatkozólag AB = 2·5 cm, AC = 6 cm, a harmadik $\triangle$ -re vonatkozólag AB = 3 cm, AC = 8 cm. *(4., 5. és 6. ábra.)*



4., 5. és 6. ábra.

A régebben tanultak alapján húzzuk meg a △-ek magasságait. (A három magasságvonal az első △ belsejében, a második △ derékszögének csúcsában, illetőleg a harmadik △-ön kívül metszi egymást.)

A tompaszögű △-re vonatkozólag ismeretes, hogy a △ hegyes szögeihez tartozó csúcsokból húzott magasságok a szemben lévő oldalakat csak azok meghosszabbításaiban metszik.

Végezzük el a vonatkozó méréseket és számításokat:

Az egyes △-ekre vonatkozólag:

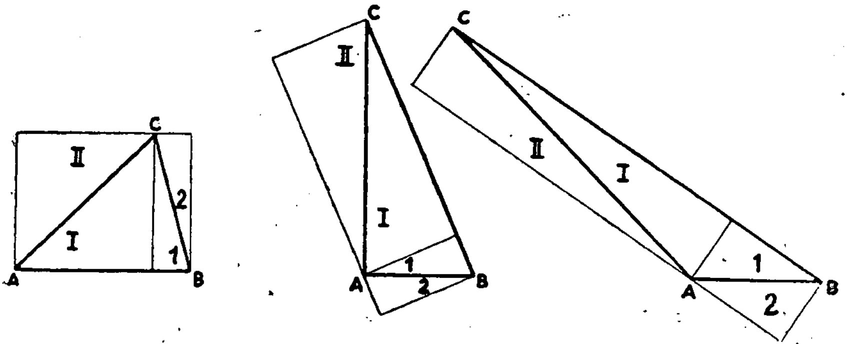
$$t_1 = \frac{a_1 \, . \, m_1}{2}; \quad t_2 = \frac{a_2 \, . \, m_2}{2}; \quad t_3 = \frac{a_3 \, . \, m_3}{2}$$

Jegyzet: **Mivel az olyan háromszögek, amelyekben az oldalak és a terület egyidejűleg racionális számok, kivételes háromszögek (Heron-félék) és mivel a mérésekkel járó pontatlanságokat úgy sem kerülhetjük el, a háromszögekre vonatkozólag a három úton nyert területmértékszámok egyenlőségét általában csak úgy mutathatjuk ki, ha a kapott eredményekben a szükséghez képest megfelelő kikerekítéseket végzünk.**

6. Rajzoljunk egy egyenlőszárú háromszöget (a = 5 cm, b = 6·5 cm) és egy egyenlőoldalú háromszöget (a = 5 cm). Határozzuk meg az idomok területét. Hányféleképen tehetjük ezt az egyenlőszárú-, az egyenlőoldalú háromszögben? Hát az egyenlőszárú derékszögű háromszögben?

7. A háromszögekre vonatkozó területi szabályt úgy is megállapíthatjuk, hogy a háromszögeket a velük egyenlő alapú és magasságú téglalapokkal hasonlítjuk össze.

E végből rajzoljuk le mégegyszer az 5. pontban szerkesztett hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögeket. *(7., 8. és 9. ábra.)*



7., 8. és 9. ábra.

Most az adott háromszögek egyik oldalával a szemköztfekvő csúcson át párhuzamost húzunk, majd ebből a csúcsból a felvett alapra, az alap két végpontjából pedig a meghúzott párhuzamos egyenesre merőlegest állítunk. (A derékszögű és tompaszögű △-eknél célszerű a derékszög, illetve a tompaszöggel szemközt fekvő oldalt alapnak felvenni.)

Szemléltessük a háromszögek területének meghatározására vonatkozó utóbbi eljárásokat is. Az összehasonlítás önként adódik.

Házi feladat: 1. Ragasszuk be füzetünk megfelelő helyeire a kivágott idomokat.

2. Rajzoljunk egy egyenlőoldalú, egy egyenlőszárú, továbbá egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű különböző oldalú háromszöget. Mérjük meg a szükséges adatokat és számítsuk ki a háromszögek területét. (Hány adatot kell megmérnünk?)

3. Rajzoljunk egy derékszögű egyenlőszárú háromszöget. Mérjünk és számítsuk ki a háromszög területét.

(Jól kihegyezett ceruzával, körzővel és ép vonalzókkal dolgozzunk.)

Kratofil Dezső.

Természetrajz.

A grönlandi bálna.

Tanítás a polgári fiuiskola I. o.-ban.

Szemléltető eszközök: A grönlandi bálna színes képe, cetszila, apró tengeri rákok képe, földgömb, táblai rajz.

I. Előkészítés.

a) A fókáról és a rozmárról tanultak *számonkérése* után ...

b) *Hangulatkeltés.* A sarkvidék kietlen, zord világát nemcsak a fóka- és rozmárvadászok, hanem a bálnavadászok is felkeresik minden évben, hogy gazdag zsákmánnyal megrakodva térjenek haza. (A kép szemléltetése.)

Amíg az északi sarkvidéken állandóan letelepült emberek is élnek (eszkimók), addig a déli sarkvidéken, ahol pedig Európánál is jóval nagyobb, de több mint 1000 m vastagságú jégtakaróval borított földrész terül el, állandó lakósság nem él. Ma még könnyű megszámlálni, hány ember tette ide a lábát. Pedig megvan ennek a zord világnak a szépsége, varázsa. Milyen nagyszerűek, mily fenségesek a sziklabércekről alácsúszó, 100 km-nél is hosszabb jégfolyamok (gleccserek), a hangtalan, végtelen hómezők, az óceánban úszó jéghegyek! Nagyszerű világ ez! A férfi, aki küzdeni vágyik a természet hatalmas erőivel, az itt méltó helyet találhat erejének a kifejlesztésére. A tudományos kutatás szomja, de még inkább a haszonlesés hozza