ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS II.

1924–1926

SZEGED

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA
LITTERARUM AC SCIENTIARUM
REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS II.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

II. KÖTET.

1924—1926.

SZEGED.
A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

ACTA LITTERARUM AC SCIENTIARUM

REGIAE UNIVERSITATIS HUNGARICAE FRANCISCO-JOSEPHINAE

SECTIO

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM.

REDIGUNT:

A. HAAR — F. RIESZ.

TOMUS II.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK.

SZERKESZTIK:

HAAR ALFRÉD — RIESZ FRIGYES.

II. KÖTET.

1924—1926.

SZEGED.

A M. KIR. FERENCZ JÓZSEF-TUDOMÁNYEGYETEM BARÁTAI EGYESÜLETÉNEK KIADÁSA.

Kossuth Nyomda

INDEX — TARTALOM.

Tomus II. — 1924/26 — II. Kötet.

Über lineare Ungleichungen.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Die Theorie der linearen Ungleichungen wurde von H. MINKOWSKI[1]) und J. FARKAS[2]) zuerst entwickelt; beide Verfasser gelangen auf gänzlich verschiedene Weise zu den beiden Hauptsätzen dieser Theorie; die eine betrifft diejenigen Ungleichungen, die als Folge von gegebenen Ungleichungen zu betrachten sind, die andere, die Parameterdarstellung der Lösungen. Von der neueren Literatur mögen die interessanten Behandlungen desselben Gegenstandes von L. L. DINES[3]) und W. B. CARVER[4]) erwähnt werden, die ebenfalls zu den erwähnten Resultaten gelangen mit Hülfe von Methoden, die von denen MINKOWSKI's und FARKAS' verschieden sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit — die bereits im Jahre 1917 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt und in der Zeitschrift dieser Akademie (Mathematikai és Természettudományi Értesítő) in ungarischer Sprache im Jahre 1918 (Bd. 34.) veröffentlicht wurde — ist, diese Theorie in neuer Weise zu begründen. Es zeigt sich, dass diese Theorie auf ganz einfache Sätze der mehrdimensionalen Geometrie zurückführbar ist, wenn man die Ungleichungen und die Unbestimmten passend geometrisch interpretiert. Es handelt sich dabei um Sätze, die den konvexen Körper betreffen; ausser den einfachsten Tatsachen über diese Körper gelangt ein schöner Satz von C. Carathéodory[5]) zur Anwendung. Merkwürdigerweise verlässt MINKOWSKI in seinem genannten Werke eben an dieser Stelle die geometrische Interpre-

[1]) Geometrie der Zahlen. S. 39—45.

[2]) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 124. 1901.

[3]) Annals of Mathematics. vol. 20. S. 191.

[4]) Annals of Mathematics. vol. 23. S. 212.

[5]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 32. 1911.

tation, obwohl das ganze Buch sonst dieser Denkungsart gewidmet ist.

Ich gelange auf der geschilderten Weise nicht nur zu den erwähnten Sätzen von MINKOWSKI und FARKAS, sondern es ergiebt sich auch eine Ergänzung derselben.

§ 1. Linear homogene Ungleichungen.

Wir legen unsren Untersuchungen ein System von linearen homogenen Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n \geqq 0. \quad (k=1,2,\ldots)$$

zwischen den Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zu Grunde. Das System besteht aus endlich vielen oder aus unendlich vielen Ungleichungen, im letzteren Falle setzen wir voraus, dass es *„abgeschlossen"* ist, worunter wir die folgende Eigenschaft verstehen: Betrachten wir im n-dimensionalen Raume (in dem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Cartesische Koordinaten bedeuten) die Punkte p_k mit dem Koordinaten

$$x_1 = a_{k1}, \quad x_2 = a_{k2}, \ldots, \quad x_n = a_{kn}; \quad (k=1,2,\ldots)$$

wenn die Punktmenge, gebildet von diesen Punkten p_k, eine abgeschlossene ist, so soll das System der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ ein *abgeschlossenes* genannt werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass ein Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ von der Beschaffenheit existiert, dass für alle k

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0$$

sei; widrigenfalls liesse sich das Problem auf ein System von Ungleichungen reduzieren, in dem die Anzahl der Unbekannten kleiner als n ist [6])

Betrachten wir nun diejenigen Punkte P_k des n-dimensionalen Raumes, deren Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k1}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k2}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{kn}$$

sind; sie liegen alle in der $(n-1)$-dimensionalen Ebene *(E)*, deren Gleichung

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \ldots + \bar{u}_n x_n = 1$$

ist. Die Annahme $\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) > 0$ bedeutet geometrisch, dass

---

[6]) C. f. MINKOWSKY l. c. p. 44.

die Strahlen, die den Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit den Punkten p_k verbinden, diese Ebene $\bar{E}$ durchstossen; die Durchstossungspunkte sind die Punkte P_k

Das vorgelegte System von Ungleichungen ist mit dem System

$$\frac{\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv A_{k1}u_1 + A_{k2}u_2 + \ldots + A_{kn}u_n \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

offenbar aequivalent; die Koeffizienten dieses neuen Systems erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$A_{k1}\bar{u}_1 + A_{k2}\bar{u}_2 + \ldots + A_{kn}\bar{u}_n = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Wir wollen nun dieses System von Ungleichungen geometrisch deuten. Zu diesem Ende bezeichnen wir mit

$$u_1 = U_1 + \bar{u}_1, \quad u_2 = U_2 + \bar{u}_2, \ldots, \quad u_n = U_n + \bar{u}_n$$

irgendeine Lösung unsrer Ungleichungen, und es sei der Kürze halber

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} =$$

$$= A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n + 1; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

das System $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ist sodann eine Lösung der Ungleichungen

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0. \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Wir suchen nun die Schnittpunkte der Ebene

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \ldots + U_nx_n + 1 = 0$$

mit denjenigen Geraden, die den Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit den Punkten P_k verbinden. Die Koordinaten dieser Schnittpunkte sind offenbar

$$x_1 = \varrho A_{k1}, \quad x_2 = \varrho A_{k2}, \ldots, \quad x_n = \varrho A_{kn}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varrho = -\frac{1}{A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n} \quad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

gesetzt ist. Da aber — zufolge unsrer Annahme —

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0,$$

d. h.

$$A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n \geqq -1$$

ist, so folgt, dass ϱ nicht zwischen 0 und 1 liegt; mit anderen Worten der Schnittpunkt der in Frage stehenden Ebene mit der Geraden OP_k liegt nicht zwischen den Punkten O und P_k.

Das erhaltene Resultat — dass, falls $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ ein Lösungssystem der vorgelegten Ungleichungen ist, die Ebene mit den Ebenenkoordinaten $U_1, U_2, \ldots, U_n$ mit den Strecken OP_k keinen gemeinsamen Punkt besitzt — ist umkehrbar. In der Tat, wenn die betrachtete Ebene die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so liegt die durch Formel (1) erklärte Grösse ϱ nicht zwischen 0 und 1, d. h. es ist

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

und folglich

$$\vartheta_k(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n) \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mit anderen Worten: **wir erhalten die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen durch Hinzufügung der Grössen $\bar{u}_1$, bez. $\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ zu den Ebenenkoordinaten derjenigen Ebenen, die die Strecken OP_k nicht durchsetzen.**

Die fraglichen Ebenen sind aber noch in einer anderen Weise charakterisierbar. Die Punkte P_k liegen alle in derselben Ebene; wir bezeichnen mit $\bar{\mathfrak{K}}$ in dieser $(n-1)$-dimensionalen Ebene denjenigen kleinsten konvexen Körper, der diese Punkte enthält. Verbinden wir alle Punkte von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit O, so bilden die so erhaltenen Strecken einen n-dimensionalen konvexen Körper, den wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Sind $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von $\bar{\mathfrak{K}}$, so ergeben sich die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$ aus der Formel

$$x_1 = \varepsilon \bar{x}_1, \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \ldots, \quad x_n = \varepsilon \bar{x}_n, \tag{2}$$

wobei ε alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Wir behaupten, dass die fraglichen Ebenen, die in der dargelegten Weise die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen darstellen, diejenigen sind, die mit dem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

In der Tat, wenn die Ebene

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 = 0 \tag{3}$$

den Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidet, d. h. wenn der Ausdruck $U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1$ für alle Punkte des Körpers dasselbe Vorzeichen besitzt, so muss — da der Punkt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist — für alle Punkte von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \geqq 0$$

bestehen. Da die Punkte P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jedenfalls dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören, so ist

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0,$$

und folglich ist die Ebene (3) eine der fraglichen Ebenen. Umgekehrt, wenn die Ebene (3) die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so lässt sich auf Grund des in der Einleitung erwähnten Satzes von Herrn Carathéodory leicht zeigen, dass diese Ebene den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidet. Zufolge dieses Satzes kann man nämlich die Koordinaten irgendeines Punktes des $(n-1)$-dimensionalen konvexen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ in folgender Form schreiben:

$$\bar{x}_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{k1}, \quad \bar{x}_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{k2}, \ldots, \quad \bar{x}_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{kn},$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ nicht negative Zahlen von der Summe 1 bedeuten, von denen höchstens n von Null verschieden sind. Da unsre Ebene die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so folgt

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n + 1 \geqq 0; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

es gilt daher für jeden Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ von $\bar{\mathfrak{K}}$

$$U_1\bar{x}_1 + U_2\bar{x}_2 + \ldots + U_n\bar{x}_n + 1 \geqq 0.$$

Um so mehr gilt daher die Ungleichung

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \ldots + U_nx_n + 1 \geqq 0,$$

falls an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die durch (2) dargestellten Werte eingeführt werden, d. h. für jeden Punkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$. Daher schneidet jede Ebene, die die Strecken OP_k nicht durchsetzt, auch den Körper $\mathfrak{K}$ nicht, und es liefern in dem oben dargelegten Sinne diejenigen Ebenen die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden.

Die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \geqq 0$$

wird eine Folge der vorgelegten Ungleichungen ($\vartheta_k \geqq 0$) genannt, wenn alle Lösungen der letzteren Ungleichungen die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ erfüllen. Ist dies der Fall, so muss jedenfalls[7])

$$\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0$$

sein, und es wird die Ungleichung

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n) \geqq 0$$

---

[7]) Da die Grössen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ die Ungleichungen $\vartheta_k > 0$ erfüllen, so bleiben diese Ungleichungen richtig, wenn man die Variablen hinreichend nahe an das Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ wählt. Wäre nun $\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) = 0$, so würde man in beliebiger Nähe des Wertsystems $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ ein solches Wertsystem bestimmen können, für das $\vartheta < 0$ ausfällt.

oder die mit ihr aequivalente

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} =$$
$$= A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + 1 \geqq 0$$

befriedigt durch die Ebenenkoordinaten

$$(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

derjenigen Ebenen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden. Da

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_n\bar{u}_n}, \ldots, A_n = \frac{a_n}{a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_n\bar{u}_n}$$

ist, so gilt

$$A_1\bar{u}_1 + A_2\bar{u}_2 + \ldots + A_n\bar{u}_n = 1,$$

d. h. der Punkt P mit den Koordinaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liegt in der Ebene $\bar{E}$. Wenn die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ eine Folge des vorgelegten Systems ist, so können daher die Ebenen, die den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ nich durchsetzen, die Strecke OP auch nicht schneiden. Daraus schliessen wir, dass P ein Punkt von $\mathfrak{K}$ sein muss. Widrigenfalls würde jeder Punkt der Strecke OP ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegen und man könnte durch jeden inneren Punkt dieser Strecke eine $\mathfrak{K}$ nicht schneidende Ebene hindurchlegen. Diese Ebene würde $\mathfrak{K}$ nicht schneiden, hätte aber mit OP einen Punkt gemein — im Widerspruch mit dem Vorangehendem.

Da P ein Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}$ ist, so kann man seine Koordinaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nach dem erwähnten Satze CARATHÉODORY's in folgender Form schreiben

$$A_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{1k}, \quad A_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{2k}, \ldots, \quad A_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{nk},$$

wobei

$$\sum_{(k)} \mu_k = 1,$$

und von den nicht negativen Grössen μ_k höchstens n von Null verschieden sind. Es gilt daher die Identität

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{(k)} \mu_k \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n);$$

da die Formen

$\vartheta(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$ bzw. $\vartheta_k(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$
nur in einem positiven Faktor von den entsprechenden Formen

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ bzw. } \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

verschieden sind, so gelangen wir zu dem folgenden Resultat:

Wenn die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

eine Folge des abgeschlossenen Systems von Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, so existieren solche nicht negative Grössen λ_k, *von denen höchstens n von Null verschieden* sind, dass identisch in den $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

§ 2. Inhomogene Ungleichungen.

Die vorangehenden Resultate können in einfacher Weise auf ein System von inhomogenen linearen Ungleichungen übertragen werden.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n + a_{kn+1} \geqq 0 \quad (4)$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

ein abgeschlossenes System von inhomogenen Ungleichungen und nehmen an, dass ein Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ existiert, für das

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

ausfällt. Wir gelangen zur geometrischen Interpretation unserer inhomogenen Ungleichungen in folgender Weise: Wir setzen wiederum zur Abkürzung

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$
$$\equiv \frac{a_{k1}U_1 + a_{k2}U_2 + \ldots + a_{kn}U_n}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1. \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Erfüllt das Wertsystem $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ die Ungleichungen (4), so gilt

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

und umgekehrt. Diese Ungleichungen werden — nach den Vorangehenden — von den Ebenenkoordinaten derjenigen Ebenen befriedigt, die die Strecken OP_k nicht schneiden, wobei jetzt P_k den Punkt mit den Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots,$$
$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

bedeutet. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$ den kleinsten konvexen Körper, der die Punkte O und P_k enthält, so zeigt man in gleicher Weise, wie es im vorangehenden § geschah, dass die fraglichen Ebenen diejenigen sind, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden. Die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + a_{n+1} \geqq 0$$

wird wiederum als eine Folge der vorgelegten Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ bezeichnet, wenn sie durch alle Lösungen dieser letzteren Ungleichungen befriedigt wird. Das Wertsystem $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ erfüllt offenbar dann und nur dann die Ungleichung

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n) \geqq 0,$$

falls die Ungleichung

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1 \geqq 0$$

befriedigt ist. Daher ist $\vartheta \geqq 0$ dann und nur dann eine Folge der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$, wenn die Ebenenkoordinaten aller den Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidenden Ebenen die Ungleichung

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

befriedigen; daraus folgt wiederum, dass der Punkt P, dessen Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots, \quad x_n = \frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}$$

sind, dem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ angehört.

Da im vorliegenden Falle $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Körper ist, der die Punkte O und P_k enthält, so gibt es nach dem Satze von Carathéodory nichtnegative Zahlen μ_0 und μ_k mit der Summe 1, von denen höchstens $n+1$ von Null verschieden sind, so dass

$$\frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)},$$

$$\frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}.$$

Daher ist

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \mu_k \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \mu_0;$$

die Identität der Koeffizienten der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_k$ auf beiden Seiten der Gleichung gewährleisten die zuletzt aufgestellten Beziehungen; die von den $u_1, u_2, \ldots, u_n$ freien Glieder stimmen überein wegen der Relation

$$1 = \mu_0 + \sum_{(k)} \mu_k$$

Aus der abgeleiteten Identität folgt für die ursprünglichen Ausdrücke ϑ und ϑ_k

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n) \equiv$$

$$\equiv \vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \sum_{(k)} \mu_k \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} +$$

$$+ \mu_0 \vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n).$$

Da die auftretenden Faktoren $\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ und $\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ alle positiv sind, so gelangen wir zu dem Resultat (dessen Umkehrung trivial ist), dass falls die inhomogene Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

eine Folge des abgeschlossenen Systems von inhomogenen Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, so existieren solche nicht-negative Grössen λ_0 und λ_k, *von denen höchstens $n+1$ von Null verschieden sind*, dass die Identität

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \lambda_0$$

besteht.

§ 3. Lösung der linearen Ungleichungen durch Parameterdarstellung.

Wir kehren nun zu dem Falle der homogenen Ungleichungen zurück und beschränken uns auf den Fall, dass das vorgelegte System aus endlich vielen Ungleichungen besteht

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ist in diesem Falle ein durch endlich viele $(n-1)$ dimensionale Ebenen begrenzter Polyeder. Die Ebene $(\bar{E})$, deren Gleichung

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \ldots + \bar{u}_n x_n = 1$$

ist, ist jedenfalls eine dieser Begrenzungsebenen von $\mathfrak{K}$, daher gilt für alle Punkte von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$-\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \ldots - \bar{u}_n x_n + 1 \geqq 0.$$

Alle übrigen Begrenzungsebenen von $\mathfrak{K}$ gehen durch den Punkt O; ihre Gleichungen seien

$$u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n = 0, \qquad (q = 1, 2, \ldots N)$$

wobei die Koeffizienten $u_1^{(q)}, u_2^{(q)}, \ldots, u_n^{(q)}$ so gewählt sein mögen, dass für die Punkte von $\mathfrak{K}$

$$u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n \geqq 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots N)$$

ausfalle. Die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$ — und nur diese — erfüllen daher die folgenden $N + 1$ Ungleichungen:

$$\begin{gathered} u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n \geqq 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots N) \\ -\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \ldots - \bar{u}_n x_n + 1 \geqq 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Wir erhielten sämtliche Lösungen unsrer ursprünglichen Ungleichungen aus den Ebenenkoordinaten der Ebenen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden, d. h. wenn $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ eine Lösung der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ bedeutet, so erfüllen die Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \geqq 0, \tag{6}$$

und umgekehrt.

Mit anderen Worten, das W e r t s y s t e m

$$U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$$

i s t d a n n u n d n u r d a n n e i n e L ö s u n g d e r U n g l e i c h u n g e n $\vartheta_k \geqq 0$, w e n n d i e U n g l e i c h u n g (6) e i n e F o l g e d e r $(N + 1)$ U n g l e i c h u n g e n (5) i s t. Nach dem Vorangehenden ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die Existenz solcher nicht-negativer Grössen $\lambda^{(q)}$ $(q = 1, 2, \ldots N)$, $\bar{\lambda}$ und λ_0 (von denen höchstens $n + 1$ von Null verschieden sind), dass die folgende Identität besteht

$$\begin{aligned} U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \equiv \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} (u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n) + \\ + \bar{\lambda} (-\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \ldots - \bar{u}_n x_n + 1) + \lambda_0, \end{aligned}$$

oder ausführlich ausgeschrieben:

$$U_1 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_1^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_1, \quad U_2 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_2^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_2, \ldots,$$

$$U_n = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_n^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_n, \quad 1 = \bar{\lambda} + \lambda_0.$$

D a h e r k a n n m a n j e d e L ö s u n g $u_1, u_2, \ldots, u_n$ d e r v o r g e l e g t e n U n g l e i c h u n g e n v e r m ö g e d e r L ö s u n g e n

$$u_1^{(q)},\ u_2^{(q)}, \ldots, u_n^{(q)} \qquad (q=1,2,\ldots N)$$

und

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \tag{7}$$

in der folgenden Form darstellen:

$$u_1 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_1^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_1, \quad u_2 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_2^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_2, \ldots,$$

$$u_n = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_n^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_n, \tag{8}$$

wobei $\lambda^{(q)}$ und λ_0 nicht negative Zahlen bedeuten. Die Umkehrung dieses Satzes ist evident. Es stellen daher die Formeln (8) die allgemeinste Lösung der vorgelegten Ungleichungen dar mit Hülfe nicht-negativer Parameter. Die speziellen Lösungen (7) sind im Wesentlichen identisch mit den *„äussersten Lösungen“* Minkowski's, die auf diese Weise eine neue geometrische Deutung erhalten haben.

§ 4. Integralungleichungen.

Das folgende Problem steht im engen Zusammenhange mit den vorangehenden Untersuchungen:

Unter Zugrundelegung der im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ definierten stetigen Funktionen

$$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x) \text{ und } a(x)$$

betrachten wir die Gesamtheit aller stetigen Funktionen $u(x)$ die die folgenden Integralungleichungen befriedigen:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \quad \int_\alpha^\beta a_2(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \ldots, \quad \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, u(x) dx \geqq 0;$$

die Ungleichung

$$\int_\alpha^\beta a(x)\, u(x)\, dx \geqq 0;$$

wird eine *Folge* der Vorangehenden genannt, wenn sie durch alle stetigen Funktionen befriedigt wird, die die vorangehenden Ungleichungen erfüllen.

Wir nehmen an, dass die Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ linear independent sind und behaupten, dass in diesem Falle die Funktion $a(x)$ in der folgenden Form darstellbar ist:

$$a(x) \equiv \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x),$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nicht negative Konstanten bedeuten.

Wir beweisen unsre Behauptung, wie folgt:

Die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ berechnen wir aus dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,a(x)\,dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_1(x)^2\,dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_1(x)\,a_2(x)\,dx + \ldots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_1(x)\,a_\nu(x)\,dx,$$

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\,a(x)\,dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_2(x)^2\,dx + \ldots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_\nu(x)\,dx,$$

. . . .

$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a(x)\,dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_1(x)\,dx + \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_2(x)\,dx + \ldots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)^2\,dx.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist identisch mit der Determinante der folgenden quadratischen Form

$$\sum_{p,q}^{\nu}{}_1\; x_p\,x_q \int_\alpha^\beta a_p(x)\,a_q(x)\,dx =$$
$$= \int_\alpha^\beta [x_1\,a_1(x) + x_2\,a_2(x) + \ldots + x_\nu\,a_\nu(x)]^2\,dx\,;$$

wegen der angenommenen linearen Independenz der Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ ist diese Form positiv definit, woraus das Nichtverschwinden jener Determinante gefolgert werden kann. Führen wir noch zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\omega(x) \equiv a(x) - \lambda_1\,a_1(x) - \lambda_2\,a_2(x) - \ldots - \lambda_\nu\,a_\nu(x)$$

ein, so kann man das zur Bestimmung der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ dienende Gleichungssystem folgendermassen schreiben:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,\omega(x)\,dx = 0, \int_\alpha^\beta a_2(x)\,\omega(x)\,dx = 0, \ldots, \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Es erfüllt daher sowohl $\omega(x)$, wie auch $-\omega(x)$ das zu Grunde gelegte System von linearen Integralungleichungen. Es gelten demzufolge die Beziehungen

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{und} \quad -\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0,$$

d. h. es ist

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Führen wir in dieser Gleichung an Stelle von $a(x)$ den Ausdruck $\omega(x) + \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)$ ein, so ergiebt sich

$$\int_\alpha^\beta \omega(x)^2\,dx = 0,$$

woraus man schliesst, dass $\omega(x) \equiv 0$, d. h.

$$a(x) = \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)$$

ist.

Wir haben noch zu zeigen, dass die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nicht-negative Zahlen sind. Um dies etwa für λ_1 nachzuweisen, bestimmen wir $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu$ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem, dessen Determinante — wie eine ganz analoge Überlegung zeigt, wie die, die wir für das Gleichungssystem, das zur Bestimmung der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ diente, angestellt haben — von Null verschieden ist:

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_2(x)^2\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_3(x)\,dx + \ldots + \\ + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_\nu(x)\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_2(x)\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_3(x)^2\,dx + \ldots + \\ + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_\nu(x)\,dx,$$

. . . .

$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_2(x)\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_3(x)\,dx + \ldots + \\ + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)^2\,dx.$$

Führen wir — wie früher — die Abkürzung

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \ldots - \mu_\nu a_\nu(x)$$

ein, so erhält unser Gleichungssystem die folgende einfache Form:

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0, \quad \int_\alpha^\beta a_3(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0, \ldots, \quad \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0;$$

da ferner

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx > 0 \text{ [8]}$$

ist, so zeigen diese Beziehungen, dass $\overline{\omega}(x)$ eine Lösung unsrer Integralungleichungen ist. Daher erfüllt diese Funktion auch die Ungleichung

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx \geqq 0;$$

da aber

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)]\,\overline{\omega}(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx \geqq 0$$

ist, so folgt in der Tat $\lambda_1 \geqq 0$, womit unsre Behauptung bewiesen ist.

---

[8]) Das Integral $\int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx$ kann nicht gleich Null sein, da in diesem Falle

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \ldots - \mu_\nu a_\nu(x) \equiv 0$$

sein müsste, im Widerspruch mit der angenommenen linearen Independenz der Funktionen $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$.

Ein Problem von Dedekind.

Von Öystein Ore in Kristiania.

Es seien zwei Systeme von positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$m_1,\ m_2, \ldots m_r \tag{1}$$

$$l_1,\ l_2, \ldots\ l_r \tag{2}$$

so gegeben, dass

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + \ldots + m_r l_r = n \tag{3}$$

sei. Es kann dann das folgende Problem gestellt werden:

Man soll alle algebraische Körper n-ten Grades bestimmen, in denen eine gegebene Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1}\ \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r} \tag{4}$$

besitzt, wobei $N\,\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$ *ist.*

Diese Aufgabe, welche Herr Bauer nach Dedekind benannt hat, wurde von Herrn Bauer[1]) für den Spezialfall

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 1$$

behandelt und vollständig gelöst. In dieser Note möchte ich zeigen wie man das allgemeine Problem in Angriff nehmen kann, und auch diesen Fall vollständig erledigen. In meiner Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Körper“ (Kap. IV. § 6)[2]) habe ich gezeigt, dass immer ein Körper von der gewünschten Art existiert, d. h., dass die Dedekindsche Aufgabe immer lösbar ist. Im Folgenden sollen allgemein die gesuchten Körper dadurch bestimmt werden, dass man die Form einer erzeugenden Gleichung des Körpers angibt.

Es seien

$$m^{(1)},\ m^{(2)}, \ldots\ m^{(s)}$$

[1]) M. Bauer: Über ein Problem von Dedekind diese Zeitschrift, Bd 1.

[2]) Acta mathematica Bd. 44.

die verschiedenen unter den Zahlen (1) und

$$l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots l_{r_i}^{(i)} \tag{5}$$

die Exponenten in (4), wofür die Grade der zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)}$ gleich $m^{(i)}$ sind. Setzt man dann

$$l_1^{(i)} + l_2^{(i)} + \ldots + l_{r_i}^{(i)} = \lambda^{(i)} \tag{6}$$

so geht (3) in

$$m^{(1)} \lambda^{(1)} + m^{(2)} \lambda^{(2)} + \ldots + m^{(s)} \lambda^{(s)} = n \tag{7}$$

über. Die Primidealzerlegung (4) von p kann man dann auch in der Form

$$p = \prod_{i=1}^{s} \left(\mathfrak{p}_1^{(i)^{l_1^{(i)}}} \mathfrak{p}_2^{(i)^{l_2^{(i)}}} \ldots \mathfrak{p}_{r_i}^{(i)^{l_{r_i}^{(i)}}} \right)$$

schreiben, wo also $N\mathfrak{p}_\gamma^{(i)} = p^{m^{(i)}}$ ist.

Zu den Zahlen (5) kann man nun eine Reihe von anderen positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots h_{r_i}^{(i)} \tag{8}$$

so bestimmen, dass immer $h_\gamma^{(i)}$ zu $l_\gamma^{(i)}$ relativ prim ist, und ausserdem

$$\frac{h_1^{(i)}}{l_1^{(i)}} < \frac{h_2^{(i)}}{l_2^{(i)}} < \ldots < \frac{h_{r_i}^{(i)}}{l_{r_i}^{(i)}} \tag{9}$$

ist. Weiter bestimmt man, was immer möglich ist, eine Reihe von Primfunktionen (mod p)

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x),$$

so dass der Grad von $\varphi_i(x)$ gleich $m^{(i)}$ ist.

Wenn nun in einem Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades die Zerlegung (4) bestehen soll, so kann man, wie ich in der Arbeit: „Weitere Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Körper"[3]) gezeigt habe, immer eine solche primitive Zahl Θ des Körpers bestimmen, dass $\varphi_i(\Theta)$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ durch das Primideal $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)}$ genau in der Potenz $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)^{h_\gamma^{(i)}}}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots r_i)$ teilbar wird.

Bildet man nun die Gleichung $F(x) = 0$, welcher diese Zahl Θ genügt, so folgt daraus, wie in der letzterwähnten Abhandlung gezeigt worden ist, dass $F(x)$ die beiden folgenden Eigenschaften besitzen muss:

I. Man hat

$$F(x) \equiv \varphi_1(x)^{\lambda^{(1)}} \varphi_1(x)^{\lambda^{(2)}} \ldots \varphi_s(x)^{\lambda^{(s)}} \pmod{p}.$$

[3]) Die Arbeit wird in den Acta mathematica Bd. 45 erscheinen.

II. Das Hauptpolygon $(p, \varphi_i(x))$ von $F(x)$[4]) besteht aus r_i Seiten, für welche die Projektionen auf die X-Achse bzw. Y-Achse gleich

$$l_1^{(i)},\ l_2^{(i)}, \ldots\ l_{r_i}^{(i)}$$
$$h_1^{(i)},\ h_2^{(i)}, \ldots\ h_{r_i}^{(i)}$$

sind.

Wenn also in einem Körper $P(\vartheta)$ die Zerlegung (4) besteht, so muss es auch für diesen Körper mindestens eine erzeugende Gleichung $F(x) = 0$ geben, wofür die beiden Bedingungen I und II erfüllt sind. Umgekehrt folgt aber auch[5]), dass jede irreduzible Gleichung $F(x) = 0$, für welche diese Bedingungen erfüllt sind, einen algebraischen Körper $P(\Theta) = P(\vartheta)$ definiert, in dem die Primidealzerlegung (4) für die Primzahl p besteht.

Man kann das Ganze folgendermassen zusammenfassen:

Die Lösung der Dedekindschen Aufgabe wird durch alle Körper n-ten Grades geliefert, für die es eine irreduzible, erzeugende Gleichung $F(x) = 0$ gibt, welche den Bedingungen I und II genügt.

In den Forderungen I und II können die Primfunktionen $\varphi_i(x)$ beliebig vom Grade m_i gewählt werden, und weiter unterliegen die Zahlen $h_\Upsilon^{(i)}$ nur der Bedingung, dass $h_\Upsilon^{(i)}$ zu $l_\Upsilon^{(i)}$ relativ prim sei und ausserdem die Verhältnisse (9) verschieden seien. Alle irreduzible Gleichungen, welche sich aus I und II unter diesen Bedingungen ergeben, definieren Körper $P(\vartheta)$, in denen die Zerlegung (4) besteht. Wie man aber leicht sieht, erhält man auch alle Körper dieser Art, wenn man die Primfunktionen $\varphi_i(x)$ und die Zahlen $h_\Upsilon^{(i)}$ als fest gegeben annimmt.

---

[4]) Ich wende hier die Bezeichnungen der unter [2]) zitierten Arbeit an.
[5]) Man sehe die in [2]) zitierte Arbeit, Kap. IV.

Über die Summierbarkeit durch typische Mittel.

Von MARCEL RIESZ in Stockholm.

1. Im Jahre 1909 habe ich einen Konvergenzsatz für DIRICHLETsche Reihen ausgesprochen, dessen Beweis ich später in den Acta Mathematica[1]) veröffentlicht habe. Dieser und ein verwandter Satz haben vielfache zahlentheoretische Anwendungen gefunden.[2]) Ich habe auch die Verallgemeinerung dieser Sätze auf *typische Mittel* angedeutet. Da nun auch diese Verallgemeinerungen in zahlentheoretischen Fragen wiederholt angewandt worden sind, (namentlich im Teilerproblem)[3]) scheint es mir angebracht, diese Verallgemeinerungen mit ihren ausführlichen Beweisen zu veröffentlichen, um damit endlich auch den von verschiedenen Fachgenossen an mich gerichteten Aufforderungen gerecht zu werden.

Es hat sich zweckmässig erwiesen, den Satz gleich für STIELTJESsche Integrale $\int_0^\infty e^{-tz}\, dA(t)$ zu fassen, wo also $A(t)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die z. B. in jedem endlichen Intervalle von beschränkter Schwankung ist. Dieser Ausdruck umfasst dann sowohl die DIRICHLETschen Reihen, wie auch die Integrale $\int_0^\infty a(t)\, e^{-tz}\, dt$. Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf typische

1) Ein Konvergenzsatz für DIRICHLETsche Reihen, Acta Math. 40 (1916) p. 349—361.

2) Für die Anwendungen vgl. man den Encyklopädie-Artikel von H BOHR und H. CRAMÉR, Neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Die ältere Literatur ist auch in meiner hier angeführten Arbeit zusammengestellt.

3) H. CRAMÉR, Über das Teilerproblem von PILTZ, Arkiv f. Math. 16 (1922) No. 21, p. 1—40. Diese Arbeit enthält einen Beweis für ganzzahlige Ordnungszahlen. A. WALFISZ, Über die summatorischen Funktionen einiger DIRICHLETschen Reihen, Diss. Göttingen 1922, p. 1–56. Der Verfasser gibt in dieser Arbeit einen den speziellen Zwecken angepassten Beweis.

Mittel erster Art, deute aber die entsprechenden Ergebnisse für typische Mittel zweiter Art an.

2. Wir nennen ein Integral $\int\limits_0^\infty e^{-tz}\, dA(t)$ durch typische Mittel k-ter Ordnung summierbar,[4]) wenn der Grenzwert

$$(1)\qquad \lim_{\omega\to\infty} \omega^{-k} A_k(z,\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \omega^{-k} \int\limits_0^\omega e^{-tz}(\omega-t)^k\, dA(t),\quad (k \geq 0)$$

existiert. Die Definition der gleichmässigen Summierbarkeit leuchtet ohne weiteres ein. Wir setzen im folgenden speziell

$$(2)\qquad A_k(0,\omega) = \int\limits_0^\omega (\omega-t)^k\, dA(t) = A_k(\omega)$$

Wir sprechen nun einige Sätze aus, deren Beweise später folgen.

Satz I. *Ist*

$$(3)\qquad A_k(\omega) = o(e^{\omega c}\omega^k)\ ,\ (c > 0,\ k \geq 0),$$

so ist das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-tz}\, dA(t)$ *in jedem endlichen Gebiet der Halbebene* $\Re(z) > c$ *durch Mittel k-ter Ordnung gleichmässig summierbar und definiert somit in dieser Halbebene eine regulär-analytische Funktion* $G(z)$. *Ist diese Funktion noch in gewissen Punkten der Geraden* $\Re(z) = c$ *regulär,*[5]) *dann ist das Integral auch in diesen Punkten durch Mittel k-ter Ordnung summierbar und zwar gleichmässig auf jeder Regularitätsstrecke der Geraden. Die Bedingung* (3) *ist auch eine notwendige, damit die Gerade wenigstens einen Punkt enthalte, in dem die Reihe durch Mittel k-ter Ordnung summierbar ist.*[6])

---

[4]) Vgl. G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tracts, No. 18 (1915). Im folgenden als *Tract* zitiert.

[5]) Wir schreiben, wie üblich, $\Re(a+ib) = a$ und $\Im(a+ib) = b$

[6]) Die Bedingung (3) ist bei $c \leq 0$ nicht mehr notwendig aber noch hinreichend. Somit besteht der erste Teil des Satzes auch in diesem Falle. Da indessen dieser Fall auf denjenigen des Textes leicht zurückgeführt werden kann, und der Beweis sich bei $c > 0$ bequemer gestaltet, begnügen wir uns hier mit diesem letztgenannten Fall. Die Bezeichnung o wenden wir im bekannten Landauschen Sinne an, d. h. $f(\omega) = o(\varphi(\omega))$ bedeutet, dass $\frac{f(\omega)}{\varphi(\omega)}$ mit ins unendliche wachsendem ω nach Null strebt. Dagegen bedeutet $f(\omega) = O(\varphi(\omega))$ wie gewöhnlich, dass derselbe Quotient endlich bleibt. Wird

Satz II. *Ist* $k = 0$, *d. h.*

$$A_0(\omega) = A(\omega) = o(e^{\omega c}) \tag{3'}$$

und die Funktion $G(z)$ *rechts von einer Strecke der Geraden* $\Re(z) = c$ *beschränkt, dann konvergiert das Integral* $\int_0^\infty e^{-zt}\, dA(t)$ *in jedem Punkte, in dem die auf dieser Strecke fast überall existierende Randfunktion entweder eine Lipschitzsche Bedingung oder irgendeine der üblichen Konvergenzbedingungen einer Fourierschen Reihe erfüllt und zwar konvergiert das Integral gleichmässig auf jeder inneren Teilstrecke einer jeden Strecke, wo diese Bedingungen gleichmässig erfüllt sind.*[7])

Satz III. *Es sei* $k > 0$ *und* (3) *erfüllt. Ist die Funktion* $G(z)$ *rechts von einer Strecke der Geraden* $\Re(z) = c$ *beschränkt, dann ist das Integral auf dieser Strecke fast überall durch Mittel* k*-ter Ordnung summierbar. Dies ist namentlich in jedem Stetigkeitspunkte der Randfunktion der Fall. Die Summierbarkeit ist eine gleichmässige in jedem Intervall, das in einem Stetigkeitsintervall ganz enthalten ist.*

Zuletzt mögen hier einige Andeutungen über typische Mittel zweiter Art Platz finden mit besonderer Rücksicht auf den Umstand, dass diese Mittel bei dem besonders wichtigen Fall der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen mit den arithmetischen Mitteln gleichwertig sind.

Wir schreiben jetzt unsere Integrale in der Form

$$\int_1^\infty v^{-z}\, dC(v).$$

Die typischen Mittel zweiter Art sind dann durch den Ausdruck

$$\omega^{-k} C_k(z, \omega) = \omega^{-k} \int_1^\omega v^{-z} (\omega - v)^k\, dC(v)$$

gegeben. Die der Bedingung (3) entsprechende Voraussetzung lautet hier

$$C_k(0, \omega) = C_k(\omega) = o(\omega^{k+c}).$$

---

in der Bedingung (3) o durch O ersetzt, dann sind die Mittel k-ter Ordnung auf jeder Regularitätsstrecke der Geraden $\Re(z) = c$ gleichmässig beschränkt. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Notwendigkeit der Bedingung und für alle anderen Sätze.

[7]) Zur näheren Erläuterung dieses und des folgenden Satzes vgl. den Abschnitt 6.

Für reguläre Punkte gilt ein ähnlicher Satz wie I. Auch das Analogon von II gilt. In III müssen aber über die Randfunktion ähnliche spezielle Voraussetzungen wie in II getroffen werden. (Vgl. hierzu *Tract* p. 55, Bemerkungen über die Sätze 42 u. 43).

3. Wir leiten jetzt einige Hilfssätze ab, aus denen unsere Sätze leicht folgen.

Hilfssatz I. *Es sei $b(t)$ eine (etwa im Lebesgueschen Sinne) integrierbare Funktion, die der Bedingung*

$$(4) \qquad b(t) = o(t^k)$$

genügt. Hierbei bedeutet k eine beliebige reelle Zahl. Dann konvergiert das Integral

$$(5) \qquad F(z) = \int_0^\infty b(t)\, e^{-tz}\, dt$$

in der Halbebene $\Re(z) > 0$ absolut und stellt daselbst eine regulär-analytische Funktion $F(z)$ dar. Ist diese Funktion $F(z)$ auch noch in gewissen Punkten x der imaginären Achse regulär, so ist für diese Werte x und eine beliebige nicht negative ganze Zahl i

$$(6)\ H(x, \omega) = e^{-\omega x} \frac{d^j}{d x^j}(F(x)\, e^{\omega x}) - \int_0^\omega b(t)\, e^{-tx}(\omega - t)^j dt = o(\omega^k).$$

Diese Limesgleichung gilt gleichmässig auf jeder Regularitätsstrecke der imaginären Achse.[8])

Der Beweis ist demjenigen ganz analog, den ich für einen ähnlichen Satz über Potenzreihen in einer früheren Arbeit[9]) gegeben habe.

Es sei die Funktion $F(z)$ auf der Strecke $(i\tau_1, i\tau_2)$, wo $\tau_1 < \tau_2$, mit Einschluss der Endpunkte regulär. Wir wählen dann die Zahl $a' < 0$ so nahe an 0, dass die Funktion noch im Rechteck $(i\tau_1,\ i\tau_2,\ a' + i\tau_2,\ a' + i\tau_1)$ dieselbe Eigenschaft besitze. Wir setzen

---

[8]) Wie es aus dem folgenden Beweise hervorgeht, gilt sogar in jedem Halbstreifen, $\Re(z) \geq a,\ \tau_1 \leq \Im(z) < \tau_2$ in dem die Funktion regulär ist, gleichmässig

$$e^{\omega z} H(z, \omega) = o(\omega^k).$$

Herr Szegő gab neulich eine schöne Anwendung für einen Spezialfall eines von mir herrührenden analogen Satzes über Potenzreihen ($k = j = 0$, o durch O ersetzt). Vgl. G Szegő, Tschebyscheffsche Polynome und nicht fortsetzbare Potenzreihen, Math. Ann. 87 (1922) p. 90—111, spez. p. 95 u. ff.

[9]) Sätze über Potenzreihen, Arkiv f. Mat. etc. Bd. 11, No. 12 (1916) p. 1—16, spez. p. 10 ff.

endlich $z_1' = a' + i\tau_1$, $z_2' = a' + i\tau_2$, $z_1'' = a'' + i\tau_1$, $z_2'' = a'' + i\tau_2$ wo a'' eine beliebige, aber feste positive Zahl bedeutet.

In den folgenden Überlegungen nehmen wir zunächst $k \geq 0$ an. Der Fall $k < 0$, den wir übrigens im folgenden nicht benötigen, wird sich nachträglich leicht erledigen.

Wir betrachten die Funktion

(7) $$g_\omega(z) = \omega^{-k} e^{\omega z} (z - i\tau_1)^{j+k+1} (z - i\tau_2)^{j+k+1} H(z, \omega)$$

und zeigen, dass bei hinreichend grossem ω auf der ganzen Begrenzung des Rechtecks $(z_1', z_1'', z_2'', z_2')$

(8) $$|g_\omega(z)| < \varepsilon$$

wird, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag.

Wie leicht ersichtlich, ist für $\Re(z) > c$

$$H(z, \omega) = \int_\omega^\infty b(t)\, e^{-tz} (t-\omega)^j\, dt.$$

Mithin nach (4) für genügend grosses ω, wenn noch der Kürze halber $\Re(z) = \sigma$ gesetzt wird.

$$|H(z, \omega)| < \eta \int_\omega^\infty t^k e^{-t\sigma} (t-\omega)^j\, dt,$$

wo η eine beliebig kleine Zahl bedeutet. Oder

(9) $$|H(z, \omega)| < \eta\, e^{-\omega\sigma} \int_0^\infty (\omega+u)^k e^{-u\sigma} u^j\, du <$$

$$< \eta\, e^{-\omega\sigma} 2^k \int_0^\infty (\omega^k + u^k)\, e^{-u\sigma} u^j\, du < \frac{\eta K \omega^k e^{-\omega\sigma}}{\sigma^{j+k+1}}.$$ [10])

Hieraus folgt unmittelbar (vgl. die Ungleichung (11)), dass $|g_\omega(z)|$ auf den Strecken $(i\tau_1, z_1'')$, $(z_1''\, z_2'')$, $(z_2'', i\tau_2)$ beliebig klein gemacht werden kann.

Wir müssen nun noch $|g_\omega(z)|$ auf den linken Begrenzungsstücken des Rechtecks abschätzen. Zunächst ist es einleuchtend, dass es eine feste Zahl K_1 gibt derart, dass in jedem Punkte des Rechtecks $(i\tau_1, i\tau_2, z_2', z_1')$

(10) $$\left| e^{-\omega z} \frac{d^j}{dz^j} (F(z)\, e^{\omega z}) \right| < K_1\, \omega^j.$$

Bestimmen wir andererseits ω_0 so, dass für $t \geq \omega_0$ die Ungleichung $|b(t)| < \delta\, t^k$ gilt, wo δ eine beliebig klein wählbare positive Zahl

[10]) Wir bezeichnen mit $K, K_1, K_2, \ldots$ Zahlen, bei denen es nur darauf ankommt, dass sie endlich sind.

ist. Dann ergibt sich

$$\left|\int_0^\omega b(t)\, e^{-tz}(\omega - t)^j dt\right| < \omega^j \int_0^{\omega_0} |\, b(t)\,|\, e^{-t\sigma} dt + \delta \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{-t\sigma}(\omega - t)^j dt = I_1 + I_2.$$

Nun ist im ganzen Rechteck

$$I_1 < K_2\, \omega^j,$$

wo K_2 nur von ω_0 abhängt. Ausserdem ist

$$I_2 < \delta\, e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{-(\omega - t)\sigma} (\omega - t)^j\, dt < \delta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{-(\omega - t)\sigma} (\omega - t)^j\, dt <$$

$$< \frac{\delta\, \omega^k e^{-\omega\sigma}\, \Gamma(j+1)}{|\,\sigma\,|^{j+1}}$$

Mithin

$$\left|\int_0^\omega b(t)\, e^{-tz} (\omega - t)^j\, dt\right| < K_2\, \omega^j + \frac{\delta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \Gamma(j+1)}{|\,\sigma\,|^{j+1}}.$$

Ferner ist auf der Begrenzung des Rechtecks

$$\text{(11)} \qquad |\, z - i\tau_1\,|^{j+k+1}\, |\, z - i\tau_2\,|^{j+k+1} < K_3\, |\,\sigma\,|^{j+k+1}.$$

Aus diesen Abschätzungen erhalten wir

$$|\, g_\omega(z)\,| < |\,\sigma\,|^{j+k+1} \left(K_4\, \omega^{j-k} e^{\omega\sigma} + \frac{K_5\, \delta}{|\,\sigma\,|^{j+1}}\right).$$

Da aber bekanntlich für $\nu \geq 0$, $l \geq 0$

$$e^{-\nu}\, \nu^l \leq \left(\frac{l}{e}\right)^l,$$

so ist der letzte Ausdruck kleiner als

$$K_6\, \omega^{-(2k+1)} + K_5\, \delta\, |\,\sigma\,|^k.$$

Für genügend grosses ω wird dieser Ausdruck kleiner als ein beliebig kleines ε. Damit ist (8) für die ganze Begrenzung des Rechtecks $(z_1', z_1'', z_2'', z_2')$ dargelegt.

Nun ist aber die Funktion $g_\omega(z)$ in diesem Rechteck regulär, daher erreicht ihr absoluter Betrag sein Maximum auf der Begrenzung. Mithin ist für einen beliebigen Punkt x der Strecke $(i\tau_1, i\tau_2)$

$$\text{(12)} \qquad \left| e^{\omega x} \frac{d^j}{dx^j} (e^{\omega x} F(x)) - \int_0^\omega b(t)\, e^{-tx} (\omega - t)^j\, dt \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon\, \omega^k}{|\, i\tau_1 - x\,|^{j+k+1}\, |\, i\tau_2 - x\,|^{j+k+1}}$$

d. h. die Beziehung (6) bewiesen. Besteht nun die Strecke (x_1, x_2) ausschliesslich aus Regularitätsstellen, so ist sie in einer grösseren Strecke von derselben Eigenschaft enthalten. Bezeichnet man die Endpunkte dieser grösseren Strecke mit $i\tau_1$ und $i\tau_2$, so folgt aus (12), dass die Limesgleichung (6) für die Punkte der Strecke (x_1, x_2) gleichmässig besteht.

Im obigen war $k \geq 0$ angenommen. Ist $k < 0$, dann ersetzen wir in (7) den Faktor $(z-i\tau_1)^{j+k+1}(z-i\tau_2)^{j+k+1}$ mit $(z-i\tau_1)^{j-2k+1}$ $(z-i\tau_2)^{j-2k+1}$ Statt der Abschätzung (9) erhält man jetzt

$$|H(z, \omega)| < \eta\, \omega^k e^{-\omega\sigma} \int_0^\infty e^{-u\sigma} u^j\, du = \frac{\eta\, \omega^k e^{-\omega\sigma}\, \Gamma(j+1)}{\sigma^{j+1}}.$$

Daher bleibt die Abschätzung $|g_\omega(z)| < \varepsilon$ für die rechte Hälfte der Begrenzung bestehen.

Für I_2 erhält man jetzt $(\omega_0 > 1)$

$$I_2 < \delta\, e^{-\omega\sigma} \int_{\omega_0}^{\omega} t^k e^{(\omega-t)\sigma} (\omega-t)^j\, dt = \delta\, e^{-\omega\sigma} \left(\int_{\omega_0}^{\frac{\omega}{2}} + \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} \right) <$$

$$< \delta\, e^{-\omega\sigma} \left(\omega^{j+1} e^{\frac{\omega\sigma}{2}} + \left(\frac{\omega}{2}\right)^k \frac{\Gamma(j+1)}{|\sigma|^{j+1}} \right).$$

Aus dieser Ungleichung und den übrigen auch jetzt bestehenden Ungleichungen ergibt sich die Abschätzung $|g_\omega(z)| < \varepsilon$ auch für die linke Hälfte der Begrenzung. Das übrige folgt wie oben.

4. Im folgenden nehmen wir wieder $k \geq 0$ an.

Aus dem Hilfssatze I folgt unmittelbar der

Hilfssatz II. *Es sei $b(t)$ eine integrierbare Funktion, die der Bedingung* (4) *genügt, wobei $k \geq 0$. Ist die durch das Integral* (5) *in der Halbebene $\Re(z) > 0$ dargestellte Funktion $F(z)$ noch in gewissen Punkten x der imaginären Achse regulär, dann ist das Integral* (5) *in diesen Punkten durch Mittel k-ter Ordnung summierbar, d. h. es ist*

$$F(x) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega (\omega-t)^k\, b(t)\, e^{-tx}\, dt. \tag{13}$$

Die Summierbarkeit ist auf jeder Regularitätsstrecke eine gleichmässige.

Der Beweis lässt sich ebenso führen wie der entsprechende Beweis für Potenzreihen in meiner auf S. 5 angeführten Arbeit.

Ist zunächst k ganz, dann ist der Beweis in der Formel (6) enthalten Man setze in der Tat in dieser Formel $j = k$ und schreibe

$$e^{\omega x} \frac{d^k}{dx^k} (f(x) e^{\omega x}) = \omega^k f(x) + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \omega^{k-p} f^{(p)}(x).$$

Bei nicht ganzzahligen k setzen wir

$$B_k(x, \omega) = \int_0^\omega b(t) e^{-tx} (\omega - t)^k dt.$$

Dann ist nach bekannten Sätzen über Integration nicht ganzzahliger Ordnung

$$\frac{\Gamma([k]+1)\,\Gamma(k-[k])}{\Gamma(k+1)} B_k(x, \omega) = \int_0^\omega B_{[k]}(x, t)(\omega - t)^{k-[k]-1} dt =$$

$$= \int_0^\omega (B_{[k]}(x, t) - t^{[k]} f(x))(\omega - t)^{k-[k]-1} dt + \frac{\Gamma([k]+1)\,\Gamma(k-[k])}{\Gamma(k+1)} f(x).$$

Das letzte Integral kann geschrieben werden

$$\int_0^\omega = \int_0^{\omega-1} + \int_{\omega-1}^{\omega}.$$

Schreibt man in (6) $j = [k]$, erhält man sofort

$$\int_{\omega-1}^{\omega} = o(\omega^k).$$

Andererseits kommt durch partielle Integration

$$\int_0^{\omega-1} = \frac{B_{[k]+1}(x, \omega-1) - f(x)(\omega-1)^{[k]+1}}{[k]+1} +$$

$$+ \frac{k-[k]-1}{[k]+1} \int_0^{\omega-1} (B_{[k]+1}(x, t) - f(x)\, t^{[k]+1})(\omega - t)^{k-[k]-2} dt.$$

Beachtet man jetzt, dass $k-[k]-2 < -1$ und daher

$$\int_0^{\omega-1} (\omega - t)^{k-[k]-2}\, dt < \int_1^{\infty} t^{k-[k]-2}\, dt = \frac{1}{1+[k]-k}$$

und setzt in (6) $j=[k]+1$; so folgt ohne Schwierigkeit, dass auch $I_1 = o(\omega^k)$ ist. Damit ist aber (13) dargelegt. Da alle Abschätzungen gleichmässig gelten, gilt auch (13) auf jeder Regularitätsstrecke gleichmässig.

Ähnlich beweist man den

Hilfssatz III. *Wenn* $k > k' > -1$, *dann gilt unter der Bedingung* (4) *auf jeder Regularitätsstrecke der imaginären Achse gleichmässig*

$$\int_0^{\omega} b(t)\, e^{-tx} (\omega - t)^{k'}\, dt = o(\omega^k)$$

und

$$\int_0^{\omega} b(t) (e^{-tx} - e^{-\omega x}) (\omega - t)^{k'-1}\, dt = o(\omega^k).$$ [11])

5. Diese Ergebnisse setzen uns in Stand unsere Hauptsätze zu beweisen. Übrigens ist Hilfssatz II ein Spezialfall von Satz I.

Es sei also die Bedingung (3) erfüllt.

a) Zunächst sei k eine ganze Zahl. Dann kommt (vgl. *Tract* p. 40) nach $k+1$ partiellen Integrationen

$$\omega^{-k} A_k(z, \omega) = \omega^{-k} \int_0^{\omega} e^{-tz} (\omega - t)^k\, dA(t) = \omega^{-k} e^{-\omega z} A_k(\omega) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1} \omega^{-k}}{k!} \int_0^{\omega} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1} \left\{ e^{-zt} (\omega - t)^k \right\} dt.$$

Hieraus beweist man wie im *Tract* (l. c.), dass infolge der Bedingung (3) $\omega^{-k} A_k(z, \omega)$ mit ins unendliche wachsendem ω für $\Re(z) > c$ gegen eine regulär-analytische Funktion $G(z) = \frac{z^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} A_k(t) e^{-zt} dt$ konvergiert. Es habe nun diese Funktion auf der Geraden $\Re(z) = c$

---

[11]) Vgl. hierzu *Tract* p. 43. Das erste Ergebnis besagt nur für nicht ganze k' etwas neues.

eine Regularitätsstrecke. Es ist leicht zu zeigen, dass auch noch auf dieser Strecke $\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^{-k} A_k(z, \omega) = G(z)$ gleichmässig gilt.

Zunächst ist nach (3) auf der Geraden $\Re(z) = c$ gleichmässig

$$e^{\cdot\omega z}\,\omega^{-k} A_k(\omega) = o(1).$$

Damit ist der erste Teil des letzten Ausdruckes abgeschätzt. Der zweite Teil kann, wenn man noch $A_k(t)\,e^{-tc} = b(t)$ setzt, geschrieben werden

$$\frac{\omega^{-k}}{k!} z^{k+1} \int_0^{\omega} A_k(t)\, e^{-tz} (\omega - t)^k dt + \frac{\omega^{-k}}{k!} \sum_{p\,0}^{k} H_p\, z^{p+1} \int_0^{\omega} A_k(t)\, e^{-tz} (\omega - t)^p dt =$$

$$= \frac{\omega^{-k}}{k!} z^{k+1} \int_0^{\omega} b(t)\, e^{-t(z-c)} (\omega - t)^k dt + \frac{\omega^{-k}}{k!} \sum_{p\,0}^{k} H_p\, z^{p+1} \int_0^{\omega} b(t)\, e^{-t(z-c)} (\omega - t)^p dt,$$

wo die H_p Konstanten sind. Wir schreiben nun für $\Re(z) > c$

$$\frac{k!\,G(z)}{z^{k+1}} = \int_0^{\infty} A_k(t)\, e^{-tz}\, dt = \int_0^{\infty} b(t)\, e^{-t(z-c)}\, dt.$$

Laut Voraussetzung besitzt diese Funktion auf der Geraden $\Re(z) = c$ eine Regularitätsstrecke (z_1, z_2). Daher ist die auf der imaginären Achse gelegene Strecke $(z_1 - c,\ z_2 - c)$ eine Regularitätsstrecke der Funktion $\int\limits_0^{\infty} b(t)\, e^{-tz}\, dt$. Wendet man nun die Hilfssätze II und III an, dann folgt unmittelbar, dass das erste Glied auf der rechten Seite des Ausdruckes (14) auf der Strecke (z_1, z_2) gleichmässig gegen die Funktion $G(z)$ konvergiert und dass die übrigen Glieder, d. h. $\omega^{-k} \sum\limits_{p\,0}^{k}$ gleichmässig gegen Null konvergieren.

b) Es sei jetzt k keine ganze Zahl. Es genügt den Beweis nur unter der Voraussetzung $0 < k < 1$ explizit auszuführen. Im allgemeinen Falle spielt $A_{|k|+1}(t)$ dieselbe Rolle wie jetzt $A_1(t)$.

Man ersieht, wie im *Tract* (p. 42—43), dass unter der Voraussetzung (3) $\omega^{-k} A_k(z, \omega)$ für $\Re(z) > c$ mit ins unendliche wachsendem ω gegen die regulär-analytische Funktion

$$(15) \qquad G(z) = \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\infty} A_k(t)\, e^{-tz}\, dt = z^2 \int_0^{\infty} A_1(t)\, e^{-tz}\, dt$$

konvergiert. Es ergibt sich jetzt (vgl. l. c.)

$$\omega^{-k} A_k(z, \omega) = \omega^{-k} \int_0^{\omega} e^{-tz} (\omega - t)^k \, d\, A(t) =$$

$$= \omega^{-k} \int_0^{\omega} A_1(t) \frac{d^2}{dt^2} \left\{ (e^{-tz} - e^{-\omega z}) (\omega - t)^k \right\} dt + A_k(\omega) e^{-\omega z} \omega^{-k} = I_1 + I_2.$$

Infolge von (3) ist wieder für $\Re(z) = c$ gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} I_1 = \lim_{\omega \to \infty} A_k(\omega) e^{-\omega z} \omega^{-k} = 0.$$

Andererseits ist, indem wir $A_1(t) e^{-tc} = b(t)$ setzen,

$$I_2 = \omega^{-k} z^2 \int_0^{\omega} A_1(t) e^{-tz} (\omega - t)^k + 2k \omega^{-k} z \int_0^{\omega} A_1(t) e^{-tz} (\omega - t)^{k-1} dt +$$

$$+ k(k-1) \omega^{-k} \int_0^{\omega} A_1(t) (e^{-tz} - e^{-\omega z}) (\omega - t)^{k-2} dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

Aus (3) und aus (vgl. *Tract* p. 27)

$$A_1(\omega) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-k)} \int_0^{\omega} A_k(t) \, (\omega - t)^{-k} dt$$

folgt leicht, dass auch

$$A_1(\omega) = o\,(e^{\omega c} \omega^k)$$

ist. Dann folgt aber aus Hilfssatz II wie oben, dass auf jeder Regularitätsstrecke gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} J_1 = G(z)$$

und aus Hilfssatz III, dass ebenfalls gleichmässig

$$\lim_{\omega \to \infty} J_2 = 0 \text{ und } \lim_{\omega \to \infty} J_3 = 0$$

ausfällt. Damit ist nun unser Beweis zu Ende.

Dass die Bedingung (3) auch notwendig ist, damit das Integral an wenigstens einer Stelle der Geraden $\Re(z) = c$ durch Mittel k-ter Ordnung summierbar sei, folgt leicht durch Überlegungen, die im *Tract* durchgeführt sind (p. 40—43) und auf die wir schon oben hingewiesen haben.

6. Wir schreiten jetzt zur Verallgemeinerung des Satzes I, d. h. zum Beweise der Sätze II und III.

Es sei also wieder die Bedingung (3) erfüllt und die durch (15) für $\Re(z) > c$ dargestellte Funktion $G(z)$ sei für

$$\Re(z) > c\ ,\quad \tau_1 - \delta \leq \Im(z) \leq \tau_2 + \delta$$

bechränkt. Dann gibt es bekanntlich auf der Strecke $(c + i(\tau_1 - \delta),\ c + i(\tau_2 - \delta))$ fast überall eine Randfunktion, der sich $G(z)$ nähert, wenn z von rechts und der reellen Achse parallel den Punkten dieser Strecke zustrebt. Wir bezeichnen auch diese Randfunktion mit $G(z)$

Bedeutet jetzt z einen beliebigen Punkt der Halbebene $\Re(z) > c$ und bezeichnet man mit C einen beliebigen in dieser Halbebene verlaufenden rektifizierbaren Kurvenzug, der die Punkte $z_1 = c + i\tau_1$ und $z_2 = c + i\tau_2$ mit einander verbindet und so beschaffen ist, dass die durch die Strecke (z_1, z_2) und C gebildete geschlossene Kurve den Punkt z einschliesst, so ist nach bekannten Sätzen

$$(16)\qquad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_2}^{z_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = G_1(z) + G_2(z)$$

wobei also

$$(17)\qquad G_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_2}^{z_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

und

$$(18)\qquad G_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Bedeutet nun ζ einen Punkt der Strecke (z_1, z_2), so ist offenbar

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\int_0^\infty e^{t(\zeta - z)}\, dt$$

daher

$$G_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz} dt \int_{z_2}^{z} \left(-\frac{1}{2\pi i}\, G(\zeta) e^{t\zeta}\right) d\zeta = \int_0^\infty p(t)\, e^{-tz}\, dt$$

Nach einem bekannten Satze von RIEMANN-LEBESGUE ist dann

(19) $$p(t) = o(e^{tc}).$$

Ferner folgt aus (17), dass $G_1(z)$ in der ganzen, durch die Strecke (z_1, z_2) aufgeschnittenen Ebene regulär ist und im unendlichen wenigstens von der ersten Ordnung verschwindet. Wir setzen noch

$$P(t) = \int_0^t p(v)\, dv$$

Dann ist wiederum für $\Re(z) > c$ die Funktion $G_2(z)$ gleich dem durch Mittel k-ter Ordnung summierten Ausdruck $\int_0^\infty e^{-tz}(dA(t) - dP(t))$ d. h.

$$G_2(z) = \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-k} \int_0^\omega e^{-tz} (\omega - t)^k (dA(t) - dP(t))$$

Setzen wir jetzt $A(t) - P(t) = B(t)$, dann folgt aus (3) und (19)

$$B_k(\omega) = \int_0^\omega (\omega - t)^k\, dB(t) = o(\omega^k e^{\omega c})$$

Andererseits ergibt sich aus (18) (und der Willkürlichkeit von C), dass die Funktion $G_2(z)$ in der z. B. durch die Strecken $(z_2, c + i\infty)$ und $(c - i\infty, z_1)$ aufgeschnittenen Ebene regulär ist. Für das Integral $\int_0^\infty e^{-tz}\, dB(t)$ sind also alle Bedingungen des Satzes I erfüllt und somit ist dieses Integral auf jeder in (z_1, z_2) enthaltenen Strecke durch Mittel k-ter Ordnung gleichmässig summierbar.

Aus dem über $G_1(z)$ gesagten (namentlich aus dem Verhalten dieser Funktion im unendlichen) folgt dass für einen beliebigen Punkt x der Strecke (z_1, z_2) der Ausdruck

$$\int_0^\omega p(t)\, e^{-tx} (\omega - t)^k\, dt \qquad (k \geq 0 \text{ oder auch nur } > -1)$$

durch ein absolut konvergentes Integral dargestellt werden kann, das ähnlich gebaut ist wie das PERRONsche Integral (vgl. *Tract* p. 12) oder dessen Verallgemeinerungen (vgl. *Tract* p. 50). Dieses Integral lässt sich dann durch Methoden behandeln, die aus der Theorie der Potenzreihen oder FOURIERschen Reihen geläufig sind (vgl. z. B. meine Arbeit: Über einen Satz des Herrn FATOU, J. f. Math. Bd. 140 (1911) p. 91—99, spez. p. 98—99).

Da die Sätze II und III in der hier gegebenen Allgemeinheit für die genannten zahlentheoretischen Anwendungen wenigstens einstweilen reichlich ausreichen dürften, gehen wir hier auf weitere Verallgemeinerungen nicht ein.[12])

---

[12]) Vgl. indessen die Andeutungen, die ich in einer kurzen Mitteilung (Sur les séries de DIRICHLET et les séries entières, Comptes Rendus 149 (1909) p. 909) gegeben habe und die zum Teil von Herrn NEDER (Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 84 (1921) p. 117—136) ausgeführt worden sind. Z. B. kann die Beschränktheit der Funktion durch viel allgemeinere Bedingungen ersetzt werden. Es lässt sich auch ein dem sogenannten RIEMANNschen Lokalisationssatz (vgl. für diesen Ausdruck NEDER l. c.) nachgebildeter Satz verhältnismässig leicht herleiten.

Sur les rapports topologiques d'un problème d'analyse combinatoire.

Par Dénes König à Budapest.

§ 1.

Nos considérations se rapporteront à certaines matrices

$$\| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

à ν dimensions et d'ordre n, constituées par les éléments $a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$ en nombre n^ν. Si n de ces éléments ne diffèrent entre eux que par l' α-ième indice, nous dirons qu'ils forment une *ligne* de la matrice $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Le nombre des lignes de la même „direction" α est évidemment $n^{\nu-1}$, donc le nombre total des lignes est $\nu n^{\nu-1}$. En additionnant les éléments correspondants de deux ou de plusieurs matrices de même dimension et de même ordre, on obtient une matrice qui sera appelée la *somme* des premières:

$$\| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \| + \| b_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \| + \ldots = \| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} + b_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} + \ldots \|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons dans ce qui suit que les éléments sont des nombres entiers non négatifs.

Si la somme des éléments de chaque ligne est le même nombre $d\,(>0)$, la matrice sera appelée *régulière* et du *degré d.*[1]) Les matrices du premier degré joueront un rôle essentiel; elles peuvent être caractérisées par le fait que toute ligne contient un

[1]) Les matrices régulières sont les seules auxquelles nous attribuons un „degré". Les termes „ordre", „degré", „régulier" sont choisis de telle façon qu'ils correspondent pour $\nu = 2$ à la terminologie employée par Petersen dans la théorie des graphes (*Acta Mathematica*, t. 15). Mais à l'*addition* des matrices quadratiques correspond chez Petersen la *multiplication* des graphes.

seul élément égal à 1, les autres éléments étant nuls. Pour $\nu = 2$ les matrices du premier degré correspondent au termes du développement d'un déterminant à n^2 éléments, leur nombre est donc $n!$. Par l'induction complète on peut facilement prouver que pour un nombre ν quelconque de dimensions il existe des matrices du premier degré et que leur nombre est $(n!)^{\nu-1}$. Voici un exemple d'une matrice du premier degré et de trois dimensions:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Couche 1. Couche 2. Couche 3.

(Dans les cases vides on suppose des zéros). Cette représentation d'une matrice à 3 dimensions, dont nous nous servirons encore plus tard, est facile à comprendre: les trois couches sont considérées comme placées l'une sur l'autre.

D'après la définition, donnée plus haut, de l'addition des matrices, la somme de deux ou de plusieurs matrices régulières, de même dimension et de même ordre, est également une matrice régulière et son degré est égale à la somme des degrés des matrices additionnées. On a en particulier:

En additionnant des matrices du premier degré (de la même dimension et du même ordre), en nombre d, on obtient une matrice de degré d.

Le problème, dont nous voulons nous occuper a pour objet la réciproque de cette proposition évidente. C'est dire que nous posons la question suivante:

Étant donnée une matrice du degré d, peut-elle, oui ou non, être considérée comme la somme de matrices (en nombre d) du premier degré?

Pour le cas de $\nu = 2$ dimensions, j'ai démontré ailleurs que la réponse était toujours affirmative.[2])

[2]) J'ai énoncé ce théorème, ou plutôt son équivalent se rapportant à la théorie des graphes, dans une conférence faite au Congrès de Philosophie Mathématique à Paris (avril, 1914). Cette conférence vient de paraitre dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (t. 30, 1923, p. 443). J'ai donné une démonstration détaillée, ainsi que des applications concernant l'Analysis situs et la théorie générale des ensembles dans les *Mathematische Annalen* (t. 77, 1916, p. 453). Une autre démonstration a été donnée plus tard par Frobenius (*Sitzungsberichte der preussischen Akademie,* 1917, p. 274). Tout dernièrement M. Sainte-Laguë, qui ne connaissait pas ma publication parue pendant la guerre, a retrouvé ce théorème *(Comptes Rendus,* t. 176, 1923, p. 1202)

Mais cela cesse d'être vrai déjà pour $\nu = 3$; c'est ce qu'on peut prouver par l'exemple de la matrice du troisième ordre que voici :

0	1	1
1	0	1
1	1	0

Couche 1.

1	1	0
1	1	0
0	0	2

Couche 2.

1	0	1
0	1	1
1	1	0

Couche 3.

On voit, que la somme des éléments d'une quelconque des 27 lignes est égale à 2; on a donc une matrice régulière du second degré. En examinant toutes les possibilités on peut vérifier que cette matrice ne peut être la somme de deux matrices du premier degré. On peut construire un tel exemple avec les seuls éléments 0 et 1 — ce qui a son importance pour certaines applications —, mais alors l'ordre sera au moins 4. Voici l'exemple ($\nu = 3$, $n = 4$, $d = 2$) :

1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1

Couche 1.

1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

Couche 2.

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

Couche 3.

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

Couche 4.

Ici encore on peut assez facilement envisager toutes les possibilités et vérifier de la sorte que cette matrice du second degré ne peut non plus être décomposée en deux matrices du premier degré.

Comme nous avons dit plus haut, la possibilité d'une telle décomposition peut être demontrée dans le cas de $\nu = 2$, mais la démonstration cesse d'être applicable, quand le nombre des dimensions dépasse 2. Pour expliquer ce fait nous montrerons que notre question, au moins pour $d = 2$, est intimement liée à une proposition de l'Analysis situs qui, elle non plus, n'est vraie que pour le plus petit nombre possible de dimensions. En effet, tandis que toutes les variétés à une dimension (c'est-à-dire les lignes) sont *bilatères*, on trouve parmi les variétés à deux dimensions (ce sont les surfaces) et à plusieurs dimensions, et cela quel que soit le nombre des dimensions (> 1), des variétés *unilatères*. Dans le § 2 nous ferons voir la relation entre notre question purement combinatoire et les considérations topologiques concernant le caractère unilatère on bilatère des variétés à deux ou à plusieurs dimensions, deux groupes de problèmes qui, à première vue, semblent bien éloignés l'un de l'autre.

§ 2.

Soit d'abord le nombre des dimensions $\nu = 2$. On peut faire correspondre à chaque matrice quadratique

$$\| a_{ij} \|$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

un *graphe* (assemblage, réseau, complexe de lignes) qui, au sens de l'Analysis situs, est parfaitement déterminé, et cela de la manière suivante.[3]) On fait correspondre aux lignes (des deux directions) de la matrice deux fois n points

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ et } B_1, B_2, \ldots, B_n$$

et on joint chaque A_i à chaque B_j par a_{ij} arêtes, ce nombre pouvant être nul. Ni deux points A, ni deux B ne seront reliés. Si la matrice est régulière, le nombre des arêtes concourantes en un point $(A$ ou $B)$ sera le même pour chaque point. Dans ce cas le graphe est appelé *régulier* En appelant *degré* le nombre des arêtes concourantes en un point du graphe régulier, on voit que celui-ci est égal au degré de la matrice correspondante.

Si le degré de la matrice est $d = 2$, le graphe correspondant consiste d'une ou de plusieurs lignes fermées (polygones), chacune d'elles ayant un nombre *pair* de côtés (arêtes). Cette dernière propriété permet de montrer très facilement[3]) qu'une matrice quadratique du second degré se décompose toujours en deux matrices du premier degré.

Passant au cas $\nu = 3$, on peut — et cela par un procédé parfaitement analogue à celui du cas précédent — faire correspondre à chaque matrice cubique:

$$\| a_{ijk} \|$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

un *complexe de surfaces.*[4]) On fait correspondre aux couches de trois positions différentes trois fois n points:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$
$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

et on joint par une arête chaque couple de points qui sont désignées

[3]) Voir ma Note mentionnée, *Mathematische Annalen*, t. 77.

[4]) Pour la définition du „complexe de surfaces" (Flächencomplex), voir l'article „Analysis situs" de MM. Dehn et Heegaard dans l'*Encyklopädie der math. Wissenschaften*, t. III_1, p. 157.

par deux lettres différentes. On obtient ainsi un graphe G (composé de $3n$ points et de $3n^2$ arêtes), qui est évidemment régulier et de degré $2n$. Ce graphe (système de $3n^2$ arêtes) correspond au système de $2n$ points considéré dans le cas de $\nu = 2$ dimensions. Comme nous avons construit plus haut le graphe correspondant à la matrice quadratique en plaçant entre certains points un certain nombre d'arêtes (limitées par deux de ces points), maintenant nous formons le complexe de surfaces, que nous ferons correspondre à la matrice cubique, en plaçant un certain nombre de *membranes* (éléments de surface) triangulaires dans certains triangles (lignes fermées à trois arêtes) du graphe G, et cela de la manière suivante. Chaque triangle qu'on peut former des arêtes du graphe G a la forme $A_i B_j C_k$; il lui correspond donc un élément déterminé a_{ijk} de notre matrice. Nous plaçons dans chaque triangle $A_i B_j C_k$ des membranes triangulaires en nombre a_{ijk} (qui peut être nul). Les triangles sont les frontières des membranes; pour deux quelconques des membranes les points intérieurs seront considérés comme différents. Le complexe de surfaces, S, composé par ces membranes est — au sens de l'Analysis situs — parfaitement déterminé par la matrice cubique. À chaque ligne de la matrice correspond une arête de G, p. ex. l'arête correspondant à la ligne formée par les éléments

$$a_{311},\ a_{321},\ a_{331},\ a_{341},\ \ldots$$

est $A_3 C_1$. Ainsi aux éléments d'une même ligne correspondent des membranes ayant (à leur frontière) une arête commune. La régularité de la matrice s'exprime donc en disant que le nombre des membranes se rejoignant le long de la même arête est le même pour chaque arête. Dans ce cas le complexe de surfaces est appelé *régulier*. En appelant *degré* d'un complexe régulier de surfaces le nombre des membranes se rejoignant le long de la même arête, celui-ci est égal au degré d de la matrice cubique correspondante.

Nous nous occuperons du cas: $d = 2$. Dans ce cas chaque arête appartient à la frontière de deux membranes et de deux seulement. Donc: le complexe de surfaces correspondant à une matrice cubique du second degré est une *surface fermée*[5]), qui peut être connexe (d'un seul tenant) ou non.[6])

[5]) Nous employons ici le terme „surface fermée“ dans un sens plus large que d'habitude. Pour qu'un complexe de surfaces soit appelé surface fermée dans la stricte acception du mot, il est aussi nécessaire que les

Dans le cas de $\nu = 3$, $d = 2$ nous pouvons maintenant donner la réponse suivante à la question posée au § 1:

Une matrice M à trois dimensions et du second degré se décompose en deux matrices du premier degré si la surface fermée F, correspondant à la matrice, est bilatère, et ne se décompose pas si cette surface est unilatère.

Pour démontrer la première partie de ce théorème, supposons d'abord que F soit bilatère. D'après la définition de Möbius cela veut dire: qu'on peut choisir le sens de parcours (une „indicatrice") pour les frontières de toutes les membranes triangulaires de telle façon que chaque arête soit parcourue dans les deux sens contraires suivant qu'on regarde cette arête comme appartenant à la frontière de l'une ou de l'autre membrane auxquelles elle appartient (Loi de Möbius). Chaque membrane est du type

$$A_i B_j C_k$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour chacune d'elles un des deux ordres cycliques ABC on ACB est fixé. Dans le premier cas nous dirons que la membrane appartient à la classe I, dans le second cas à la classe II. D'après la loi de Möbius, si les frontières de deux membranes ont une arête commune, l'une des deux membranes appartient à la classe I, l'autre à la classe II. On peut faire correspondre à la classe I une matrice cubique $\| b_{ijk} \|$, d'ordre n, de la façon suivante. Nous posons $b_{ijk} = 1$, s'il existe une[7]) membrane $A_i B_j C_k$ appartenant à la

---

membranes se rejoignant en un sommet „forment un seul cycle" (v. Dehn et Heegaard, l. c.). Ici nous avons omis ce postulat et deux (ou plusieurs) portions de notre surface fermée peuvent être reliées par un seul point (singulier), comme, p. ex., les deux moitiés d'un cône. Mais cette différence n'a pas d'importance et ne compromet pas nos raisonnements ultérieurs, y compris ceux qui se rapporteront à la question du caractère unilatère on bilatère des surfaces. On peut, en effet, séparer ces portions de surface n'ayant en commun qu'un point isolé. Les surfaces obtenues ainsi sont des surfaces fermées dans le sens strict, et on peut remplacer par elles les surfaces fermées du texte.

[6]) La surface n'est certainement pas connexe p. ex. si, en supposant $n > 1$, un élément de la matrice est 2. On a alors deux membranes bornées par le même triangle et ces deux membranes forment — au sens de l'Analysis situs — une sphère, qui n'est contiguë à aucune autre portion de la surface.

[7]) La surface peut avoir deux membranes désignées par le même signe $A_i B_j C_k$ (v. la note précédente).

classe I; dans tout autre cas on pose $b_{ijk}=0$. La matrice $\| b_{ijk} \|$ ainsi définie est du premier degré, car, notre surface étant fermée, chaque arête appartient à une membrane de la classe I et à une seule, ce qui veut dire pour la matrice $\| b_{ijk} \|$ que dans chaque ligne il y a un élément égal à 1, les autres étant nuls. De même on peut faire correspondre à la classe II une matrice cubique $\| c_{ijk} \|$ également du premier degré. Comme les classes I et II épuisent les membranes de la surface, on a

$$\| b_{ijk} \| + \| c_{ijk} \| = M$$

et M est en effet décomposé.

En passant à la deuxième partie du théorème énoncé, supposons que notre matrice M puisse être décomposée en deux matrices du premier degré:

$$M = \| a_{ijk} \| = \| b_{ijk} \| + \| c_{ijk} \|.$$

Conformément à cette décomposition on peut partager les membranes de F en deux classes, I et II. S'il n'y a qu'une membrane désignée par $A_i\, B_j\, C_k$, c'est-à-dire, si $a_{ijk}=1$, nous la mettrons dans la classe I ou II, suivant qu'on a $b_{ijk}=1$ (et $c_{ijk}=0$) ou $c_{ijk}=1$ (et $b_{ijk}=0$). S'il y a deux membranes désignées par ce même signe ($a_{ijk}=2$) nous classerons une dans I, l'autre dans II. Ainsi deux membranes contiguës suivant une arête se trouveront toujours dans des classes différentes. En faisant correspondre aux frontières des membranes de la classe I l'ordre cyclique ABC, aux autres l'ordre cyclique ACB, la loi de Möbius se trouvera satisfaite. La surface F est donc en effet bilatère et la seconde partie du théorème énoncé est également démontrée.

Si on maintient la restriction $d=2$, on peut étendre notre résultat sans difficulté nouvelle à un nombre quelconque de dimensions. Ainsi la question, pour une matrice à ν dimensions et du second degré, d'être décomposable ou non, se ramène à la question de savoir si une variété à $\nu-1$ dimensions est bilatère ou unilatère.

Budapest, le 31 octobre 1923.

Note sur „Le troisième problème du jeu".

Par M. DANIEL ARANY à Budapest.

M. LOUIS BACHELIER traite dans son ouvrage „Calcul des probabilités" (Paris, Gauthier-Villars, 1912) le problème de la théorie générale du jeu, comme il suit:

1. *On suppose deux joueurs A et B ayant chacun à leur disposition une somme illimitée, jouant un nombre déterminé (μ) de parties, quelle est la probabilité que A perde a unités eu μ parties?* (Premier problème du jeu, article 52. p. 33).

Soient à chaque partie, p la probabilité que le joueur A gagne et $q = 1 - p$ la probabilité, qu'il perde.

Soient k le nombre des parties gagnées, $\mu - k$ le nombre des parties perdues, on doit avoir

$$(\mu - k) - k = a$$

d'où

$$\mu = a + 2k.$$

La probabilité, que A perde a unités eu $a + 2k$ parties, est

$$\omega_{a+2k,a} = \binom{a+2k}{k} p^k q^{a+k} \tag{1}$$

La quantité $\omega_{a+2k,a}$ est assujetie à la condition, exprimée par l'équation aux différences finies suivante:

$$\omega_{a+2k,a} = p\,\omega_{a+1+2(k-1),\,a+1} + q\,\omega_{a-1+2k,\,a-1} \tag{2}$$

dont la condition aux limites est $\omega_{0,0} = 1$.

2. *Le joueur A, ayant à chaque partie probabilité p de gagner 1 et probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1, quelle est la probabilité qu'il perde a unités eu $a + 2k$ parties. Le joueur A possède seulement a unités, le joueur B une somme illimitée ou simplement supérieure à k.* (Second problème du jeu, article 146. p. 106).

Désignons par $\omega_{a+k,a,a}$ la probabilité cherchée. Elle satisfait à l'équation aux différences finies suivante :

$$\omega_{a+2k,a,a}=p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1}+q\,\omega_{a-1+2k,a-1,a-1} \tag{3}$$

dont les conditions aux limites sont : $\omega_{0,0,0}=1$, $\omega_{2k,0,0}=0$.

La solution de l'équation aux différences finies (3) est :

$$\omega_{a+2k,a,a}=\frac{a}{a+2k}\binom{a+2k}{k}p^k q^{a+k}. \tag{4}$$

On déduit de l'équation (3) la valeur de l'expression $\omega_{a+2k,a,a}$ dans la forme suivante :

$$\begin{aligned}\omega_{a+2k,a,a}= &\quad p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1}\\ &+q\,p\,\omega_{a+2(k-1),a,a}\\ &+q^2\,p\,\omega_{a-1+2(k-1),a-1,a-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+q^{a-1}p\,\omega_{\ +2(k-1),2,2}\end{aligned} \tag{5}$$

Elle réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a}$ dite de l'ordre k, à la somme de a expressions, tous de l'ordre $k-1$, c'est-à-dire réduites d'une unité.

3. *Le joueur A possède a unités, le joueur B possède b unités; quelle est la probabilité, que le joueur perde a unités en $a+2k$ parties ?* (Troisième problème du jeu, article 192. p. 136)

M. Bachelier présente la valeur de cette probabilité, que je désignerai par $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans la forme suivante :

$$\begin{aligned}\omega_{a+2k,a,a,b}=p^k q^{a+k}\Big\{ &\ \varphi_{a+2k,a} - \varphi_{a+2k,a+2b}\\ &+\varphi_{a+2k,3a+2b}-\varphi_{a+2k,3a+4b}\\ &+\varphi_{a+2k,5a+4b}-\varphi_{a+2k,5a+6b}\\ &+\text{etc} \qquad -\text{etc.}\Big\}\end{aligned} \tag{6}$$

où $\varphi_{a+2k,a}$ est définie par l'équation :

$$\varphi_{a+2k,a}=\frac{a}{a+2k}\binom{a+2k}{k} \tag{7}$$

La série contenue dans les parenthèses de l'équation (6) s'arrête, quand $(2\lambda-1)a+2\lambda b$ ou $(2\lambda+1)a+2\lambda b$ est supérieur à $a+2k$.

4. Je veux présenter l'expression de $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans une forme qui n'est qu'une légère modification de celle de M. Bachelier.

Dans ce but, je pars de l'équation aux différences finies suivante :

$$\omega_{a+2k,a,a,b}=p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1,b-1}+q\,\omega_{a-1+2k,a-1,a-1,b+1} \tag{8}$$

dont les conditions aux limites sont: $\omega_{0,0,0,b}=1$, $\omega_{2k,0,0,b}=0$ et $\omega_{a+2k,a,a,0}=0$.

De l'équation (8) on déduit $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans la forme

$$\begin{aligned}\omega_{a+2k,a,a,b} = \;& p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1,b-1}\\ &+q\;\; p\,\omega_{a+2(k-1),a,a,b}\\ &+q^2\; p\,\omega_{a-1+2(k-1),a-1,a-1,b+1}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &+q^{a-1}p\,\omega_{2+2(k-1),2,2,b+a-2}\end{aligned}\tag{9}$$

Elle réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a,b}$ que nous dirons de l'ordre k, à la somme de a expressions, de l'ordre $k-1$, c'est-à-dire réduites d'une unité.

Si l'on choisit $k=1$, on reconnaît que

$$\omega_{a+2,a,a,b}=\omega_{a+2,a,a}\tag{10}$$

quand $b>1$ (v. équation (5)) et que

$$\omega_{a+2,a,a,b}=\omega_{a+2,a,a}-\left(\frac{p}{q}\right)^b\omega_{a+2,a+2b,a+2b,a}\tag{11}$$

quand $b=1$.

Je démontrerai, que l'équation:

$$\omega_{a+2\lambda,a,a,b}=\omega_{a+2\lambda,a,a}-\left(\frac{p}{q}\right)^b\omega_{a+2\lambda,a+2b,a+2b,a}\tag{12}$$

qui est vraie pour $\lambda=1$, reste vraie de même pour $\lambda=k$, si l'on suppose qu'elle est vraie pour $\lambda=k-1$.

Dans ce but j'écrirai le système d'équations (en nombre a) suivant:

$$\begin{aligned}
\omega_{a+2k-1,a+1,a+1,b-1} &= \omega_{a+2k-1,a+1,a+1}-\left(\frac{p}{q}\right)^{b-1}\omega_{a+2k-1,a+1+2(b-1),a+1+2(b-1),a+1}\\
\omega_{a+2k-2,a,a,b} &= \omega_{a+2k-2,a,a}-\left(\frac{p}{q}\right)^{b}\omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a}\\
\omega_{a+2k-3,a-1,a-1,b+1} &= \omega_{a+2k-3,a-1,a-1}-\left(\frac{p}{q}\right)^{b+1}\omega_{a+2k-3,a-1+2(b+1),a-1+2(b+1),a-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{a+2k-a,2,2,b+a-2} &= \omega_{a+2k-a,2,2}-\left(\frac{p}{q}\right)^{b+a-2}\omega_{a+2k-a,2+2(b+a-2),2+2(b+a-2),2}
\end{aligned}\tag{13}$$

En multipliant la première équation du système (13) par p, la seconde par pq, la troisième par pq^2 et la a-ième par pq^{a-1} et puis additionnant ces produits, on obtient (v. équations (5) et (9)) l'équation:

$$\omega_{a+2k,a,a,b} = \omega_{a+2k,a,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b} \begin{cases} q \quad \omega_{a+2k-1,a+1+2(b-1),a+1+2(b-1),a+1} \\ +pq \quad \omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a} \\ +p^2q \quad \omega_{a+2k-3,a-1+2(b+1),a-1+2(b+1),a-1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +p^{a-1}q\, \omega_{a+2k-a,2+2(b+a-2),2+2(b+a-2),a} \end{cases} \tag{14}$$

Pour reconnaître que l'expression contenue dans les parenthéses de l'équation (14) est égale à $\omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a}$, on doit former le dernier système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a} &= p\,\omega_{a+2k-1,a+2b+1,a+2b+1,a-1} + q\,\omega_{a+2k-1,a+2b-1,a+2b-1,a+1} \\ \omega_{a+2k-1,a+2b+1,a+2b+1,a-1} &= p\,\omega_{a+2k-2,a+2b+2,a+2b+2,a-2} + q\,\omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a} \\ \omega_{a+2k-2,a+2b+2,a+2b+2,a-2} &= p\,\omega_{a+2k-3,a+2b+3,a+2b+3,a-3} + q\,\omega_{a+2k-3,a+2b+1,a+2b-1,a-1} \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \omega_{a+2k-a,a+2b+a-1,a+2b+a-1,1} &= p\,\omega_{a+2k-a,a+2b+a,a+2b+a,0} + q\,\omega_{a+2k-a,a+2b+a-2,a+2b+a-2,2} \end{aligned} \tag{15}$$

En multipliant la seconde équation du système (15) par p, la troisième par p^2, la a-ième par p^{a-1} et puis additionnant ces produits on reconnaît enfin que la quantité contenue dans les parenthèses de l'équation (14) ést égale à $\omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a}$.

L'équation (12) réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dite de l'ordre k, à une autre ne contenant qu'une expression du même genre que $\omega_{a+2k,a,a,b}$ mais dont l'ordre est *abaissé* de b unités.

L'équation (12) fournit les mêmes résultats que celle de M. Bachelier, laquelle est représentee par l'équation (6) de cette note.

5. Si l'on désigne par

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a,b}$$

la probabilité que le joueur A, possédant une fortune a, perde ou gagne $a-y$ unités (selon que $a-y \gtrless 0$) en $a-y+2k$ parties, le joueur B possédant une fortune de b unités, on démontre par des procédés analogues aux précédents qu'elle satisfait à l'équation :

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a,b} = \omega_{a-y+2k,a-y,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b} \omega_{a-y+2k,a-y+2b,a+2b,a} \tag{16}$$

quand $k \geq b > 0$, où

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a} = \omega_{a-y+2k,a-y} - \left(\frac{p}{q}\right)^{y} \omega_{a-y+2k,a+y}. \tag{17}$$

Pour la démonstration de l'équation (17) v. article 154, p. 109—110, de l'ouvrage cité de M. Bachelier.

La fonction $\omega_{a-y+2k,a-y,a}$ est *discontinue* pour $y=0$ et on doit faire usage en ce point de l'équation (4) de cette note.

Budapest, le 14. avril 1923.

Über die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung.

Von S. Sidon in Budapest.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Riesz)

Vor einigen Jahren bewiesen Sie,[1]) dass in der für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion von beschränkter Schwankung gültigen altbekannten Abschätzung a_n und $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, das O selbst bei den *stetigen* Funktionen[2]) der nämlichen Klasse nicht durch o ersetzt werden kann.

Die von Ihnen daselbst aufgeworfenen Probleme löste Herr Paul Csillag[3]) mit Hilfe des folgenden Satzes, der eine Verallgemeinerung eines Resultates des Herrn L. Fejér[4]) ist:

Ist $\Sigma\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, so ist im Intervalle $0 \leq x < 2\pi$ überall

$$\lim \frac{s'_n(x)}{n} = 0,$$

wo $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ist.

---

[1]) Über die Fourier-Koeffizienten stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 312—315.

[2]) Unter einer stetigen Funktion ist hier immer eine im Intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ überall stetige, periodische Funktion zu verstehen.

[3]) Korlátos ingadozású függvények Fourier-együtthatóiról. Math. és Phys. lapok 27 (1918), S. 301—308. Siehe auch die ebendort erschienene Note des Verfassers.

[4]) Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourier-Reihe. Journal für r. u. a. Mathematik 142 (1913), S. 165—188. Dort wird der Sprung an einer beliebigen x Stelle aus der Fourier-Reihe der Funktion durch einen in den Koeffizienten linearen Grenzwert ausgedrückt; bei einer stetigen Funktion muss dieser Grenzwert für jedes x verschwinden.

Für $x = 0$ ergibt sich hieraus

$$1) \qquad \lim \frac{\sum_{k=1}^{n} k b_k}{n} = 0.$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ für $x = 0$ folgt auch $\lim \frac{\sum_{k=0}^{n} k a_k}{n} = 0$. Die arithmetischen Mittel von $(n a_n)$ und $(n b_n)$ konvergieren also gegen 0.

Gestatten Sie mir, eine Verschärfung dieses Satzes mitzuteilen. Es gilt nämlich auch der Satz:

Bei einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung bestehen die Gleichungen

$$2) \qquad \lim \frac{\sum_{k=0}^{n} |k a_k|}{n} = \lim \frac{\sum_{k=1}^{n} |k b_k|}{n} = 0.$$

Beweis: Mit $\Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ zugleich sind auch $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma b_n \sin nx$ die Fourier-Reihen stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung. Laut eines Young'schen Satzes[5]) lässt sich dies auch von den trigonometrischen Reihen $\Sigma n a_n^2 \sin nx$ und $\Sigma n b_n^2 \sin nx$ behaupten. Wenden wir auf diese letzteren Reihen 1) an, so ergibt sich

$$\lim \frac{\Sigma (k a_k)^2}{n} = \lim \frac{\Sigma (k b_k)^2}{n} = 0$$

und hieraus mit Hilfe einer sehr geläufigen Ungleichung 2). Aus 2) folgt offenbar $\underline{\lim} |n a_n| = \underline{\lim} |n b_n| = 0$. Es lässt sich sogar schliessen, dass $(n a_n)$ und $(n b_n)$ quasi gegen 0 konvergieren, d.

---

[5]) W. H. Young: On Fourier-series and fonctions of bounded variation. London Royal Soc. Proc. 88 (1913), S. 561—568. Der hier in Betracht kommende Satz lautet: Ist $\Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung und die trigonometrische Reihe $\Sigma (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ durch gliedweise Differentiation der Fourier-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung entstanden, so sind auch $\Sigma \alpha_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ und $\Sigma \beta_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ die Fourier Reihen stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung. Die Behauptung des Textes ergibt sich hieraus, wenn $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma b_n \sin nx$ mit ihren eigenen „Derivierten" auf die Young'sche Weise komponiert werden.

h. die Häufigkeit der Indices, für welche $|n a_n|$ und $|n b_n| > \varepsilon$ ist, ist 0.[6])

Zum Schluss zeige ich noch, wie sich als Korrolar von 2) der folgende Satz des Herrn J. von NEUMANN[7]) herleiten lässt: Sind die Partialsummen der trigonometrischen Reihe $\Sigma (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ nirgends negativ, so ist $\underline{\lim}\, |A_n| = \underline{\lim}\, |B_n| = 0$.

Die trigonometrische Reihe $\sum \frac{1}{n} (B_n \cos nx - A_n \sin nx)$ ist die FOURIER-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung $f(x)$. Die Funktion $f(x)$ ist stetig. Hätte sie Unstetigkeitsstellen, so liesse sich schreiben:

$$f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_k)}{n} = g(x) + h(x),$$

wo $g(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung ist, $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ die ja höchstens in abzählbarer Menge vorhandenen Sprungstellen von $f(x)$, $d_1, d_2, \ldots d_n \ldots$ den Betrag des Sprunges an diesen Stellen bezeichnen; bekanntlich ist $\Sigma |d_k|$ convergent. Bezeichnen wir die Partialsummen der FOURIER-Reihen von $g(x)$ und $h(x)$ mit σ_n bezw. $\tau_n(x)$, so ist

$$\lim \frac{\sigma'_n(x)}{n} = 0 \text{ und zwar gleichmässig.}$$

Ferner lassen sich in der Umgebung eines jeden x_k zwei Werte ξ_1 und ξ_2 angeben, für welche $\tau'_n(\xi_1)$ und $\tau'_n(\xi_2)$ von entgegengesetzten Vorzeichen und

$|\tau'_n(\xi_1)|$ und $|\tau'_n(\xi_2)| > cn$ (c eine von n unabhängige Konstante) sind. Diese Bedingungen erfüllen z. B. $\xi_1 = x_k + \frac{\pi}{2n+1}$ $\xi_2 = x_k + \frac{3\pi}{2n+1}$. Im Falle endlich vieler Sprunge folgt dies un-

---

6) Unter Häufigkeit ist $\lim \frac{l}{n_l}$ zu verstehen. Der Begriff der *Quasi-Konvergenz* wurde von Herrn M. FEKETE eingeführt. Vizsgálatok a FOURIER-sorokról. Math. és Term. Ért. 34 (1916), S. 759—786.

7) Von dem NEUMANN'schen Satze, der durch eine STEINHAUS'sche Fragestellung entstand und den Anlass zur vorliegenden Note gab, nahm ich durch die mündliche Mitteilung des Herrn M. FEKETE Kenntniss. Auch Herr I. SCHUR gab einen Beweis dieses Satzes, der ebenfalls von der Komposition Gebrauch macht.

mittelbar aus der bekannten Formel für $\sum_{k=0}^{n} \cos kx$; daraus folgt aber die Behauptung auch im allgemeinen Falle, wenn man berücksichtigt, dass bei hinreichend grossem K:

$$\left| \sum_{k=K}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,(x-x_k) \right| < \varepsilon\, n \quad (\varepsilon \text{ beliebig klein) ist.}$$

Die Partialsummen von $\sum (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ würden also ihr Vorzeichen wechseln. $f(x)$ muss demzufolge stetig sein, woraus nach 2) in der Tat $\underline{\lim}\,|A_n| = \underline{\lim}\,|B_n| = 0$ folgt.

Über die konformen Abbildungen schlichter Gebiete.

Von TIBOR RADÓ in Szeged.

Einleitung.

Wir betrachten im folgenden die konformen Abbildungen von beschränkten schlichten Gebieten, welche von einer endlichen Anzahl von geschlossenen Jordankurven begrenzt sind.[1])

Zwei Gebiete G_n und G'_n sind für $n = 1$ nach dem Fundamentalsatze[2]) stets aequivalent im Sinne konformer Abbildung. Für $n \geqq 2$ ist dies hingegen im Allgemeinen nicht mehr der Fall; beispielsweise sind zwei konzentrische Kreisringe $K_1: r_1 < |z| < R_1$ und $K_2: r_2 < |z| < R_2$ dann und nur dann konform aequivalent, wenn $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist.[3]) In § 1 zeigen wir, einer Anregung des Herrn KOEBE folgend, dass es eine *gegenseitige Lage* der Gebiete G_n und G'_n gibt, welche die konforme Aequivalenz unmöglich macht. Für den Fall zweier konzentrischer Kreisringe K_1 und K_2 wird diese gegenseitige Lage durch die Ungleichungen $r_1 < r_2 < R_2 < R_1$ karakterisiert.

---

[1]) Bekanntlich bleiben diese Abbildungen auch am Rande stetig und ein-eindeutig.

[2]) Für den Fundamentalsatz haben die Herrn L. FEJÉR und F. RIESZ einen äusserst einfachen Beweis gegeben, welcher in meiner Note *Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete* veröffentlicht wurde (diese Zeitschrift Bd. I. Seite 240).

[3]) Vgl. KOEBE, Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche etc., Jahresberichte der D. M. V. Bd. 15, Seite 142. Von grundlegender Bedeutung für diese Fragen ist die Arbeit von SCHOTTKY, Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, Journal f. d. r. n. a. Math. Bd. 83.

Die weiteren Entwicklungen beziehen sich auf die konformen Abbildungen eines Gebietes G_n auf sich selbst. Für $n = 1$ und $n = 2$ gibt es unendlich viele solche Abbildungen; beispielsweise gestattet eine Kreisfläche $|z| < r$ unendlich viele Drehungen, desgleichen ein Kreisring $r < |z| < R$. Für $n > 2$ gilt hingegen der *Endlichkeitssatz*, dass es nur endlich viele solche Abbildungen geben kann.[4]) Dieser Satz hat, wie wir wohl sagen können, einen topologischen Karakter, da seine Gültigkeit von der Anzahl der Randkurven abhängt. Es dürfte daher nicht ohne Interesse sein, eine Herleitung dieser Tatsache zu geben, bei welcher die topologischen und die funktionentheoretischen Gründe klar hervortreten. Wir versuchen dies in §§ 2—5, welche auch einige weitere Sätze über topologische Eigenschaften der hier betrachteten konformen Abbildungen enthalten. Wir betrachten ein Gebiet G_n mit $n > 2$ und eine (nicht *die*) Gruppe von topologischen Abbildungen des Gebietes auf sich selbst, wobei die einzelnen Abbildungen der Gruppe auch am Rande stetig und ein-eindeutig sein und die Indikatrix erhalten sollen. Ist die Gruppe endlich, also ihre Abbildungen periodisch, so erhält man leicht folgendes über ihr Verhalten in der Umgebung ihrer Fixpunkte:[5])

a) Ist T eine nicht identische Abbildung der Gruppe, so hat T nur isolierte Fixpunkte, von welchen kein einziger am Rande liegen kann.

b) Ist P ein Fixpunkt von T, so gibt es geschlossene Jordankurven mit beliebig kleinem Durchmesser, welche P im Innern enthalten und bei der Abbildung T in sich übergehen.

Es kann nun sehr einfach gezeigt werden, dass die Bedingungen *a)* und *b)* nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Endlichkeit der Gruppe sind. Ebenso einfach kann man aber beweisen, mit Hilfe einer von Herrn Bieberbach herrührenden eleganten Schlussweise, dass diese Bedingungen sicher erfüllt sind, wenn die Gruppe aus konformen Abbildungen besteht. Dementsprechend zerfällt die folgende Untersuchung in einen funktionentheoretischen (§ 2) und in einen topologischen (§§ 3—5) Teil. Die Methode gestattet auch eine funktionentheoretische Einkleidung, indem man

---

[4]) Vgl. l. c. [3]), sowie Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV (Acta Mathematica Bd. 41. Seite 323).

[5]) Vgl. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I, Abschnitt VI, § 6 (Berlin, 19_3).

sich durchgängig auf die Betrachtung konformer Abbildungen beschränken und den topologischen Hilfssatz in § 4 durch den Residuensatz ersetzen kann (s. den Schluss von § 5).

§ 1.

Satz. *Sei G_n $(n > 1)$ ein beschränktes schlichtes Gebiet, begrenzt durch geschlossene Jordankurven $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Es seien ferner $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_n^{(1)}$ geschlossene Jordankurven, welche ganz im Innern von G_n verlaufen, einander nicht treffen, und eine solche Lage haben, dass zwischen C_i und $C_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ keine weitere Kurve liegt.*

Diese Kurven $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots C_n^{(1)}$ begrenzen ein Gebiet $G_n^{(1)}$, auf welches G_n nicht umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden kann.

Dieser Satz muss wesentliche topologische Gründe haben, weil ja seine Gültigkeit von der gegenseitigen Lage der beiden Gebiete abhängt, er muss aber auch wesentliche funktionentheoretische Gründe haben, da die Gebiete topologisch aequivalent sind. Der folgende einfache Beweis ist so angeordnet, dass diese Gründe möglichst klar hervortreten.

1. Hilfssatz. *Es sei Σ ein beschränktes Gebiet, und $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ eine Folge von Funktionen, welche in Σ eindeutig, regulär und gleichmässig beschränkt sind. Diese Funktionen mögen ferner getrennte Wertegebiete haben, genauer: ist a gegeben, so gibt es unter den Funktionen der Folge höchstens eine, welche diesen Wert in Σ annimmt. Ist dann E eine abgeschlossene Teilmenge von Σ, und bedeutet λ_n die Schwankung von $f_n(z)$ auf E, so wird behauptet, dass λ_n gegen Null konvergiert.*

Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann enthält die Folge $f_{n_\nu}(z)$ eine unendliche Teilfolge, deren Elemente auf E Schwankungen haben, welche grösser als eine feste positive Zahl ε bleiben. Infolge der gleichmässigen Beschränktheit kann man daraus eine weitere Teilfolge aussondern, welche in Σ konvergent ist, und zwar auf jeder abgeschlossenen Teilmenge gleichmässig. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir diese Teilfolge wieder mit $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$, die Grenzfunktion mit $f_0(z)$, die Wertegebiete dieser Funktionen mit $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$

Weil $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ auf E Schwankungen haben, die grösser als die feste positive Zahl ε bleiben, so ist auch die Schwankung von $f_0(z)$ auf E grösser oder gleich ε, wegen der gleichmässigen Konvergenz auf E. Daraus schliessen wir, dass keine der Funktionen $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \ldots$ konstant ist; mithin sind $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ wirkliche Gebiete, d. h. zusammenhängende Punktmengen, welche nur aus i n n e r e n Punkten bestehen.

Ist nun ζ_0 ein Punkt von Σ_0, also $\zeta_0 = f_0(a)$, wo a ein Punkt in Σ ist, so konvergiert die Punktfolge $\zeta_n = f_n(a)$ gegen ζ_0; wir können also sagen: ist ζ_0 ein Punkt in Σ_0, so gibt es eine Punktfolge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ welche gegen ζ_0 konvergiert, wobei ζ_1 in Σ_1, ζ_2 in Σ_2 u. s. w. liegt. Weil Σ_0 ein Gebiet ist, so liegen fast alle Punkte ζ_n in Σ_0; wir brauchen aber nur die Tatsache, dass es einen Punkt ξ_0 von Σ_0 gibt, welcher gleichzeitig in einem anderen Gebiete Σ etwa in Σ_k, enthalten ist. Nach der soeben gemachten Bemerkung gibt es dann eine gegen ξ_0 konvergierende Punktfolge $\xi_1, \xi_2, \ldots$, wobei ξ_1 in Σ_1, ξ_2 in Σ_2, u. s. w. liegt. Weil ξ_0 in Σ_k liegt, und Σ_k ein Gebiet ist, so müssen fast alle Punkte ξ_n in Σ_k liegen; dies ist aber sicher unmöglich. Denn die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ liegen getrennt, und deswegen enthält die Folge ξ_n einen einzigen Punkt, nämlich den Punkt ξ_k, welcher in Σ_k liegt. Mit diesem Widerspruche ist der Hilfssatz bewiesen.

2. Wir betrachten nun die zu Anfang dieses Abschnittes erklärten Gebiete G_n und $G_n^{(1)}$, und bezeichnen mit T eine auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf $G_n^{(1)}$. Wir werden dann solche Eigenschaften der Abbildung herleiten, welche die Konformität derselben ausschliessen.

Das Bildgebiet $G_n^{(1)}$ ist ein Teilgebiet von G_n, wir können also die Abbildung T iterieren, d. h. die Potenzen T^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ bilden. Wenn wir mit $G_n^{(k)}$ das Bild von G_n durch T^k bezeichnen, so haben $G_n^{(k)}$ und $G_n^{(k+1)}$ dieselbe gegenseitige Lage, wie G_n und $G_n^{(1)}$; denn bei der Abbildung T^k geht G_n in $G_n^{(k)}$, $G_n^{(1)}$ in $G_n^{(k+1)}$ über. Wir können also die Randkurven von $G_n^{(k)}$ derart mit $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}, \ldots C_n^{(k)}$ bezeichnen, dass zwischen $C_i^{(k)}$ und $C_i^{(k+1)}$ keine weitere Kurve C liegt. $(i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots$ ad inf.) Da nun $n > 1$ ist, so hat jedes Gebiet $G_n^{(k)}$ wenigstens eine innere Randkurve; aus der gegenseitigen Lage der Gebiete $G_n^{(k)}$ und $G_n^{(k+1)}$ folgt dann, dass jede Kurve $C^{(k+1)}$ wenigstens eine Kurve $C^{(k)}$ im Innern enthält. Bezeichnen wir also mit ε den kleinsten unter den Durchmessern der Randkurven des Ausgangsgebietes G_n, so folgt aus dieser Bemerkung, dass jede bei der Iteration auftretende Kurve C einen Durchmesser $> \varepsilon$ hat.

Wir betrachten nun das Ringgebiet Σ, welches zwischen C_1 und $C_1^{(1)}$ liegt. Das Bild von Σ durch T^k heisse Σ_k; dann ist Σ_k wieder ein Ringgebiet, welches von einer Kurve $C^{(k)}$ und von einer Kurve $C^{(k+1)}$ begrenzt wird. Wir stellen zunächst fest, dass die Gebiete $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ getrennt liegen. Es ist nämlich Σ_k ein Teilgebiet von $G_n^{(k)}$, also wegen $G_n^{(1)} > G_n^{(2)} > \ldots$ auch Teilgebiet von $G_n^{(1)}$, während Σ keinen Punkt mit $G_n^{(1)}$ gemein hat; die Gebiete Σ und Σ_k liegen also sicher getrennt. Durch T^m geht Σ in Σ_m, Σ_k in Σ_{k+m} über; es liegen also auch Σ_m und Σ_{k+m} getrennt, wobei k urd m irgendwelche positive ganze Zahlen sind.

Nun nehmen wir in Σ eine geschlossene Jordankurve λ an, welche die beiden Randkurven von Σ voneinander trennt, und bezeichnen mit λ_k das Bild von λ durch T^k. Dann ist λ_k eine in Σ_k liegende geschlossene Jordankurve, welche die Randkurven von Σ_k voneinander trennt, mithin die innere Randkurve von Σ_k im Innern enthält. Da diese letztere Kurve einen Diameter $> \varepsilon$ hat, so ist auch der Diameter von λ_k grösser als ε. Zusammenfassend können wir sagen:

Bezeichnet Σ das Ringgebiet zwischen C_1 und $C_1^{(1)}$, und λ eine in Σ verlaufende geschlossene Jordankurve, welche die beiden Randkurven voneinander trennt; sind ferner Σ_k und λ_k die Bilder von Σ und λ durch T^k, so gelten die beiden Tatsachen:

a) Die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ liegen getrennt, und sind im ursprünglichen Gebiete G_n enthalten

b) Die Durchmesser der Kurven $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind grösser als ε, wo ε den kleinsten unter den Durchmessern der Randkurven des ursprünglichen Gebietes G_n bedeutet.

Ein Blick auf unseren Hilfssatz 1 zeigt jetzt, dass die Abbildung T nicht konform sein kann.[6])

3. Auf konzentrische Kreisringe angewendet, ergibt dieser Satz die in der Einleitung erwähnte Tatsache, dass nämlich die konzentrischen Kreisringe $K_1 : r_1 < |z| < R_1$ und $K_2 : r_2 < |z| < R_2$ dann und nur dann konform aequivalent sind, wenn $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist.

Sei etwa $\frac{r_1}{R_1} < \frac{r_2}{R_2}$, also $\frac{r_1}{r_2} < \frac{R_1}{R_2}$. Dann bestimmen wir die reelle

[6]) Es gibt auch keine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel man erkennt dies durch die Betrachtung der geraden Potenzen der Abbildung T.

positive Zahl ϱ derart, dass $\frac{r_1}{r_2} < \varrho < \frac{R_1}{R_2}$ wird. Durch die Ähnlichkeitstransformation $z' = \varrho z$ geht K_2 in den Kreisring $\varrho r_2 < |z| < \varrho R_2$ über, welcher wegen $r_1 < \varrho r_2 < \varrho R_2 < R_1$ die in unserem Satze geforderte Lage gegen K_1 hat, mithin keine konforme Abbildung auf K_1 gestattet. Wenn hingegen $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist, so kann K_2 durch eine Ähnlichkeitstransformation in K_1 überführt werden.

Aus Hilfssatz 1 folgt auch sofort das folgende hübsche Lemma des Herrn Koebe:

Es seien $C_0, C_0', C_1, C_1', C_2, C_2', \ldots$ geschlossene Jordankurven, von welchen jede die folgenden im Innern enthält, und sei Σ_n das Gebiet zwischen C_n und C_n'. Wenn alle Gebiete Σ konform aequivalent sind, so konvergieren die Durchmesser der Kurven C gegen Null.[7])

Nach Voraussetzung gibt es eine in Σ_0 eindeutige reguläre Funktion $f_n(z)$, welche Σ_0 umkehrbar eindeutig und konform auf Σ_n abbildet. Wir nehmen in Σ_0 eine geschlossene Jordankurve λ_0 an, welche C_0 und C_0' trennt, und bezeichnen mit λ_n das Bild von λ durch $f_n(z)$; dann liegt λ_n in Σ_n und enthält C_n' im Innern. Da die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ getrennt liegen, so folgt aus Hilfssatz 1, dass die Durchmesser der Kurven λ_n gegen Null konvergieren. Dasselbe gilt dann auch für die Kurven C, da λ_n die Kurven C_m, C_m' im Innern enthält, wenn $m > n$ ist.

§ 2.

Es sei Σ ein beschränktes schlichtes Gebiet und $f(z)$ eine in Σ eindeutige reguläre Funktion, welche eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Σ auf sich selbst vermittelt. Wir nehmen an, dass die Abbildung einen Fixpunkt hat; dann gilt der folgende

Hilfssatz 2. *Im Fixpunkte ruft die Abbildung keine Verzerrung hervor; hingegen findet dort immer eine Drehung statt, den trivialen Fall ausgenommen, wo sich die Abbildung auf die Identität reduziert.*[8])

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Fixpunkt mit dem Punkte $z = 0$ zusammenfallen ~~lassen; in der~~ Um-

[7]) Koebe, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II, Math. Annalen 69.

[8]) Bieberbach, Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten 1913. Dort wird der Satz als *Eindeutigkeitssatz* bezeichnet.

gebung des Nullpunktes gilt dann eine Entwicklung:

$$f(z)=\gamma z+\dots \qquad \gamma \neq 0.$$

Wir zeigen zunächst, dass im Fixpunkte keine Verzerrung stattfindet, dass also $|\gamma|=1$ ist. Sonst können wir annehmen, dass $|\gamma|>1$ ist; wäre nämlich $|\gamma|<1$, so würden wir einfach die inverse Abbildung betrachten. Setzen wir:

$$f_2(z)=f[f(z)], \dots f_n(z)=f[f_{n-1}(z)], \dots,$$

so sind alle diese Funktionen in Σ eindeutig, regulär und gleichmässig beschränkt: $|f_n(z)|<R$, wo R den Radius eines Kreises bezeichnet, welcher $z=0$ zum Mittelpunkte hat und das Gebiet Σ im Innern enthält. Es sei nun $|z|<\varrho$ eine Kreisfläche, welche ganz in Σ liegt; dann gilt die bekannte Ungleichung $|f'_n(0)|<\frac{R}{\varrho}$. Offenbar ist nun $f'_n(0)=\gamma^n$, so dass die Ungleichung

$$|\gamma|^n<\frac{R}{\varrho}$$

besteht. Wegen $|\gamma|>1$ wird die linke Seite zugleich mit n unendlich, während die rechte Seite von n nicht abhängt; mit diesem Widerspruche ist die Behauptung $|\gamma|=1$ erwiesen.

Wir zeigen weiter: wenn im Fixpunkte keine Drehung stattfindet, so reduziert sich die Abbildung auf die Identität. Mit anderen Worten: aus $\gamma=1$ folgt $f(z)\equiv z$. Sonst wäre

$$f(z)=z+a_k z^k+\dots, \quad a_k \neq 0.$$

Dann folgt:

$$f_2(z)=z+2a_k z^k+\dots,$$
$$f_3(z)=z+3a_k z^k+\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ist wieder $|z|<\varrho$ eine ganz in Σ enthaltene Kreisfläche, so folgt nach der bekannten Koeffizientenabschätzung:

$$n|a_k|<\frac{R}{\varrho^k}, \text{ also } |a_k|<\frac{1}{n}\frac{R}{\varrho^k}.$$

Daraus folgt $a_k=0$, entgegen der Annahme.

Hilfssatz 3. *Sei Σ ein beschränktes schlichtes Gebiet, und T eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung von Σ auf sich selbst, welche einen Fixpunkt P hat. Dann gibt es geschlossene Jordankurven von beliebig kleinem Durchmesser, welche den Fixpunkt P im Innern enthalten und durch T in sich transformiert werden.*

Es genügt zu zeigen, dass es ein einfach zusammenhängendes, den Fixpunkt P enthaltendes Teilgebiet G von Σ gibt, welches für die Abbildung T invariant ist; bildet man nämlich dieses Teilgebiet G auf das Innere des Einheitskreises konform ab, derart dass P in den Mittelpunkt übergeht, so wird die durch T bewirkte Abbildung desselben in eine Drehung transformiert, bei welcher die konzentrischen Kreise einzeln in sich überführt werden.

Ein solches invariantes Gebiet G können wir nun wie folgt erhalten. Wir betrachten eine Kreisfläche $\varkappa$ vom Radius ϱ, welche P zum Mittelpunkte hat und ganz in Σ liegt, und wenden auf $\varkappa$ alle Abbildungen T^k an ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Da nach Hilfssatz 2 diese Abbildungen im Fixpunkte P keine Verzerrung hervorrufen, so gibt es nach dem Verzerrungssatze eine konzentrische Kreisfläche von nicht verschwindendem Radius, welche in allen Bildgebieten enthalten ist. Es gibt also wirkliche Gebiete, welche den Punkt P enthalten und in allen Bildgebieten von $\varkappa$ enthalten sind. Durch Vereinigung aller solcher Gebiete erhalten wir ein Gebiet G, das grösste Gebiet mit dieser Eigenschaft. Dann ist G offenbar invariant für die Abbildung T; es hängt aber auch einfach zusammen. Sei nämlich C eine in G liegende geschlossene Jordankurve; nach der Erklärung von G liegt dann C in allen Bildgebieten von $\varkappa$. Weil aber diese Bildgebiete einfach zusammenhängen, so ist auch das Innere von C in allen Bildgebieten enthalten, folglich auch in G, weil sonst G durch Hinzufügung des Inneren von C vergrössert werden könnte, ohne seine karakteristische Eigenschaft zu verlieren. Damit ist gezeigt: ist eine geschlossene Jordankurve in G enthalten, so ist auch das Innere derselben in G enthalten. Dadurch ist G als einfach zusammenhängendes Gebiet gekennzeichnet.

Hilfssatz 4. *Sei ein Gebiet G_n mit $n > 1$ vorgelegt, und T sei eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung von G_n auf sich selbst. Dann hat T keinen Fixpunkt am Rande des Gebietes, vom trivialen Falle abgesehen, wo sich T auf die Identität reduziert.*

Wenn T einen Fixpunkt P am Rande hat, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass dieser Fixpunkt auf einer inneren Randkurve liegt, welche mit dem Einheitskreise zusammenfällt. Durch Spiegelung am Einheitskreise erhalten wir ein Gebiet G'_n; dasselbe bildet zusammen mit G_n ein Gebiet G_{2n-1}, und die Abbildung T kann durch Spiegelung am Einheitskreise zu einer umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung von G_{2n-1} auf sich selbst erweitert werden. Im Fixpunkte P findet nun keine Drehung statt, weil der Einheitskreis mit Erhaltung des Umlaufssinnes in sich transformiert wird; nach Hilfssatz 1 ist also T die identische Abbildung.

§ 3.

In diesem Abschnitte stellen wir einige vielfach verwendete Tatsachen über Arcusvariation zusammen, die wir in der Folge benötigen.

Wir betrachten in der z-Ebene zwei geschlossene Jordankurven, C_1 und C_2, und eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung dieser Kurven aufeinander. Ist P_2 ein Punkt auf C_2, P_1 der entsprechende Punkt auf C_1, so setzen wir voraus, dass P_2 und P_1 nie zusammenfallen. Unter $\operatorname{arc} \overrightarrow{P_1 P_2}$ verstehen wir den bis auf Vielfache von 2π bestimmten Winkel, welchen der *„Transformationsvektor“* $\overrightarrow{P_1 P_2}$ mit der reellen positiven Achse einschliesst.

Wir lassen nun den Punkt P_2 in einem gewissen Sinne einen Umlauf auf C_2 ausführen; dann führt der Bildpunkt P_1 einen Umlauf auf C_1 aus. Ist Θ eine stetige Bestimmung von $\operatorname{arc} \overrightarrow{P_1 P_2}$, so ändert sich Θ bei diesem Umlauf um eine Grösse von der Form $2k\pi$, wo k eine ganze Zahl ist. Die Arcusvariationen der Vektoren $\overrightarrow{P_1 P_2}$ und $\overrightarrow{P_2 P_1}$ stimmen dabei überein; ist nämlich Θ eine stetige Bestimmung von $\operatorname{arc} \overrightarrow{P_1 P_2}$, so ist $\Theta' = \Theta + \pi$ eine stetige Bestimmung von $\operatorname{arc} \overrightarrow{P_2 P_1}$, so dass sich Θ und Θ' um dieselbe Grösse ändern. Durch Umkehrung des Umlaufssinnes ändert hingegen die Arcusvariation das Vorzeichen.

In gewissen Fällen kann man die Arcusvariation durch die folgende Kontinuitätsbetrachtung bestimmen. Wir nehmen innerhalb C_1 einen nicht auf C_2 gelegenen Punkt A an und bilden das Innere von C_1 auf das Innere des Einheitskreises konform ab, so dass A in den Mittelpunkt übergeht; diese Abbildung ist bekanntlich auch am Rande stetig und ein-eindeutig. Mit $C_1(\varrho)$ bezeichnen wir die Kurve, welche bei dieser Abbildung in den konzentrischen Kreis vom Radius ϱ übergeht; es ist hiernach $C_1(1)$ mit C_1 identisch, und unter $C_1(0)$ wollen wir den Punkt A verstehen. Als Radien bezeichnen wir die Bögen, welche bei der Abbildung in Radien des Einheitskreises transformiert werden. Nunmehr erklären wir eine Abbildung von C_2 auf $C_1(\varrho)$, indem wir dem Punkte P_2 denjenigen Punkt $P_1(\varrho)$ auf $C_1(\varrho)$ zuordnen, welcher mit P_1 auf einem Radius liegt. Wenn dann P_2 für keinen Wert von ϱ mit seinem Bildpunkte zusammenfällt, so wollen wir sagen, dass die Kurve C_1 auf den Punkt A zusammengezogen werden kann. Ist dies der Fall, so gilt die beinahe evidente Bemerkung, dass die Arcusvariation des Transformationsvektors $\overrightarrow{P_1 P_2}$ gleich der Arcusvariation des Vektors $\overrightarrow{A P_2}$ ist (also gleich Null, wenn A ausserhalb, und gleich $\pm 2\pi$, wenn A innerhalb C_2 liegt). Bezeichnet man nämlich die Arcusvariation des Vektors $\overrightarrow{P_1(\varrho) P_2}$ mit $\Delta(\varrho)$, so ist diese für $0 \leqq \varrho \leqq 1$ eindeutig erklärte Funktion offenbar stetig. Da sie aber nur Werte von der Form $2k\pi$ annehmen kann, wo k eine ganze Zahl ist, so reduziert sich dieselbe auf eine Konstante; es ist also $\Delta(1) = \Delta(0)$.

Für unsere Zwecke kommen die folgenden Fälle in Betracht:

a) Die Kurven C_1 und C_2 schliessen einander aus. Dann kann C_1 auf einen Punkt ausserhalb C_2 zusammengezogen werden, mithin ist die Arcusvariation Δ gleich Null.

b) Die eine der beiden Kurven enthält die andere im Innern. Dann kann man die innere Kurve auf einen Punkt zusammenziehen; es ist also $\varDelta = 2\pi$ oder $\varDelta = -2\pi$, je nachdem die äussere Kurve im mathematisch positiven oder negativen Sinne umlaufen wird.

c) Die beiden Kurven liegen vereinigt. Dann zieht man etwa C_1 auf einen inneren Punkt zusammen und erhält $\varDelta = \pm 2\pi$, wie im Falle *b)*.

Wir brauchen schliesslich einen Satz über die Arcusvariation einer stetigen Funktion. Es sei ein Gebiet G_n vorgelegt und eine in G_n einschliesslich Randes eindeutige stetige Funktion $f(z)$, welche dort nirgends verschwindet. Dann kann man $\operatorname{arc} f(z)$ auf jeder Randkurve C_l stetig fortsetzen; die Änderung von $\operatorname{arc} f(z)$ bei einem in Bezug auf das Gebiet positiven Umlaufe auf C_l werde mit $\varDelta_l$ bezeichnet. Dann gilt der auf Cauchy zurückgehende Satz, dass $\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots + \varDelta_n = 0$ ist. Da nämlich $f(z)$ im abgeschlossenen Bereiche G_n stetig und von Null verschieden ist, so hat dort $|f(z)|$ ein positives Minimum m. Ist die Schwankung von $f(z)$ in G_n kleiner als $\frac{m}{2}$, so erkennt man, dass jede stetige Bestimmung von arc $f(z)$ im ganzen Gebiete G_n eindeutig ist, so dass die Grössen Δ_i einzeln verschwinden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man, da $f(z)$ gleichmässig stetig ist, das Gebiet in endlich viele (krummlinige) Dreiecke zerlegen, so dass für jedes Dreieck die Schwankung kleiner als $\frac{m}{2}$ wird. Addiert man nun die Arcusvariationen, welche durch positiven Umlauf der einzelnen Dreiecke erhalten werden, so ist die Summe einerseits gleich $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$, da sich die von den inneren Dreiecksseiten herrührenden Beiträge gegenseitig aufheben, andererseits gleich Null, weil die Summanden einzeln verschwinden.

§ 4.

Wir betrachten ein Gebiet G_n und eine die Indikatrix erhaltende, auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf sich selbst.[9]) Für $n = 1$ hat die Abbildung sicher einen Fixpunkt, wie Herr Brouwer gezeigt hatte. Für $n > 1$ hat Herr v. Kerékjártó folgende Fixpunktssätze angegeben: wenn bei der Abbildung keine Randkurve in sich transformiert wird, so gibt es wenigstens zwei Fixpunkte; wird eine einzige Randkurve in sich transformiert, so gibt es wenigstens einen Fixpunkt; desgleichen, wenn $n > 2$ ist, und alle Randkurven in sich transformiert werden. Versucht man nun, weitere spezielle Sätze zu bilden, so findet man sofort eine allgemeine Aussage, welche alle Fälle umfasst, wo sich die Existenz eines Fixpunktes behaupten lässt.

F i x p u n k t s s a t z. *Es sei ein Gebiet G_n vorgelegt. Sei T eine die Indikatrix erhaltende, auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf sich selbst, und ν die Anzahl der Randkurven, welche durch T in sich transformiert werden. Ist $\nu \neq 2$, so hat T wenigstens einen Fixpunkt; ist $\nu = 2$, so braucht es keinen Fixpunkt zu geben.*

Wir zeigen: wenn T keinen Fixpunkt hat, so ist $\nu = 2$.[10]) Mit $\varphi(z)$ bezeichnen wir die stetige Funktion, welche die Abbildung vermittelt, und bilden die Funktion $f(z) = \varphi(z) - z$. Wenn die Abbildung keinen Fixpunkt hat, so ist $f(z) \neq 0$ im ganzen

[9]) Für die in diesem Abschnitte behandelten Fragen vgl. l. c. [5]), Abschnitt VI, § 2.

[10]) Im Spezialfalle $\nu = n$ wird unser Beweis mit demjenigen des Herrn von Kerékjártó identisch; vgl. l. c. [5]), Seite 200, Satz VII.

Gebiete. Dann aber muss (§ 3) die Summe $S = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ verschwinden, wo Δ_i die Änderung von arc $f(z)$ bei einem in Bezug auf G_n positiven Umlauf der Randkurve C_i bedeutet.

Ist zunächst $\nu = 0$, so ist für die äussere Randkurve $\Delta = 2\pi$ (§ 3, Fall *b*), ebenso für diejenige innere Randkurve, welche in die äussere Randkurve transformiert wird; für jede weitere innere Randkurve ist $\Delta = 0$ (§ 3, Fall *a*). Es ist also in diesem Falle $S = 4\pi$.

Ist $\nu > 0$, so können wir annehmen, dass die äussere Randkurve in sich transformiert wird. Ist p die Anzahl der inneren Randkurven, welche in sich transformiert werden, so ergibt sich $S = (1-p)2\pi$. In der Tat, für die äussere Randkurve ist $\Delta = 2\pi$, für jede innere Randkurve, welche in sich transformiert wird, $\Delta = -2\pi$ (§ 3, Fall *c*), für jede weitere innere Randkurve ist $\Delta = 0$ (Fall *a*). Aus $S = 0$ folgt, dass $p = 1$, also $\nu = 2$ ist, womit der Fixpunktssatz bewiesen ist.

§ 5.

Es sei nunmehr ein Gebiet G_n mit $n > 2$ vorgelegt und $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe von Abbildungen dieses Gebietes auf sich selbst, wobei die einzelnen Abbildungen der Gruppe auch am Rande ein-eindeutig und stetig sein und die Indikatrix erhalten sollen. Wir setzen ferner voraus, dass die folgenden beiden Fixpunktsbedingungen erfüllt sind:

I. Ist T eine nicht-identische Abbildung der Gruppe, so hat T höchstens endlich viele Fixpunkte, von welchen kein einziger am Rande des Gebietes liegt.

II. Ist T eine Abbildung der Gruppe und P ein Fixpunkt von T, so gibt es geschlossene Jordankurven von beliebig kleinem Durchmesser, welche den Fixpunkt im Innern enthalten und durch T in sich transformiert werden.

Nach den Hilfssätzen von § 2 bilden insbesondere die konformen Abbildungen des Gebietes auf sich selbst eine Gruppe mit diesen Eigenschaften.

Zunächst können wir den Fixpunktssatz von § 4 für die Abbildungen der Gruppe wesentlich verschärfen. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Ist T eine nicht-identische Abbildung der Gruppe, ν die Anzahl der Randkurven, welche durch T in sich transformiert werden,

μ die Anzahl der Fixpunkte von T, so ist

$$\nu + \mu = 2.$$

Um dies einzusehen, umgebe man jeden Fixpunkt von T mit einer kleinen invarianten Kurve. Durch Entfernung der Innengebiete dieser Kurven entsteht ein Gebiet $G_{n+\mu}$, welches durch T ebenfalls auf sich selbst abgebildet wird, wobei $\nu + \mu$ Randkurven in sich transformiert werden. Da aber nunmehr kein Fixpunkt auftritt, so folgt aus dem Fixpunktssatze, dass $\nu + \mu = 2$ sein muss.

Aus dieser Relation kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen. Zunächst folgt offenbar:

Wenn T mehr als zwei Fixpunkte hat, oder mehr als zwei Randkurven in sich transformiert, so ist T die identische Abbildung.

Da ferner jede Randkurve, welche durch T in sich transformiert wird, desgleichen jeder Fixpunkt von T auch durch T^k in sich übergeht, so wird für T^k die Relation $\nu + \mu = 2$ sicher nicht mehr bestehen, wenn das Auftreten einer neuen invarianten Randkurve oder eines neuen Fixpunktes festgestellt werden kann. Daraus folgt beispielsweise für $k = 2$:

Wenn T irgend zwei Randkurven oder irgend zwei Punkte vertauscht, so ist T involutorisch.

Es ergibt sich auch sofort die Endlichkeit der Gruppe. Jede Abbildung der Gruppe ruft eine bestimmte Permutation der Randkurven hervor; wenn aber zwei Abbildungen der Gruppe, T_1 und T_2, dieselbe Permutation hervorrufen, so sind sie identisch, da alsdann die Abbildung $T = T_1 T_2^{-1}$ mehr als zwei, nämlich alle n, Randkurven in sich transformiert. Es gibt also höchstens so viele Gruppenelemente, als es verschiedene Anordnungen von n Dingen gibt.

Die vorstehenden Entwicklungen liefern nicht nur die Endlichkeit der Gruppe, sondern überhaupt einen Einblick in die Struktur derselben. Für den Beweis des Endlichkeitssatzes reicht bereits ein Teil unserer Hilfsbetrachtungen, wie der Leser leicht erkennen wird. Wir wollen hier nur kurz angeben, wie man den Endlichkeitssatz für konforme Abbildungen beweisen kann, wenn man unsere Methode in die Sprache der Funktionentheorie übersetzt.

Es handelt sich also um die folgende Tatsache: Ist G_n ein Gebiet mit $n > 2$, und T eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung dieses Gebietes auf sich selbst, welche jede Randkurve in sich transformiert, so ist T die identische Abbildung. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die Randkurven analytisch sind. Ist dann $f(z)$ die reguläre Funktion, welche die Abbildung vermittelt, so ist dieselbe auch am Rande analytisch. Dasselbe gilt dann von der Funktion $\varphi(z)=f(z)-z$, welche nach Hilfssatz 4 in § 2 am Rande von Null verschieden ist, wenn $f(z)\not\equiv z$ ist, was wir jetzt annehmen wollen. Bedeutet dann Δ_l die Variation von arc $\varphi(z)$ bei einem in Bezug auf das Gebiet positiven Umlauf der Randkurve C_l, so ist nach dem Residuensatze

$$\frac{1}{2\pi}(\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n)=\mu,$$

wo μ die Anzahl der innerhalb G_n gelegenen Nullstellen von $\varphi(z)$ bedeutet. Nun ist aber (§ 3, Fall c) für die äussere Randkurve $\Delta=2\pi$, für jede innere Randkurve $\Delta=-2\pi$; es folgt also

$$\mu=2-n.$$

Da aber die Zahl μ ihrer Bedeutung nach $\geqq 0$ ist, während wegen $n>2$ die Differenz $2-n$ sicher negativ ist, enthält diese Gleichung einen Widerspruch und damit ist der Endlichkeitssatz bewiesen.

Szeged, den 22. I. 1924.

Bibliographie.

B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I. (Grundlehren der math. Wissenschaften VIII.) VIII + 270 S., Berlin, J. Springer, 1923.

Dieses Buch entstand aus den Vorlesungen, die der Verfasser, Privatdozent an unserer Universität, auf Einladung der Universität Göttingen im Sommersemester 1922 gehalten hat.

Der vorliegende erste Band enthält die Topologie der Ebene und der Flächen und gliedert sich in 7 Abschnitte: 1. Punktmengen; 2. Kurven; 3. Gebiete; 4. Polyederflächen; 5. Offene Flächen; 6. Abbildungen von Flächen; 7. Kurvenscharen auf Flächen. Es ist darin in lebhafter Darstellung ein reiches Material zu einem wertvollen Lehrbuche verarbeitet, welches besonders jenen, die die Topologie hauptsächlich wegen ihrer Anwendungen auf Funktionentheorie, Differentialgleichungen oder Variationsrechnung interessiert, sehr gute Dienste leisten wird. Die Topologie der mehrdimensionalen und der abstrakten Räume, sowie die kombinatorische Topologie, und damit also die eigentliche systematische Darstellung der Methoden, sollen in einem zweiten Bande folgen. Den reichen Inhalt dieses zweiten Bandes lässt schon jenes weit ausholende Referat über die Probleme der Topologie ahnen, welches dem vorliegenden Bande als Einleitung an die Spitze gestellt ist.

Zum Schlusse sei es mir gestattet den Wunsch auszusprechen, dass im zweiten Bande derartige klassische Sätze, wie z. B. der JORDANsche Kurvensatz, ausführlicher mit Litteraturnachweisen belegt und wenigstens die leitenden Gedanken der verschiedenartigen Beweise kurz angedeutet werden.

F. R.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, zweite erweiterte Auflage (Grundlehren der math. Wissenschaften IX.) IX + 251 S., Berlin, J. Springer, 1923.

Die erste Hälfte des Buches gibt eine sehr breite und sehr klare Darstellung der wichtigsten Tatsachen der klassischen Mengenlehre, die in hohem Masse geeignet ist Anfänger, Nicht-Mathematiker und Philosophen in das Gebiet einzuführen. Ausser den grundlegenden Begriffsbildungen und Resultaten CANTOR's werden nur noch der Aequivalenzsatz (für den nicht der einfachste Beweis angeführt wird) und der ZERMELO'sche Wohlordnungssatz behandelt.

Die zweite Hälfte des Buches beschäftigt sich mit den Erschütterungen, die durch die Antinomien von BURALI-FORTI, RUSSELL und RICHARD in der

Mengenlehre und hiermit in der ganzen Mathematik hervorgerufen wurden und mit den Rettungsarbeiten, die seit etwa 15 Jahren im Zuge sind.

Am ausführlichsten wird die ZERMELOsche Axiomatik behandelt, zu der der Verf. wertvolle Beiträge geliefert hat. (Ist aber in der neuen Form des Axiomes V., S. 198, kein Zirkel enthalten?). Ausser dieser formalistischen Methode werden noch besonders zwei in ausführlichen Darstellungen vorliegende, tiefer in philosophische Probleme eingreifende Grundlegungen behandelt, nämlich die von RUSSELL und die von JULIUS KÖNIG. Durch die sehr glückliche Auswahl einiger charakteristischer Momente wird der Verf. sicherlich auch hier sein Ziel erreicht haben, nämlich zum Studium der Originalarbeiten anzuregen und ihre Lektüre zu erleichtern. Dasselbe gilt über die Behandlung der neuesten Untersuchungen HILBERT's betreffend das Problem der Widerspruchslosigkeit; auch wird auf die „weitgehende Übereinstimmung" der HILBERT'schen Arbeiten mit dem System von KÖNIG hingewiesen.

Der „radikal-revolutionistische" Intuitionismus von BROUWER und WEYL der bis auf KRONECKER zurückgeführt wird, wird vom Verf. grösstenteils abgelehnt, was wohl fast allgemeine Zustimmung erwecken dürfte. Hieran anschliessend wird der POINCARÉ-RUSSELLsche Verbot der nicht prädikativen Definitionen erörtert. Man muss aber keineswegs Intuitionist im BROUWERschen Sinne sein — wie der Verf. zu behaupten scheint — um diesen Einwand, bis kein Widerspruchslosigkeitsbeweis vorliegt, als berechtigt anzuerkennen.

Die hier erwähnten Grundlegungen sind voneinander ziemlich unabhängig enstanden, ihre Autoren haben sich wenig umeinander gekümmert und manche von ihnen bilden eine sehr mühsame Lektüre. Um so dankbarer muss man dem Verf. sein, dass er „ohne eine gewisse Breite der Darstellung zu scheuen" mit ausserordentlicher Klarheit — die an den Styl der populärphilosophischen Schriften RUSSELL's erinnert — und mit strenger Objektivität diese verschiedenen Auffassungen zusammengestellt hat. Er geht in seiner Objektivität so weit, auch solche Einwände (namentlich die Angriffe des Philosophen ZIEHEN) zu berücksichtigen, die einfach auf Missverständnissen beruhen. Zum Schutze gegen solche Missverständnisse kann das schöne Buch FRAENKEL's auch Philosophen wärmstens empfohlen werden.

Dénes König.

P. Bachmann, Zahlentheorie. Viertel Teil: **Die Arithmetik der quadratischen Formen.** Zweite Abteilung, herausgegeben von R. Haussner. XXII + 537 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.

Das Lebenswerk PAUL BACHMANNS: eine Gesamtdarstellung der Zahlentheorie in ihren Hauptteilen zu verfassen, erhält durch das vorliegende Buch einen würdigen Abschluss. Es ist demjenigen Teil der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen gewidmet, der — gestützt auf die Untersuchungen CH. HERMITE's — in den letzten Jahrzehnten durch die bahnbrechenden Arbeiten des so früh verstorbenen H. MINKOWSKI's eine wunderbare Durchsichtigkeit und Vollkommenheit erhalten hat. Die Methoden MINKOWSKI's die auf einer geometrischen Interpretation beruhen, wurden in seiner *„Geometrie der Zahlen"* in einer nicht leicht verständlichen Weise veröffentlicht; die *„Diophantische Approximationen"* MINKOWSKI's waren berufen, seine Ideen einem grösseren Leserkreis näher zu bringen. BACHMANN's Werk ist eine vollkommen gelungene Verschmelzung der MINKOWSKIschen Methoden mit den arithmetisch-algebraischen Methoden, die mit der Kettenbruchstheorie LAGRANGE's beginnen und in den Arbeiten HERMITE's gipfeln. Der Punktgitter — den ja schon GAUSS zur Untersuchung der quadratischen Formen heranzog — wird gleich am Anfang des Buches eingeführt und darauf die Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche gegründet und die damit zusammenhängenden Approximationssätze entwickelt. Sodann wird mit Hülfe der GAUSS'schen Zuordnung eines Punktgitters zu einer Klasse von aequivalenten quadratischen Formen die Reduktionstheorie der binären und ternären quadratischen Formen begründet, wobei MINKOWSKI's Methoden und insbesondere seine Anwendungen des konvexen Körpers und die dichteste Lagerung von Kugeln herangezogen werden. In ähnlicher Weise wird dann die Reduktionstheorie der positiven Formen mit n Unbestimmten behandelt und auf sie die Aequivalenztheorie gestützt. Die Theorie der zerlegbaren Formen mit einem Hinweis auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper bildet den Übergang zu den Kriterien für die Irrationalitäten 2-ten und 3 ten Grades. Daran schliesst sich die Theorie des JACOBI'schen Kettenbruchsalgorithmus, die durch PERRON's Untersuchungen wesentlich gefördert wurde. MINKOWSKI's Kriterien zur arithmetischen Charakterisierung der Irrationalitäten n-ten Grades und die unbestimmten quadratischen Formen mit mehreren Variablen schliessen das Buch ab.

Das vorliegende Werk BACHMANN's gibt nicht nur eine schöne Übersicht des mannigfaltigen bearbeiteten Gegenstandes, sondern ist auch in vorzüglicher Weise geeignet, zur Einführung in die geometrischen Ideen zu dienen, die MINKOWSKI's Gedankenwelt bildeten und die in den verschiedensten Disciplinen der Mathematik zur Anwendung gelangten. Deshalb wird dieses Buch auch ausserhalb derjenigen Fachgenossen, die sich speziell mit der Zahlentheorie beschäftigen, lebhaften Anklang finden und es gebührt der Dank aller Mathematiker dem Herausgeber Herrn R. HAUSSNER, der das Erscheinen dieses letzten Bandes der BACHMANN'schen Zahlentheorie ermöglichte, womit der letzte Wunsch dieses um die Zahlentheorie hochverdienten Gelehrten — dessen Ableben von allen Mathematikern beklagt wird — in Erfüllung ging.

A. H.

L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Band: Geometrie im Bündel und im Raum. XII + 421 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.

Seit dem Erscheinen des ersten Bandes dieses Lehrbuches sind 17 Jahre verflossen; im Vorworte zum vorliegenden zweiten Bande bemerkt aber der Verfasser mit vollem Rechte, dass das Werk noch immer einzig in seiner Art ist: es ist nämlich das einzige moderne Lehrbuch der analytischen

Geometrie. Der moderne Zug des Buches liegt in dem Plane, nach welchem der klassische Gegenstand der analytischen Geometrie: die Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades, dargestellt wird. „Dieser Plan besteht in folgendem: In jedem Grundgebilde wird zuerst die projektive Geometrie so vollständig entwickelt, dass nachher nur durch ihre Spezialisierung die Parallelgeometrie und durch deren Hinzufügung die affine Geometrie, dann durch weitere Spezialisierung die Orthogonalgeometrie und durch ihre Hinzunahme die äquiforme Geometrie entsteht." Dieser Weg „stellt sich also als der durch CAYLEYS Ausspruch vom Jahre 1859 (dass alle sogenannten metrischen Eigenschaften geometrischer Figuren als projektive Beziehungen zwischen diesen und dem „absoluten Gebilde" angesehen werden können) vorgezeichnete heraus, als der Weg, den F. KLEIN in seinem Erlanger Programm vom Jahre 1872 und später wiederholt skizziert hat." Von diesem in seiner Einfachheit grossartigen Prinzip geleitet, hat der Verfasser ein Werk geschaffen, welches die ästhetische Wirkung eines monumentalen, im Einzelnen mit leichter Künstlerhand ausgebildeten Bauwerkes ausübt. Bei dem systematischen Aufbau der analytischen Geometrie beschränkt sich der Verfasser auf die Euklidische Geometrie, dass aber „durch eine derartige Darstellung der Euklidischen Geometrie die Wege für die Entwicklung einer absoluten Geometrie vorbereitet sind, braucht kaum gesagt zu werden." Der Leser, der dies weiter verfolgen will, möge *gleichzeitig* mit dem HEFFTERschen Werke das schöne Buch von VAHLEN über Abstrakte Geometrie lesen, in welchem die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrien nach denselben Prinzipien untersucht werden, welche den Karakter des vorliegenden Lehrbuches bestimmt haben.

Tibor Radó.

L. Bieberbach, Funktionentheorie (Teubners technische Leitfäden Bd. 14). 118 S., Berlin, B. G. Teubner, 1922.

Das kleine Buch, welches zur ersten Einführung in die Funktionentheorie dienen soll, enthält zunächst alles, was der Anfänger an allgemeiner Funktionentheorie wissen muss, dann eine sehr gründliche Betrachtung der elementaren Funktionen, und Vieles aus der Theorie der konformen Abbildung. Das Werkchen, welches vom paedagogischen Sinne und von der frischen, anschaulichen Darstellungskunst seines Verfassers ein neues Zeugnis ablegt, werde hiermit der studierenden Jugend herzlichst empfohlen.

Tibor Radó.

Über einen v. Staudt-schen Satz.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

1. Von v. STAUDT rührt der folgende Satz her:

Zwei Kurven haben eine paare bzw. eine unpaare Anzahl von Punkten gemeinsam, je nachdem wenigstens die eine bzw. keine von ihnen von paarer Ordnung ist.

Unter einer *Kurve* verstehen wir hier und im folgenden eine reelle, stetige und geschlossene Kurve, die in jedem Punkte eine bestimmte, mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat und aus endlichvielen konvexen Bögen besteht.

Haben die beiden Kurven speziellere Eigenschaften, so kann man über die Anzahl ihrer Schnittpunkte mehr aussagen. Es gilt der folgende Satz:

I. *Haben die einzügigen Kurven K_m und K_n, die ausser einfachen Doppelpunkten und Wendetangenten keine andere Punkt oder Geradensingularität haben, keine gemeinsamen Tangenten und gibt es in der Ebene einen Punkt, von dem an die eine Kurve keine Tangenten gehen, so ist die genaue Anzahl der gemeinsamen Punkte der beiden Kurven gleich $m.n$, wenn die Kurve K_m von einer Tangente von K_n in m, die Kurve K_n von einer Tangente von K_m in n getrennten Punkten geschnitten wird.*

Dieser Satz folgt aus seinem Dualen, den wir direkt beweisen werden:

II. *Haben die einzügigen Kurven C_m und C_n keinen gemeinsamen Punkt, keinen Doppelpunkt und keine Wende- und stationäre Tangente und liegt die Kurve C_m ganz im Endlichen, so ist die genaue Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n gleich $m.n$, wenn aus einem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n n bzw. m getrennte Tangenten an die andere Kurve gehen.*

Die Kurven C_m und C_n können auch keine Schnabelspitze haben. Eine Schnabelspitze — als Koinzidenz eines Wendepunktes und einer Spitze erster Art — ist auch zu den Wendepunkten zu rechnen.

2. Die Kurven C_m und C_n sind von gerader Ordnung, weil sie keine Wendetangenten haben. Die projektive Ebene wird also von der (doppelpunktlosen) Kurve C_m (oder C_n) in zwei Gebiete geteilt. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte desselben Gebietes, so geht aus ihnen die gleiche Anzahl von Tangenten an die Kurve C_m (oder C_n), weil man vom Punkte P_1 zum Punkte P_2 gelangen kann, ohne die Kurve zu überschreiten und weil die Kurve keine Wendetangente hat. Überschreitet man die Kurve in einem Punkte, so gelangt man in das andere Gebiet und die Anzahl der Tangenten ändert sich um zwei. Die Kurve C_m (bzw. C_n) ist also vom Maximal-Klassenindex[1]) und entweder ihre Klasse oder ihr Klassenindex ist gleich m (bzw. n).

Die Kurven C_m und C_n haben keinen gemeinsamen Punkt. Daraus folgt, dass aus jedem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n dieselbe Anzahl von Tangenten (d. h. n bzw. m) an die andere Kurve geht.

Die Kurve C_m liegt im Endlichen. Wir können also annehmen, dass die Kurve C_n ganz ausserhalb des von C_m begrenzten endlichen Gebietes T liegt.

3. Deformiert man die Kurve C_m stetig so, dass man sie in Bezug auf einen im Innern des Gebietes T liegenden Ähnlichkeitsmittelpunkt verkleinert, so verändert sich die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n während dieser Deformation der Kurve C_m nicht. Dies folgt aus den Untersuchungen über die Gestalten ebener Kurven von Herrn A. Kneser.[2])

Herr A. Kneser beweist zwar nur, dass bei irgendeiner stetigen Deformation einer Kurve eine Doppeltangente einfach erhalten bleibt, solange ihre Berührungspunkte getrennt und nicht singulär sind, aber auf Grund seines Beweises kann man leicht einsehen, dass eine Doppeltangente mit getrennten Berührungspunkten auch

[1]) Vgl. die Abhandlung der Verfassers: „Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex." Math. Ann. Bd. 89, (1923), S. 32—75.

[2]) „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven", Math. Ann. Bd. 41. (1893), §§ 17—19, S. 369—376.

dann einfach erhalten bleibt, wenn eine oder beide ihrer Berührungspunkte Spitzen erster Art sind. Aus der Umkehrbarkeit der Ähnlichkeitstransformation der Kurve C_m folgt also, dass die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n während der genannten Deformation der Kurve C_m unverändert bleibt.

Wir können also annehmen, dass es ein Oval gibt, welches die Kurven C_m und C_n voneinander trennt. Ist dies nicht der Fall, so ersetzt man die Kurve C_m durch eine entsprechend verkleinerte Kurve C'_m, für welche ein Oval mit der genannten Eigenschaft existiert.

Aus den Punkten des Ovales geht dieselbe Anzahl von Tangenten an die Kurve C_m bzw. C_n, wie aus einem Punkte der Kurve C_n bzw. C_m, weil man aus einem Punkte der Kurve C_m bzw. C_n ausgehend zu einem Punkte des Ovales gelangen kann, ohne die Kurve C_n bzw. C_m zu übertreten.

4. Wir ziehen aus einem Punkte M des Ovales eine der m Tangenten an die Kurve C_m. Von dieser Tangente der Kurve C_m wird das Oval noch im Punkte P geschnitten. Schneidet eine der n Tangenten, die aus P ausgehen, das Oval noch im Punkte N, so bestimmt diese Konstruktion zwischen den Punkten M und N des Ovales eine $[mn, mn]$ Korrespondenz. In dieser Korrespondenz entsprechen jedem Punkte des Ovales, als Punkt M oder N aufgefasst, genau mn Punkte N bzw. M.

Ein Punkt M fällt dann und nur dann mit einem seiner entsprechenden Punkte N zusammen, wenn die gerade $PM \equiv PN$ eine gemeinsame Tangente der Kurven C_m und C_n ist. Jede gemeinsame Tangente der Kurven C_m und C_n schneidet aus dem Ovale zwei Punkte aus, weil die Kurve C_m innerhalb des Ovales liegt. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Kurven C_m und C_n ist also die Hälfte der Koinzidenzen in der Korrespondenz $[mn, mn]$.

Bewegt sich der Punkt M auf dem Ovale in einer Richtung, so bewegt sich — wie wir beweisen wollen — jeder den entsprechenden Punkte N in entgegengesetzter Richtung.

Sind P_1 und P_2 bzw. N_1 und N_2 nach der vorigen Konstruktion entsprechende benachbarte P und N Punkte der benachbarten Punkte M_1 und M_2, so schneiden die Geraden $P_1 M_1$ und $P_2 M^2$ inander innerhalb des Ovales (in der Nähe der Berührungspunktee der Kurve C_m mit den Tangenten $P_1 M_1$ und $P_2 M_2$), die Geraden

$P_1 N_1$ und $P_2 N_2$ aber ausserhalb des Ovales (in der Nähe der Berührungspunkte der Kurve C_n mit den Tangenten $P_1 N_1$ und $P_2 N_2$). Bewegt sich also der Punkt P auf dem Ovale in einer Richtung, so bewegt sich der Punkt M in gleicher, der Punkt N aber in entgegengesetzter Richtung.

In unserer $[mn, mn]$ Korrespondenz laufen also die entsprechenden Punkte M und N auf dem Ovale in entgegengesetzter Richtung. Nach dem elementaren Korrespondenzsatze von Herrn C. Juel[3]) gibt es also in unserer Korrespondenz $mn + mn = 2\,mn$ Koinzidenzen. Es gibt also mn gemeinsame Tangenten der Kurven C_m und C_n, wenn man eine gemeinsame Tangente, die zugleich Doppeltangente der einen Kurve ist, mit entsprechender Multiplizität rechnet.

Damit sind die Sätze I und II vollständig bewiesen.

5. Der Satz II lässt sich für Kurven, die aus mehreren Zügen bestehen können, auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Sind C_m und C_n Kurven ohne Wende- und Doppelpunkte, von denen die eine Kurve in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete T liegt, das keinen Punkt der anderen Kurve enthält und gehen m bzw. n. Tangenten der Grenzlinie von T an die Kurve C_m bzw. C_n, so haben die Kurven C_m und C_n mn gemeinsame Tangenten.*

Auf Grund des Vorigen lässt sich dieser Satz ohne Weiteres beweisen. Die Kurven C_m und C_n können auch Doppelpunkte haben. Die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte an die Kurve C_m (oder C_n) gehen, ändert sich nämlich auch in diesem Falle nur dann, wenn der Punkt die Kurve durchschreitet, weil die Kurve keine Wende- und stationäre Tangenten hat.

---

3) C. Juel: „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung", S. 23—26. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Raekke, Naturv. og Math. Afd. XI. 2, (1914), S. 23—26.

Zur Theorie der algebraischen Körper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Es sei

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{1}$$

eine irreduzible Gleichung mit rat.-ganzen Koeffizienten. Im Körper $K(\omega)$, der durch eine Wurzel bestimmt ist, sollen die Zerlegungen

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k} \\ \omega &= \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{a_k} \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{q}, p) = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

gelten, wo $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal f_i-ten Grades bedeutet. Bekannterweise sind die Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$ gleich den sog. PUISEUXschen Zahlen der Gleichung (1) in bezug auf p.[1]) Ist nämlich $\frac{b}{s}$ eine PUISEUXsche Zahl, dann ist sie gleich einem Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$ und umgekehrt.

Es sei r die Anzahl der Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$, welche gleich $\frac{b}{s}$ sind, es soll also

$$\frac{b}{s} = \frac{a_{i_1}}{g_{i_1}} = \frac{a_{i_2}}{g_{i_2}} = \ldots = \frac{a_{i_r}}{g_{i_r}} \tag{3}$$

ausfallen. Wir werden beweisen, dass aus (3) die Relationen

$$\begin{aligned} b &= f_{i_1} a_{i_1} + \ldots + f_{i_r} a_{i_r} \\ s &= f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r} \end{aligned} \tag{4}$$

folgen. Wenn

---

[1]) M. BAUER: Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für Mathematik*, Bd. 132 (1907), S. 21—32.

(4*) $$(b, s) = 1$$

vorausgesetzt wird, bekommt man

$$g_{i_1} \equiv g_{i_2} \equiv \ldots \equiv g_{i_r} \equiv 0 \pmod{s},$$

daraus folgt $r = 1$, und wenn $i_1 = i$ gesetzt wird, ergeben sich

(4**) $$b = a_i,\ s = g_i,\ f_i = 1.$$

Es ist zu betonen, dass wir bei dieser Folgerung nur eine der Puiseuxschen Zahlen benützt haben, im Gegensatze sowohl zu meinen früheren Publikationen, als zu den tiefgehenden Untersuchungen des H. Øystein Ore.[2])

2. Wir werden zwei verschiedene Beweise angeben. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal von p im Galoisschen Körper, der zu $K(\omega)$ gehört. Aus der sog. Dedekindschen Regel ist ableitbar, dass die Anzahl der Konjugierten des Ideals $\mathfrak{p}_i$, welche durch $\mathfrak{P}$ teilbar sind, gleich $f_i g_i$ ist. Wird ferner i durch einen anderen Index j vertauscht, so gehören die in Betracht kommenden Körper zu verschiedenen Konjugierten von ω.[3]) Nun betrachten wir die charakteristischen Zahlen der sämtlichen Wurzeln $\omega^{(i)}$ in bezug auf das Primideal $\mathfrak{P}$. Die Anzahl der Wurzeln, für welche die charakteristische Zahl gleich $\frac{b}{s}$ ausfällt, ist nach dem Vorigen gleich $f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r}$. Andererseits ist diese Anzahl gleich[4]) s, woraus sich

$$s = f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r},\quad b = f_{i_1} a_{i_1} + \ldots + f_{i_r} a_{i_r}$$

ergeben.

3. Man kann den Beweis ohne Anwendung der Gruppentheorie leisten, wenn die Theorie der $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen herangezogen wird. Jeder p-adische irreduzible Faktor der Gleichung (1) besitzt eine einzige Puiseuxsche Zahl in bezug auf p, deren Zähler bzw. Nenner gleich einer der Zahlen $f_i a_i$ bzw. $f_i g_i$ ausfällt. Um-

---

[2]) Ö. Ore: Zur Theorie der algebraischen Körper, *Acta Mathematica*, Bd 44 (1923). S. 219—315. Durch die hier bewiesene Tatsache lassen sich gewisse bekannte Sätze verschärfen.

[3]) M. Bauer: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen etc. *Math. Zeitschrift*, Bd. 14 (1922). S. 244—249, § 1.

[4]) Vgl. S. 26 der Arbeit [1]).

gekehrt gehört zu jedem Paare ein irreduzibler Faktor.[5]) Wendet man jetzt den DUMASschen Produktsatz an, so bekommt man (4).

4. Der Satz ist auf die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen ausdehnbar. (Hier kommt nur die erste Beweismethode in Betracht.) Zwar ist nicht der ganze Beweis der DEDEKINDschen Regel übertragbar, die Tatsache jedoch, die wir als Folgerung aus der Regel benützten, bleibt, wie ohne Weiteres zu ersehen ist, bestehen.

---

[5]) M. BAUER: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen etc. II. *Math. Zeitschrift*, Bd. 20 (1924), S. 95—97. Vgl. noch die Fussnote [12]) der Arbeit 3). Der letzte Satz der Pussnote [11]) a. a. O. ist zu streichen.

Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes von Herrn Bauer.

Von Öystein Ore in Kristiania.

Herr Bauer gibt in seiner Note eine interessante Relation zwischen den Neigungszahlen (Puiseuxsche Zahlen) des Polygons in bezug auf p und der Primidealzerlegung von p. Diese Relation gestattet auch, für Spezialfälle, eine Bestimmung der Primideale, welche in p aufgehen.

Herr Bauer hat mir die Vermutung ausgesprochen, dass sein Satz zu dem allgemeineren Falle der Primfunktionenpolygone[1]) erweitert werden könne, so dass man einen Satz erhalte, der für jede Gleichung $f(x) = 0$ eine Aussage gäbe. Wie ich im Folgenden zeige, ist diese Verallgemeinerung in der Tat möglich.

Der Satz von Herrn Bauer setzt voraus, wenn er nicht trivial sein soll, dass die Zahl ω mit p einen Idealfaktor gemeinsam hat, d. h. es ist $c_n \equiv 0 \pmod{p}$; x muss daher ein Primfunktionteiler von $f(x)$ (mod p) sein. Ich betrachte nun allgemeiner den Fall, dass $\varphi(x)$ eine Primfunktion m^{ten} Grades ist, welche (mod p) in $f(x)$ aufgeht.

Dann sei

(1) $$p = \mathfrak{p}_1^{g_1}\,\mathfrak{p}_2^{g_2} \,.\, \mathfrak{p}_k^{g_k}\, P$$
$$\varphi(\omega) = \mathfrak{p}_1^{a_1}\,\mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{a_k}\, Q \qquad N\mathfrak{p}_i = p^{f_i}$$

die Primidealzerlegung von p und $\varphi(\omega)$, wobei die Ideale P und Q durch keines der Primideale $\mathfrak{p}_i$ teilbar sind und weiter P zu Q relativ prim ist. Hier muss auch der Grad f_i von $\mathfrak{p}_i$ durch m teilbar sein[2]), man kann folglich

(2) $$f_i = e_i\, m$$

schreiben, wo e_i eine ganze rationale Zahl bedeutet.

[1]) Man sehe meine Arbeit: Zur Theorie der algebraischen Körper, *Acta Mathematica*, Bd. 44.

[2]) Loc. cit. Kap. 3. § 5.

Bildet man nun das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$, so sind in (1) die Verhältnisse $\frac{a_i}{g_i}$ gleich einer der Neigungszahlen dieses Polygones. Wenn umgekehrt eine Seite S die Projektionen h und l auf die Y-Achse, bzw. X-Achse besitzt, so ist

$$\frac{h}{l} = \frac{eH}{e\lambda} = \frac{H}{\lambda}, \ (H, \lambda) = 1$$

die Neigungszahl dieser Seite und es gibt immer solche Primideale $\mathfrak{p}_i$, dass $\frac{h}{l} = \frac{a_i}{g_i}$ ist.[3])

Man habe nun für diese Seite

$$(3) \qquad \frac{h}{l} = \frac{a_{i_1}}{g_{i_1}} = \frac{a_{i_2}}{g_{i_2}} = \ldots = \frac{a_{i_r}}{g_{i_r}},$$

während alle andere Verhältnisse $\frac{a_i}{g_i}$ von $\frac{h}{l}$ verschieden seien.

Dann bestehen die Relationen

$$(4) \qquad m\,l = f_{i_1} g_{i_1} + f_{i_2} g_{i_2} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r},$$

$$(5) \qquad m\,h = f_{i_1} a_{i_1} + f_{i_2} a_{i_2} + \ldots + f_{i_r} a_{i_r}.$$

Der Beweis kann durch eine Verallgemeinerung des zweiten Beweises des Herrn Bauer geleistet werden. Nach dem Henselschen Hauptsatze folgt aus (1) eine Zerlegung von $f(x)$ in irreduzible p-adische Faktoren und zwar so, dass der Faktor, welcher dem Primideale $\mathfrak{p}_i$ entspricht, vom Grade $f_i g_i$ wird. Man hat daher auch eine Zerlegung

$$(6) \qquad f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) P(x) \pmod{p^M},$$

wobei der Exponent M beliebig gross gewählt werden kann, und jedes $f_i(x)$ vom Grade $f_i g_i$ ist.

Hier muss, wie leicht ersichtlich $f_i(x) \pmod p$ kongruent einer Potenz von $\varphi(x)$ sein, während $P(x) \pmod p$ nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Ferner muss $f_i(x)$ immer ein geradliniges Polygon $(p, \varphi(x))$ besitzen, indem sonst $f_i(x)$ immer $\pmod{p^M}$ reduzibel würde, wie gross auch M gewählt wird.[4]) Da $f_i(x)$ vom Grade $f_i g_i = e_i g_i m$ ist, wird

$$f_i(x) \equiv \varphi(x)^{e_i g_i} \pmod p;$$

das geradlinige Polygon von $f_i(x)$ wird daher eine Projektion von

[3]) Die Richtigkeit dieser Bemerkungen folgt aus dem Satze 26. Kap. 3. § 5 in meiner oben erwähnten Arbeit.

[4]) Loc. cit. Satz I:, Kap. 2. § 6.

der Länge $e_l g_l$ auf der X-Achse haben Ist nun für ein Primideal $\mathfrak{p}_{l_j}$ die Relation (3) erfüllt, so wird das entsprechende $f_{l_j}(x)$ ein geradliniges Polygon mit der Neigungszahl $\frac{a_{l_j}}{g_{l_j}} = \frac{h}{l}$ besitzen.

Nach (6) hat man

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) P(x) + p^M N(x),$$

und man kann hier M so gross annehmen, dass die Glieder $p^M N(x)$ keinen Einfluss auf dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ haben. Indem man den Multiplikationssatz[5]) für Polygone anwendet, ersieht man, dass das Hauptpolygon von $f(x)$ aus den geradlinigen Polygonen der Faktoren $f_l(x)$ nach steigender Neigung zusammengesetzt ist. Dieses Polygon wird daher auch eine Seite mit der Neigungszahl $\frac{h}{l} = \frac{H}{\lambda}$ besitzen und diese Seite ist natürlich mit S identisch. S entsteht daher durch Zusammensetzen der Polygone der Faktoren

$$f_{l_j}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots r);$$

folglich ist auch die Projektion l von S auf der X-Achse gleich der Summe der Projektionen dieser Polygonen, also

$$l = e_{l_1} g_{l_1} + e_{l_2} g_{l_2} + \ldots + e_{l_r} g_{l_r}. \tag{7}$$

Multipliziert man diese Relation mit m so folgt nach (2) die Relation (4). Die Richtigkeit der Relation (5) ergibt sich dann aus (4) indem man die Beziehungen (3) beachtet.

Wenn für die Seite S $e = 1$ ist, wird h zu l relativ prim, und es folgt aus (3), dass alle g_{l_j} durch l teilbar werden. Dann ist aber nach (7) $r = 1$, $g_{l_1} = l$ und $a_{l_1} = h$ und auch $f_{l_1} = m$.

Kristiania, 29 April 1924.

---

[5]) Man sehe meine Arbeit: Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien, *Math. Zeitschr.* Bd. 18, pp 278—288.

Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. (Erste Mitteilung.)

Von LEOPOLD FEJÉR in Budapest.

Einleitung.

1. Bei der Behandlung vieler und verschiedenartiger Fragen, die sich auf trigonometrische Polynome und Reihen, so wie auf verwandte Polynome und Reihen beziehen, hat die folgende elementare Bemerkung eine gewisse Bedeutung gewonnen:

Die Summen der Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta+\ldots$$

sind alle nichtnegativ. D. h. wenn ich $s_n^{(0)}=\frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta$ und $s_n^{(1)}=s_0^{(0)}+s_1^{(0)}+\ldots+s_n^{(0)}$ setze, so ist $s_n^{(1)}\geqq 0$ für jedes reelle θ und für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von n.

In den folgenden Zeilen möchte ich einige äusserst elementare Anwendungen dieser Bemerkung zusammenstellen. Die Resultate sind teils neu, teils alt, beziehen sich auf endliche oder unendliche Summen von der Form

$$\sum a_n \cos n\theta, \quad \sum(\alpha_n \cos n\theta+\beta_n \sin n\theta)\, r^n, \quad \sum a_n P_n(\cos\theta),$$

und bestehen aus vielfach gut brauchbaren hinreichenden Bedingungen für die Positivität der betrachteten unendlichen oder endlichen Summen. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Sätze, welche sich auf die Summen $\sum a_n P_n(\cos\theta)$ beziehen (wo $P_n(\cos\theta)$ das LEGENDREsche Polynom bezeichnet) manchmal einen einfacheren Wortlaut haben als diejenige, welche sich auf die trigonometrischen Summen beziehen.

§ 1.

Unendliche und endliche trigonometrische und harmonische Summen. Ein Satz über die Partialsummen der Potenzreihe.

2. Betrachten wir die trigonometrische Kosinusreihe

$$(1)\qquad \frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+\ldots+a_n\cos n\theta+\ldots$$

und es sei

$$(2)\qquad S_n=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+\ldots+a_n\cos n\theta.$$

Ferner sei

$$(3)\qquad \frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta=s_n,$$

und

$$(4)\qquad s_0+s_1+\ldots+s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2=\sigma_n$$

gesetzt. Da $\sigma_n \geqq 0$, so ist, um Kriterien für Positivität zu gewinnen, nach Abel naheliegend statt $\frac{1}{2}$, $\cos\theta, \ldots \cos n\theta$ die nichtnegativen Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_n$ einzuführen. Da

$$\cos n\theta=s_n-s_{n-1}=\sigma_n-\sigma_{n-1}-(\sigma_{n-1}-\sigma_{n-2})=$$
$$=\sigma_n-2\,\sigma_{n-1}+\sigma_{n-2},$$

so ist

$$(5)\qquad S_n=\sum_{\nu=0}^{n-2}(a_\nu-2\,a_{\nu+1}+a_{\nu+2})\,\sigma_\nu+(a_{n-1}-2\,a_n)\,\sigma_{n-1}+a_n\,\sigma_n.$$

Es sei

$$(\mathrm{I})\qquad \lim a_n=0.$$

Dann ist für eine innere Stelle θ des Intervalles $(0, 2\pi)$, da doch $\sigma_n(\theta)\leqq\dfrac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$, auf Grund von (5):

$$(6)\qquad \lim_{n=\infty} S_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu-2\,a_{\nu+1}+a_{\nu+2})\,\sigma_\nu,$$

falls die rechtsstehende Reihe konvergiert. Ich setze nun (ausser (I)) voraus, dass die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ eine monoton abnehmende, konvexe Folge sei, d. h. dass nicht nur

(II') $$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots \geqq 0,$$
sondern auch
(II'') $$a_0 - a_1 \geqq a_1 - a_2 \geqq \ldots \geqq a_n - a_{n+1} \geqq \ldots \geqq 0$$
gilt.[1]) Dann sind die Koeffizienten der Reihe (6) (mit Rücksicht auf (II'')) alle nichtnegativ, die Reihe (6) konvergiert (mit Rücksicht auf (I) und (II')), und es ist alsdann

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2})\, \sigma_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \sin^2(\nu+1)\frac{\theta}{2} \geqq 0.$$

Wir haben also das folgende Theorem erhalten:

T h e o r e m I. *Bilden die Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots a_m \ldots$ *der trigonometrischen Reihe*

(7) $$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$

eine nichtnegative, monoton zu Null abnehmende, konvexe Folge, so ist die Reihe (7) *für* $0 < \theta < 2\pi$ *nicht nur konvergent, sondern ihre Summe ist nichtnegativ; u. zw. ist*

(8) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu\theta = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \sin^2(\nu+1)\frac{\theta}{2},$$
$$(0 < \theta < 2\pi).$$

3. Interessant ist der Spezialfall des trigonometrischen Kosinuspolynoms

(9) $$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta.$$

Um Theorem I anwenden zu können, muss die Folge

(10) $$\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, 0, 0, 0, \ldots$$

eine konvexe Nullfolge sein. Hierzu ist jedenfalls notwendig, dass die $(n+1)$ Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ eine nichtnegative, monoton ab-

[1]) Wenn für eine Folge die Bedingungen (I), (II'), (II'') befriedigt sind, so nenne ich sie kurz eine konvexe Nullfolge.

nehmende, konvexe Zahlenfolge bilden; dies ist aber nicht hinreichend. Wenn aber ausserdem für das letzte Koeffizientenpaar $\lambda_{n-1} - \lambda_n \geqq \lambda_n - 0$, d. h.

$$\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n, \tag{11}$$

dann (und nur dann) ist (10) eine konvexe Nullfolge. Ich habe also auf Grund von Theorem I das folgende (auch aus der Identität (5) unmittelbar fliessende) Theorem erhalten:

Theorem II. *Bilden im trigonometrischen Polynome*

$$T(\theta) = \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta$$

die $(n+1)$ *Koeffizienten*

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$$

eine nichtnegative, monoton abnehmende, konvexe Zahlenfolge, und ist für das letzte Koeffizientenpaar λ_{n-1}, λ_n

$$\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n, \tag{12}$$

dann ist für jedes θ

$$T(\theta) \geqq 0. \tag{13}$$

4. Es sei hier eine bekannte Bemerkung eingeschaltet: Sind

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots \tag{14}$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n, \ldots \tag{15}$$

beide nichtnegative, abnehmende, konvexe Folgen, so ist auch

$$\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_n\beta_n, \ldots \tag{16}$$

eine solche. Denn wegen

$$\alpha_n\beta_n - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = \alpha_n(\beta_n - \beta_{n+1}) + \beta_{n+1}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \tag{17}$$

ist einerseits $\alpha_n\beta_n - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} \geqq 0$, andererseits nimmt diese Differenz mit wachsendem n monoton ab.

5. Da nun

$$\lambda_0 = n+1,\ \lambda_1 = n, \ldots \lambda_{n-1} = 2,\ \lambda_n = 1$$

die Bedingungen des Theorems II befriedigen, so ist

$$\frac{n+1}{2} + n\cos\theta + \ldots + \cos n\theta \geqq 0, \tag{18}$$

womit ich aber nur meine Ausgangsungleichung $s_n^{(1)} \geqq 0$ wiedergewonnen habe. Nun ist aber auch

$$1, r, r^2, \ldots r^n, \ldots \tag{19}$$

für $0 \leqq r \leqq 1$ abnehmend-konvex, also ist, mit Rücksicht auf N° 4,

$$\frac{n+1}{2} + n \cdot r \cos\theta + \ldots + 1 \cdot r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{20}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, woraus dann unmittelbar das ebenfalls bekannte, im § 2 zu benützende Resultat folgt, dass, wenn die harmonische Entwickelung

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\, r^n \tag{21}$$

für $0 \leqq r < 1$ konvergiert und ihre Summe ebenda zwischen den Grenzen m und M liegt, dann auch die arithmetischen Mittel ihrer Partialsummen zwischen m und M liegen. Ist also speziell im Einheitskreise $u > 0$, dann sind für $0 \leqq r \leqq 1$ sämmtliche arithmetischen Mittel der harmonischen Entwickelung (21) nichtnegativ.

6. Es sei nun $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$. Dann ist nicht nur

$$1, r, \ldots r^n, r^{n+1}, \ldots \tag{22}$$

sondern auch

$$1, r, \ldots r^n, 0, 0, 0, \ldots \tag{23}$$

konvex. Also ist, auf Grund von Theorem II und N° 4, für $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{24}$$

eine Ungleichung, die auf Grund der Formel

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2 + 2\, r^{n+1}(r\cos n\theta - \cos(n+1)\theta)}{2(1 - 2r\cos\theta + r^2)}$$

leicht zu verifizieren ist. Ich habe also das folgende Theorem gefunden:

Theorem III. *Die Partialsummen der Reihe*

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta + \ldots \tag{25}$$

sind im Kreise

$$0 \leqq r \leqq \frac{1}{2} \tag{26}$$

alle nichtnegativ; d. h.

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{27}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$; $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

7. Somit ist folgender Satz bewiesen: Ist in der harmonischen Entwickelung

$$\frac{a_0}{2}+a_1 r\cos\theta+\ldots+a_n r^n\cos n\theta+\ldots \tag{28}$$

die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ nichtnegativ, abnehmend und konvex, so ist ihre Summe für $0\leq r<1$, ihre Partialsummen für $0\leqq r\leqq\frac{1}{2}$ und jedes n nichtnegativ.

Dieser Satz lässt sich nicht „verbessern" weil für

$$\frac{1}{2}+r\cos\theta+\ldots+r^n\cos n\theta+\ldots \tag{29}$$

die Partialsumme $s_1=\frac{1}{2}+r\cos\theta$ auf dem Kreise $r=\frac{1}{2}+\varepsilon$ (wo $\varepsilon>0$) negativ wird.

8. Mein Schüler Herr S. Szidon, dem ich alles Vorhergehende mitgeteilt habe, hat nun die interessante Bemerkung gemacht, dass die zweite Behauptung des Satzes von N° 7 für beliebige, im Einheitskreise positive harmonische Funktionen gültig ist. Es besteht also das

Theorem IV. *Ist die harmonische Summe*

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)\,r^n \tag{30}$$

für $0\leqq r<1$ positiv, so sind sämmtliche Partialsummen von (30) *im Kreise $0\leqq r\leqq\frac{1}{2}$ nichtnegativ. Für $0\leqq r\leqq\frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ ist das Theorem nicht richtig.*

Die Behauptung ist auf Grund meines Theorems III und der Formel für die n-te Partialsumme von (30)

$$u_n(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\varphi)\left[\frac{1}{2}+\frac{r}{\varrho}\cos(\theta-\varphi)+\ldots+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n\cos n(\theta-\varphi)\right]d\varphi \tag{31}$$

evident, wenn man erst $0\leqq 2r\leqq\varrho<1$ annimmt, und dann ϱ zu 1 konvergieren lässt.

Ich kann vielleicht die folgende zusammenfassende Bemerkung für die harmonische Entwickelung einer beliebigen im Einheitskreise positiven harmonischen Funktion formulieren: die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer solchen Entwickelung sind im ganzen Kreise $0 \leqq r \leqq 1$, die Partialsummen selbst sind im Kreise $0 < r \leqq \frac{1}{2}$ alle nichtnegativ.

Ist der Konvergenzradius von u gleich R, so muss im Wortlaute des Theorems $\frac{R}{2}$ statt $\frac{1}{2}$ gesetzt werden.

9. Aus dem Theoreme III ergiebt sich noch:

Theorem V. *Ist die Potenzreihe des komplexen Arguments z*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

für $|z| < 1$ *konvergent und ist* $|f(z)| \leqq 1$ *für* $|z| < 1$, *so ist*

$$|s_n(z)| = |c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqq 1, \tag{32}$$

für[2])

$$|z| \leqq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung ist auf Grund der Formel

$$s_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\varphi}) \left[\frac{1}{2} + \frac{r}{\varrho} \cos(\theta - \varphi) + \ldots + \right. \tag{33}$$
$$\left. + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(\theta - \varphi)\right] d\varphi$$

mit Rücksicht auf Theorem III evident.

Für $f(z) = \frac{z-a}{az-1}$, $(0 \leqq a < 1)$, ist $|f(e^{i\theta})| = 1$. Da, wegen

$$f(z) = a - (1-a^2) z + \ldots, \tag{34}$$

$$s_1(z) = a - (1-a^2) z \tag{35}$$

und also

$$s_1\left(-\frac{1+\varepsilon}{2}\right) = a + \frac{(1-a^2)(1+\varepsilon)}{2} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{36}$$

---

[2]) Da aus $|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots| \leqq 1$ für $|z| < 1$ nach Cauchy $|c_n| \leqq 1$ folgt, so ist für $|z| \leqq \frac{1}{2}$ die Ungleichung $|s_n(z)| \leqq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$ trivial. Im Theoreme V. ist also nur wesentlich, dass dort in der Ungleichung (32) die Zahl 2 durch 1 ersetzt ist. Ähnlicher Sachverhalt bei Theorem IV.

ist, so ist für $a = \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$s_1\left(-\frac{1+\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)} > 1,$$

wie klein auch die positive Zahl ε sei. Also lässt sich der Wert $\frac{1}{2}$ des Kreisradius im Theoreme V nicht verkleinern.

Zusammenfassende Bemerkung: Ist $|a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + + \ldots| \leqq M$ für $|z| < R$, so sind für $|z| \leqq R$ sämmtliche arithmetische Mittel der Potenzreihe,[3]) für $|z| \leqq \frac{R}{2}$ sämmtliche Partialsummen der Potenzreihe $\leqq M$.

§ 2.

Summen, die nach Legendrepolynomen fortschreiten.

10. Ich habe schon in der Einleitung erwähnt, dass wir bei der Summe $\Sigma a_n P_n(\lambda)$ einen einfacheren Sachverhalt vorfinden. Ich will gleich das Gegenstück zu Theorem II formulieren:

Theorem VI. *Wenn die Zahlen* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *monoton abnehmen, d. h.*

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0, \tag{37}$$

dann ist für $-1 \leqq \lambda \leqq +1$

$$a_0 P_0(\lambda) + a_1 P_1(\lambda) + \ldots + a_n P_n(\lambda) \geqq 0,$$

wo $P_\nu(\lambda)$ *das* ν*-te* LEGENDRE*sche Polynom bezeichnet.*

Das folgt unmittelbar aus der gewöhnlichen ABELschen Umformung, mit Rücksicht auf mein altes Resultat,[4]) wonach die Summe der ersten n LEGENDREpolynome im Intervalle $(-1, +1)$ nichtnegativ ist, d. h.

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda) + \ldots + P_n(\lambda) \geqq 0, \tag{38}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty;\ -1 < \lambda < +1).$$

---

[3]) Vrgl. E. LANDAU: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916), S. 9 und erstes Kapitel: S. 17—29.

[4]) Aus dieser Tatsache kann man alle wesentliche Eigenschaften der arithmetischen Mittel 2-ter Ordnung der LAPLACEschen und LEGENDREschen Reihe ableiten.

Ich möchte nun in der nächsten Nummer diese Ungleichung (38) aus dem Vorhergehendem ableiten.

11. Setzt man $\lambda = \cos\theta$, so lautet die erzeugende Funktion von $P_n(\cos\theta)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}. \tag{39}$$

In einer frühere Arbeit habe ich schon darauf hingewiesen, dass es manchmal vorteilhaft ist statt der Funktion (39)

$$w = \frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}} = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(P_n - P_{n-1})\,z^n, \tag{40}$$

d. h. die erzeugende Funktion von $P_n - P_{n-1}$ einzuführen. Die folgenden Ausführungen werden vielleicht noch mehr für die Zweckmässigkeit der Verwendung von (40) sprechen.

Da

$$u = \frac{1+z}{1-z} \tag{41}$$

das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ auf die rechte Hälfte der u-Ebene abbildet, so liefert

$$u^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{1+2z+z^2}{1-2z+z^2} \tag{42}$$

die Abbildung von $|z| < 1$ auf die ganze Funktionsebene, wenn man letztere entlang der ganzen negativen Axe aufschlitzt. Daraus folgt, dass auch

$$v = \frac{1-\lambda}{2}u^2 + \frac{1+\lambda}{2} = \frac{1-2\lambda z+z^2}{1-2z+z^2} \tag{43}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf die volle v-Ebene abbildet, nur das jetzt die v-Ebene entlang der reellen Axe von $v = \frac{1+\lambda}{2}$ bis $-\infty$ aufzuschlitzen ist. Daraus folgt weiter, dass

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}}{1-z} \tag{44}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf die rechte Funktionshalbebene abbildet, wenn man dieselbe entlang der positiven Axe von 0 bis $\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$

aufschlitzt. Folglich bildet

$$w = \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z + z^2}} \tag{45}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf die rechte w-Halbebene ab, wenn man dieselbe entlang der positiven Axe von $\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ bis $+\infty$ aufschlitzt.

Ich habe also das folgende Resultat erhalten:

Theorem VII. *Die erzeugende Funktion*

$$w = \frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\theta + z^2}} \qquad (0 < \theta < \pi) \tag{46}$$

der Differenz $P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)$ *zweier* LEGENDRE*polynome bildet das Innere des Einheitskreises schlicht auf die rechte w-Halbebene ab, die aber entlang der positiven Axe von* $\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ *bis* $+\infty$ *aufzuschlitzen ist.*

Aus dieser Tatsache folgt aber, dass der reelle Teil von w für $|z| < 1$ *positiv* ist. In der Tat, liegt doch der Bildpunkt w immer in der *rechten* Halbebene. Daraus folgt, mit Rücksicht auf N° 5, dass die Summen der Partialsummen (oder auch die arithmetischen Mittel) der harmonischen Entwickelung des reellen Teiles von w an jeder Stelle des Einheitskreises $|z| \leqq 1$, also speziell auch für $z = 1$, nichtnegativ sind. Für $z = 1$ geht aber diese harmonische Entwickelung mit Rücksicht auf (40) in

$$P_0 + (P_1 - P_0) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots \tag{47}$$

über. Die n-te Partialsumme ist P_n, also die Summe der Partialsummen $P_0 + P_1 + \ldots + P_n$. Ich habe also erhalten: $P_0 + P_1 + \ldots + P_n \geqq 0$, w. z. b. w.[5])

[5]) Die Erzeugende Funktion (40) führt auch ganz kurz und ungezwungen zu den MEHLERschen Formeln für $P_n(\cos\theta)$. Da nämlich der reelle Teil von $w(e^{i\varphi})$ für $0 \leqq \varphi < \theta$ gleich Null, für $\theta < \varphi \leqq \pi$ aber gleich $\dfrac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}}$ ist, so ist nach der Formel von DIRICHLET für die Partialsumme der FOURIERschen Reihe (für $\varphi = 0$)

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{2\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos t)}} \cdot \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = \tag{48}$$

§ 3.

Schlussbemerkungen.

12. In dieser Note habe ich ausschliesslich die, mit Hilfe der ABELschen Umformung sich unmittelbar ergebenden, Konsequenzen der Tatsache besprochen, nach welcher die Summe der Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta+\ldots,$$

$$s_n^{(1)}(\theta)=\frac{n+1}{2}+n\cos\theta+\ldots+\cos n\theta\geqq 0$$

sind, für $0\leqq\theta\leqq 2\pi$. Für die Reihe

$$\frac{1}{2}+\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta+\ldots$$

ist sogar schon

$$s_n^{(0)}(\theta)=\frac{1}{2}+\sin\theta+\ldots+\sin n\theta\geqq 0.$$

für $0\leqq\theta\leqq\pi$, während bei der Reihe

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta+\ldots$$

wieder nur

$$s_n^{(1)}(\theta)=n\sin\theta+(n-1)\sin 2\theta+\ldots+1\,.\sin n\theta\geqq 0$$

ist, für $0\leqq\theta\leqq\pi$. Weiter ist

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(n-1)\theta+\frac{\sin n\theta}{2}\geqq 0,$$

für $0\leqq\theta\leqq\pi$, u. s. w.

Mit den Konsequenzen dieser Ungleichungen möchte ich mich kurz in einer zweiten Mitteilung beschäftigen. Dort werde ich auch die Polynome

$$\frac{\lambda_0}{2}+\lambda_1\cos\theta+\ldots+\lambda_n\cos n\theta$$

berücksichtigen, in welchen die Folge $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ zwar nichtnegativ, monoton abnehmend und konvex ist, aber $\lambda_{n-1}\geqq 2\lambda_n$ *nicht*

$$=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos t)}}$$

— die bekannte MEHLERsche Formel. Ähnlich kann man auch die zweite MEHLERsche Formel aus w erhalten.

besteht. In diesem Zusammenhange kann ich — durch eine Art Ergänzung — dann u. A. einige Resultate von Herrn W. H Young[6]) für das Polynom

$$\frac{\cos\theta}{1}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}$$

aus einem allgemeinen Satze herleiten.[7])

Budapest, den 18-ten Februar 1925.

---

[6]) W. H. Young: On a certain Series of Fourier [Proceedings of the London Math. Society, Ser. II, Bd. XI, (1913), S. 357—366].

[7]) Vrgl. auch E. Landau: Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Göttinger Nachrichten (1918), insb. S. 83-84 Fussnote [12]).

Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie.[1])

Von Friedrich Riesz in Szeged.

Meine Herren!

Gestatten Sie mir, dass ich ohne geschichtliche Einleitung sofort sage, was ich unter einer *subharmonischen* Funktion verstehe. Um mich bequemer ausdrücken zu können, spreche ich von Funktionen von 2 Veränderlichen; die Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche liegt an der Hand. Eine im Inneren eines Gebietes G definierte, stetige oder nach oben halbstetige Funktion $u(x, y)$, die auch an einzelnen Stellen negativ unendlich werden darf, heisse subharmonisch, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt. Jede in einem beliebigen inneren Teilgebiete G' harmonische und auf dem Rande von G' stetige Funktion $U(x, y)$, die auf dem Rande von G' grösser oder gleich $u(x, y)$ ist, erfüllt diese Ungleichung auch innerhalb G'.

Für stetige Funktionen $u(x, y)$ und für solche Teilgebiete und Randwerte, für welche das Dirichletsche Problem gelöst werden kann, lässt sich, was ich ja nicht näher begründen muss, die erklärende Eigenschaft auch so formulieren: Im Inneren von G' ist $u(x, y) \leqq$ als diejenige harmonische Funktion $U(x, y)$, die auf dem Rande von G' dieselben Randwerte besitzt. Sie werden übrigens bald sehen, dass wir uns gleich bei der Definition auf Teilgebiete spezieller Art mit sehr anständigen Rändern, z. B. auf Kreisgebiete hätten beschränken können. Ich will auch sofort betonen, dass der Ansatz, nach welchem wir halbstetige Funktionen

[1]) Vortrag, gehalten und wiederholt in den mathematischen Gesellschaften in Stockholm (15. 9. 1924) und in Kopenhagen (18. 9. 1924) und in der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Innsbruck (24. 9. 1924).

und Unendlichkeitsstellen zulassen, keineswegs bei den Haaren herangezogen ist, sondern sich später, besonders bei den potentialtheoretischen Fragen, als natürlich und notwendig erweisen wird.

Wie erkennt man nun, ob eine vorgelegte Funktion subharmonisch ist? Hiefür habe ich vor einigen Jahren ein sehr einfaches und handliches Kriterium angegeben.[2]) Man wird dazu durch die folgende Betrachtung geführt. Ist $u(x, y)$ subharmonisch im Gebiete G und ist K eine Kreisscheibe innerhalb G mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und mit dem Radius r, so ist

$$u(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi,$$

d. h. der Wert von u im Mittelpunkt ist $\leqq$ dem Mittelwert auf der Kreislinie. Für stetige $u(x, y)$ folgt dies unmittelbar aus der Poissonschen resp. schon aus der spezielleren Gaussschen Formel, wonach der Mittelwert $= U(x_0, y_0)$ ist, wo $U(x, y)$ die in K harmonische Funktion mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$ bedeutet. Im Falle einer halbstetigen Funktion gelangt man zu derselben Ungleichung, indem man die Funktion durch stetige Funktionen von oben annähert.

Die obige Ungleichung besagt im wesentlichen nur soviel, dass die definierende Bedingung für Kreisgebiete u. zw. im Mittelpunkt derselben erfüllt ist, also scheinbar viel weniger, als die Definition erfordert. Dass es dem nicht so ist und dass unsere Ungleichung, ja sogar auch schon wenn sie für genügend kleine Werte von r erfüllt ist, eine nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung darstellt, das wird Ihnen auch ohne den — übrigens sehr kurzen und einfachen — Beweis[3]) sofort einleuchten, wenn Sie nur bemerkt haben, dass die subharmonischen Funktionen die unmittelbare Verallgemeinerung der *konvexen* Funktionen $u(x)$ einer Veränderlichen sind. Denn die harmonischen Funktionen einer Veränderlichen sind ja die linearen Funktionen, und die definierende Eigenschaft der konvexen Funktionen, wonach jeder Bogen der Bildkurve unterhalb der entsprechenden Sehne liegt, entspricht genau der definierenden Eigenschaft der

[2]) F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, *Acta universitatis Franc.-Jos.* I, (1922), p. 27—32.

[3]) l. c. [2])

subharmonischen Funktionen. Unserer Ungleichung entspricht nun bei den konvexen Funktionen die Ungleichung

$$u(x_0) \leqq \frac{1}{2}\left\{u(x_0-h)+u(x_0+h)\right\}.$$

Durch eine bekannte Schlussweise folgt auch umgekehrt aus dem Erfülltsein dieser Ungleichung für alle x_0 innerhalb eines Intervalls (a, b) und für genügend kleine Werte von h die Konvexität der Funktion $u(x)$ und genau ebenso *folgt aus dem Erfülltsein der ersten Ungleichung für alle* (x_0, y_0) *und für kleine r, dass die Funktion* $u(x, y)$ *subharmonisch ist.*

Ich bemerke noch und weise dabei wieder auf die Analogie mit den konvexen Funktionen hin, dass für solche subharmonische Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar sind, die Ungleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \geqq 0$$

stattfindet, und dass umgekehrt diese Ungleichung das subharmonische Verhalten zur Folge hat. Doch braucht eine subharmonische Funktion nicht unbedingt und keinesfalls überall zweimal differenzierbar zu sein; man denke nur wieder an die Analogie mit den konvexen Funktionen.

Ich möchte den Begriff der subharmonischen Funktion noch von einer anderen Seite her, sozusagen nicht mehr von oben, sondern von unten her beleuchten. Sie wissen ja, dass man die konvexen Funktionen auch auf folgende Weise aus linearen Funktionen erzeugt: man geht aus von einer endlichen oder unendlichen Anzahl von auf einer Strecke linearen Funktionen d. i. von geraden Linienstücken und setzt $u(x)$ überall gleich der grössten Ordinate resp. der oberen Schranke der Ordinaten; mit anderen Worten, man bildet die *obere Enveloppe* der Geradenstücke. Derselbe Prozess, angewandt auf eine endliche oder unendliche Anzahl von in einem Gebiete harmonischen Funktionen $h(x, y)$, liefert eine subharmonische Funktion $u(x, y)$; im Falle unendlich vieler Funktionen ist dabei noch besonders vorauszusetzen, dass die Enveloppe $u(x, y)$ stetig oder nach oben halbstetig ist. Ist nämlich die Funktion $U(x, y)$ in einem inneren Teilgebiete G' harmonisch und auf dem Rande von G' stetig und auf letzterem $\geqq u(x, y)$ so ist sie daselbst und somit auch im Inneren $\geqq$ den Funktionen $h(x, y)$ und also auch $\geqq$ ihrer oberen Enveloppe $u(x, y)$. Dieselbe Schlussweise gilt auch, wenn man über die

Funktionen $h(x, y)$ nur soviel voraussetzt, dass sie subharmonisch sind; die obere Enveloppe ist dann, sobald sie stetig oder nach oben halbstetig ist, ebenfalls subharmonisch.

Ein für die Funktionentheorie besonders wichtiger Fall solcher Enveloppe" ist *der Positivlogarithmus* $\overset{+}{\log} |f(z)|$ *des absoluten Betrages einer analytischen Funktion* $f(z)$, d. i. die obere Enveloppe von $\log |f(z)|$ und von Null.[4])

Ein anderes, sehr interessantes Beispiel steht schon in einer Arbeit von Herrn HARTOGS aus dem Jahre 1906.[5]) Betrachten wir eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum f_n(z)\, w^n,$$

wo die $f_n(z)$ in dem Gebiete G analytische Funktionen sind. Für jeden Wert z aus G besitzt diese Reihe, als Potenzreihe in w betrachtet, einen bestimmten Konvergenzradius $R(z)$. Nach der CAUCHY-HADAMARDschen Regel ist dann

$$-\log R(z) = \lim\sup \frac{1}{n} \log |f_n(z)|.$$

Bildet man also die obere Enveloppe $u_k(z)$ der Funktionen $\frac{1}{n} \log |f_n(z)|$ für $n \geqq k$, so hält $u_k(z)$ bei unbegrenzt wachsendem k abnehmend gegen $-\log R(z)$. Daraus schliesst man, dass $-\log R(z)$ subharmonisch ist, jedenfalls nur in einem etwas allgemeinerem Sinne, da diese Funktion zwar nach unten, aber nicht notwendig auch nach oben halbstetig ist, wie dies das Beispiel

$$\sum z\, w^n$$

zeigt.

Ein besonders wichtiger Spezialfall sind die Potenzreihen von zwei Veränderlichen; für die associierten Konvergenzradien solcher Reihen folgt nach HARTOGS aus obigem eine Beziehung, die an den bekannten HADAMARDschen Dreikreisesatz

[4]) Hat die Funktion $f(z)$ im Gebiete Nullstellen, so ist die Funktion $\log |f(z)|$, obzwar im allgemeinen harmonisch, im Gebiete als subharmonisch zu betrachten; sie übernimmt hier gewissermassen die Rolle einer konvexen und abteilungsweise linearen Funktion.

[5]) F. HARTOGS, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen etc., *Math. Annalen*, 62, p. 1—88. Das angeführte Beispiel habe ich erst nachträglich in den Text aufgenommen, wie ich denn überhaupt erst nach meinem Vortrage auf den Zusammenhang zwischen der HARTOGSschen Arbeit und unserem Ideenkreis aufmerksam wurde. Vgl. auch [9]).

erinnert und auch ähnlich bewiesen wird. Ich gehe darauf nicht näher ein, sondern komme jetzt über einen neueren funktionentheoretischen Satz zu sprechen, der mich vor einigen Jahren zur Idee der subharmonischen Funktion geführt hat und der übrigens auch den Dreikreisesatz als Grenzfall enthält.

Es handelt sich um den in 1915 veröffentlichten Satz von Hardy:

Sei $f(z)$ eine im Kreise $|z|<R$ analytische Funktion, α eine positive Zahl und

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (r<R).$$

Dann ist 1) *$M_\alpha(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r;* 2) *$M_\alpha(r)$ und auch $\log M_\alpha(r)$ sind konvexe Funktionen von $\log r$.*[6])

Die eleganten Beweise, die Herr Hardy und bald darauf Herr Landau[7]) gegeben haben, leuchten nicht genügend in das Wesen des Satzes hinein; ich möchte daher heute den einfachen Beweis vorführen, den ich vor zwei Jahren veröffentlicht habe[8]) und der die Natur des Satzes scharf hervortreten lässt. Der Weg führt über einen entsprechenden allgemeinen Satz betreffend beliebige subharmonische Funktionen, den ich so ausspreche:

Sei $u(x, y)$ eine im Gebiete G subharmonische Funktion; sei

$$I(r)=I(r, u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,\ y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$$

der Mittelwert dieser Funktion auf der innerhalb G verlaufenden Kreislinie mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius r. Dann gilt Folgendes:

1. *Wenn der Punkt (x_0, y_0) dem Gebiete angehört, so ist $I(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r, solange die entsprechende Kreisscheibe im Inneren von G verbleibt;*

2. *$I(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$ in jedem in G enthaltenen Kreisringe.*

---

[6]) G. H. Hardy, On the mean value of the modulus of an analytic function, *Proceedings of the London Math. Soc.*, ser. 2, 14 (1915), p. 269—277.

[7]) E. Landau, Neuer Beweis eines Hardyschen Satzes, *Archiv der Math. u. Phys.*, 3. Reihe, 25 (1916), p. 173—178.

[8]) l. c [2])

Beweis von 1.: Es seien $r_1 < r_2$ zwei in Betracht kommende Radien, denen also zwei konzentrische Kreise entsprechen. Für den äusseren Kreis bilde man die harmonische Funktion $U(x, y)$ mit denselben Randwerten auf dem Kreise wie jene von $u(x, y)$. Dann ist auf dem inneren Kreise $u \leqq U$ und dasselbe gilt für die entsprechenden Mittelwerte: $I(r_1, u) \leqq I(r_1, U)$. Nach der Gauss-schen Formel für harmonische Funktionen ist aber $I(r_1, U) = I(r_2, U) = I(r_2, u)$ und damit ist 1. bewiesen.

Beweis von 2: Ähnlich wie von 1., nur hat man hier die harmonische Vergleichsfunktion $U(x, y)$, wieder mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$, nicht für einen Kreis, sondern für einen Kreisring zu bilden und dann zu beachten, dass für harmonische Funktionen der Mittelwert $I(r, U)$ linear von $\log r$ abhängt.

Nun an den Hardyschen Satz! Die Funktion $u(x, y) = |f(z)|^\alpha$ ist für $|x + iy| = |z| < R$ subharmonisch. Ist nämlich $f(z_0) = 0$, so ist das angegebene Kriterium für z_0 evidentermassen erfüllt, da $u(x, y)$ in z_0 gleich 0, sonst aber $\geqq 0$ ist. Ist aber $f(z_0) \neq 0$, so kann man $u(x, y)$ deuten als den absoluten Betrag eines in der Umgebung von z_0 eindeutig festzulegenden Zweiges von $(f(z))^\alpha$ und man hat nach Cauchy oder auch nach Gauss

$$(f(z_0))^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + r e^{i\varphi}))^\alpha \, d\varphi,$$

woraus die Ungleichung $u(x_0 y_0) \leqq I(r, u)$ für kleine r sofort folgt.

Da nun $|f(z)|^\alpha$ subharmonisch ist, so ist also $M_\alpha(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r und eine konvexe Funktion von $\log r$. Um zu zeigen, dass auch $\log M_\alpha(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, hat man nur die Rolle von $(f(z))^\alpha$ der Funktion $z^\beta (f(z))^\alpha$ zu übergeben und auf diese Weise zu schliessen, dass für jeden reellen Wert von β auch $r^\beta M_\alpha(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist; daraus ergibt sich die Behauptung durch einen vom Dreikreisesatze her wohlbekannten Kunstgriff.

Ich habe über diesen Beweis deshalb so ausführlich berichtet, weil die darin in ihrer primitivsten Form zu Tage tretende Methode sich auch bei anderen funktionentheoretischen Fragen bewährt. Diese Methode, die man als *Methode der kleinsten harmonischen Majorante* bezeichnen dürfte, hat vor dem klassischen Maximumprinzip den Vorteil grösserer Präcision, da bei ihr als Majorante nicht eine Konstante, sondern eine sich sehr stark, ja möglichst nahe anschmiegende harmonische Funktion verwendet wird.[9])

Ich komme nun über eine zweite Anwendung dieser Methode zu sprechen, die von den Herren F und R. NEVANLINNA herrührt. Diese beiden Herren haben bald nach meiner ersten Veröffentlichung dieselbe Methode unabhängig und in etwas verschiedener Form, stark in Formelapparat verhüllt, auf eine Reihe von wichtigen funktionentheoretischen Problemen angewandt.[10]) Ich greife von diesen Anwendungen nur eine sehr einfache, aber frappante heraus. Sie wissen, dass unter den in einem Gebiete regulär analytischen Funktionen jene, die im Gebiete ausserdem beschränkt sind, eine besondere Rolle spielen oder wenigstens eine Zeit lang spielten. Für diese hat Herr FATOU schon 1906, wenigstens für den Fall eines Kreisgebietes, von welchem man dann durch konforme Abbildung auch auf andere Gebiete übergeht, die Existenz von Randwerten „fast überall", d. i. mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Masse Null, nachgewiesen.[11]) Dasselbe haben mein Bruder und ich in einem in 1916 in Stockholm gehaltenen Kongressvortrage für beliebige rektifizierbare Kurven bewiesen und zugleich gezeigt, dass die Randfunktion fast überall von Null verschieden ist.[12]) Die Verteilung der Nullstellen im Inneren des Gebietes wurde durch Herrn BLASCHKE klargelegt.[13]) Ich erinnere noch an die verschiedenen Konvergenzsätze für beschränkte Funktionenfolgen. Alle diese Resultate hat man dann schrittweise, mit mehr oder weniger Mühe, auf umfassendere Funktionenklassen

---

[9]) Diese Methode scheint zuerst in 1906 bei HARTOGS. l. c. [5]), aufzutreten, u. zw. für den Beweis der Stetigkeit (und damit auch des analytischen Verhaltens im gewöhnlichen Sinne) einer Funktion von mehreren Veränderlichen, falls nur dieselbe in bezug auf jede einzelne Veränderliche analytisch ist.

[10]) F. u. R. NEVANLINNA, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. Scient. Fennicae*, 50 (5) (1922), p. 3—46.

[11]) P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta math.*, 30 (1906), p. 335—400.

[12]) F. u. M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Compte rendu du quatrième congrès des math. scandinaves à Stockholm* (1916), p. 27—44.

[13]) W. BLASCHKE, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. *Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss.*, Math.-phys. Klasse, 67 (1915), p. 194—200.

ausgedehnt. Nun kamen die beiden NEVANLINNA mit folgendem Gedanken heran. Es leuchtet unmittelbar ein, dass alle diese Eigenschaften auch dem Quotienten

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

zweier beschränkter Funktionen zukommen, wenn nur $h(z)$ im Inneren des Gebietes nirgends verschwindet. Wie erkennt man nun, *ob eine Funktion $f(z)$ eine derartige Zerlegung gestattet?*

Antwort: *Notwendig und hinreichend hiefür ist, dass $\overset{+}{\log}|f(z)|$ in dem in Betracht kommenden Gebiete eine harmonische Majorante besitze.* In jedem inneren Teilgebiete gibt es natürlich immer solche Majoranten; ja, da $\overset{+}{\log}|f(z)|$ subharmonisch ist, so kann man auch für die Teilgebiete (mit anständiger Begrenzung) eine kleinste Majorante angeben, nämlich die harmonische Funktion mit denselben Randwerten; hier handelt es sich aber über das Vorhandensein einer einzigen harmonischen Funktion, welche die Funktion $\overset{+}{\log}|f(z)|$ im ganzen Gebiete überragt.

Nun an den Beweis der Behauptung! Erstens: Gibt es eine Zerlegung der gewünschten Art, wobei man noch evidentermassen $|g(z)| \leqq 1$ voraussetzen darf, so ist

$$\overset{+}{\log}|f(z)| \leqq \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{h(z)}\right| \leqq \overset{+}{\log}\max|h(z)| - \log|h(z)|;$$

rechts steht die gewünschte harmonische Majorante. Umgekehrt, ist $U(x,y)$ oder anders geschrieben, $U(z)$ eine harmonische Majorante und $V(z)$ ihre konjugierte Funktion, so ergibt $h(z) = e^{-U-iV}$, $g(z) = h(z)f(z)$ die gewünschte Zerlegung.

Für den Kreisfall $|z| < R$ kann man nun diese Bedingung leicht umformen. Gibt es nämlich eine Majorante U, so ist der auf den konzentrischen Kreisen $|z| = r < R$ gebildete Mittelwert $I(r, U)$ einerseits nach dem GAUSSschen Satze konstant, andererseits ist er eine Majorante für die entsprechenden *Mittelwerte von $\overset{+}{\log}|f(z)|$*. Also *liegen die letzteren unter einer Schranke,* oder auch, da sie mit r wachsen, so gehen sie bei $r \to R$ gegen einen endlichen Grenzwert. *Umgekehrt, wenn die Mittelwerte von $\overset{+}{\log}|f(z)|$ beschränkt sind,* so bilde man für die Kreise $|z| \leqq r$ die kleinsten harmonischen Majoranten und gehe mit r gegen R; dann wachsen diese Majoranten mit wachsendem r, bleiben im Mittelpunkte unter derselben Schranke wie die Mittelwerte und gehen somit nach dem HARNACKschen Satze gegen eine harmonische Funktion; diese ist die gewünschte *einheitliche Majorante für alle* $|z| < R$.

Ich möchte Sie noch auf ein wichtiges Korollar aufmerksam machen. Für alle Funktionen $f(z)$, für welche der HARDYsche Mittelwert $M_\alpha(r)$ im Kreise $|z| < R$ für irgendein $\alpha > 0$ beschränkt bleibt, gilt dasselbe auch für den Mittelwert von $\overset{+}{\log}|f(z)|$; also lassen alle diese Funktionen die Darstellung $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ durch beschränkte Funktionen zu Speziell gilt dies also auch für die beiden viel behandelten Funktionenklassen, welche den Werten $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ entsprechen.

Durch den soeben erklärten Zusammenhang zwischen den beschränkten Funktionen und allgemeineren Funktionenklassen lassen sich die erwähnten Sätze über beschränkte Funktionen, wie ich schon angedeutet habe, ohne Mühe, fast mechanisch auf alle diese Klassen übertragen. Einzelne der Sätze über die „logarithmische" Klasse wurden auch, unabhängig von der NEVANLINNAschen Arbeit und ungefähr zur selben Zeit, durch die Herren PLESSNER und OSTROWSKI entdeckt.[14])

Es fehlt mir die Zeit, um über alle Fragen zu berichten, die mit den subharmonischen Funktionen in Verbindung stehen. So überspringe ich die schöne Arbeit des Herrn PERRON über das DIRICHLETsche Problem,[15]) wie auch jene überraschende Verallgemeinerung der ersten Hälfte des HARDYschen Satzes, die Herr LITTLEWOOD vor einigen Monaten in den Records der London Mathematical Society mitteilte[16]) und für welche ich daselbst die

---

[14]) A. PLESSNER, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Dissertation, Giessen 1923.

A. OSTROWSKI, Über die Bedeutung der JENSENschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, *Acta universitatis Franc.-Jos.*, I (1922), p. 80–87.

[15]) O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, 18 (1923), p. 42—54. Vgl. auch R. REMAK, Über potentialkonvexe Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 20 (1924), p. 126–130; T. RADO u. F. RIESZ, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, 22 (1925), p, 41—44.

[16]) T. E. LITTLEWOOD, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), 22 (1923) (Records of Proc. at Meetings, November 8 th, 1923).

entsprechende Verallgemeinerung und einen ähnlich lautenden Beweis gab, wie früher für den HARDYschen Satz selbst.[17]) Durch die LITTLEWOODsche Entdeckung angeregt, suchte ich zugleich die entsprechende Verallgemeinerung für den zweiten Teil des HARDYschen Satzes aufzustellen, was mir nun vor einigen Wochen gelang. Der Satz, den ich fand, dürfte Sie interessieren, nicht nur weil er sehr einfach und allgemein ist, sondern auch weil er uns den Schlüssel zu dem Zusammenhange zwischen der allgemeinen subharmonischen Funktion und dem logarithmischen Potential in die Hand gibt.

Jener zweite Teil des HARDYschen Satzes resp. der entsprechende Satz über subharmonische Funktionen besagt, dass der auf konzentrischen Kreisen gebildete Mittelwert $I(r)$ der subharmonischen Funktion $u(x, y)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Diese Tatsache kann auch so formuliert werden. Für $r_1 < r_2 < r_3$ ist

$$\frac{I(r_2)-I(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} \leqq \frac{I(r_3)-I(r_1)}{\log r_3 - \log r_1} \leqq \frac{I(r_3)-I(r_2)}{\log r_3 - \log r_2}.$$

Die für die Verallgemeinerung ausschlaggebende Idee ist nun die, dass man diese Quotienten auf die folgende Weise deutet. Man bildet für die in Betracht kommenden Kreisringe die kleinsten harmonischen Majoranten U_{12}, U_{13}, U_{23}, d. i. man löst das DIRICHLETsche Problem mit den Randwerten von $u(x, y)$. Dann ist der betreffende Quotient gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{dU}{dn_a}\,ds,$$

erstreckt über eine beliebige geschlossene Kurve Γ, die den betreffenden Ring in 2 andere Ringe zerschneidet. Das Integral stellt bekanntlich den sogenannten *Durchfluss* der durch U definierten Strömung durch die Kurve Γ dar; da die Strömung stationär ist, so hängt der Integralwert bekanntlich von der Wahl von Γ nicht ab. Der Integralwert ist auch konformen Abbildungen gegenüber invariant; ferner übergehen harmonische und subharmonische Funktionen bei konformer Abbildung in ebensolche. Damit ist die gesuchte Verallgemeinerung, die ich jetzt aussprechen will, schon sehr naheliegend.

[17]) F. RIESZ, Sur une inégalité de M. LITTLEWOOD dans la théorie des fonctions, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 23 (1924) (Records of Proc. at Meetings, March 13 th, 1924).

Es sei die Funktion $u(x, y)$ in einem Gebiete G subharmonisch und es seien C_1 in C_2 in C_3 drei geschlossene Kurven in G, welche zu je zwei die drei im Gebiete G gelegenen Ringe 12, 13, 23 einschliessen. Man bilde für jeden dieser Ringe die entsprechende harmonische Funktion U_{ik} mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$; sind dann D_{12}, D_{13}, D_{23} die entsprechenden Durchflüsse:

$$D_{ik} = \int_\Gamma \frac{d\,U_{ik}}{d\,n_s}\,d\,s,$$

wo Γ immer den betreffenden Ring in zwei Ringe zerschneidet, so ist

$$D_{12} \leqq D_{13} \leqq D_{23}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass in dem Falle, wo die in einem Ringe harmonische Funktion auf der inneren oder auf der äusseren Randkurve verschwindet und auf der anderen Randkurve $\geqq 0$ ist, der Durchfluss $\geqq 0$ resp. $\leqq 0$ ist, eine Tatsache, die physikalisch evident ist und z. B. mittels konformer Abbildung auf einen Kreisring leicht bewiesen werden kann.

Nun weiter hinein in die Potentialtheorie! *Das logarithmische Potential einer beliebigen negativen Massenverteilung ist eine subharmonische Funktion,* eine Tatsache, auf welche ja schon die unter gewissen Stetigkeitsbedingungen bestehende Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta u = -2\pi\varrho$$

hinweist, die man aber auch leicht direkt beweist u. zw. nicht nur für den Fall einer Massenverteilung mit wohlbestimmter Dichte, sondern auch unter der allgemeineren Annahme, dass die Massenverteilung durch eine negative oder genauer nicht positive, sonst beliebige *additive Mengenfunktion* gegeben ist, die also sowohl den Fall isolierter Massenpunkte, wie auch die Linienpotentiale einschliesst. Das entsprechende Potential wird dann bekanntlich durch das im Stieltjesschen Sinne zu deutende Integral

$$\iint \log \frac{1}{r}\,d\,m$$

geliefert. Dass die so definierte Funktion subharmonisch ist, ergibt sich einfach daraus, dass das Integral durch Addition und durch Grenzübergang aus mit Ausnahme je einer Senke harmonischen, also aus subharmonischen Elementen aufgebaut wird. Auch die in der Definition geforderte Halbstetigkeit nach oben ergibt sich sofort; man hat dazu nur die Funktion $\log \frac{1}{r}$ zuerst in konstanter Höhe abzuschneiden; das so modifizierte Integral ergibt eine stetige Funktion; dann lässt man jene Höhe ins Unendliche wachsen, wodurch unsere stetige Funktionen abnehmend gegen das Potential $u(x, y)$ gehen, das somit stetig oder nach oben halbstetig sein muss. Wenn ich noch gestehe, dass mir gewissermassen eine Umkehrung der Beziehung zwischen Potential und subharmonischer Funktion vor den Augen schwebt und dass eine solche Umkehrung möglich ist, so ist dadurch auch die anfangs vielleicht etwas gekünstelte Forderung der Halbstetigkeit nach oben gerechtfertigt.

Wie soll man nun ans Werk gehen? Einige Anhaltspunkte liefern uns die bekannten Tatsachen über das logarithmische Potential. Hat man ein solches vor sich und will man es in seine Elemente zerlegen, d. h. will man die ursprüngliche Massenverteilung erforschen, so wird man zuerst die Poissonsche Differentialgleichung heranziehen; wenn dann die Massenverteilung eine sehr anständige war, so kann man die Dichte aus der Gleichung ablesen. Unter allgemeineren Bedingungen verzichtet man auf die Feinstruktur und begnügt sich zunächst damit, die additive Mengenfunktion, also die in den einzelnen Teilgebieten enthaltene Masse zu bestimmen. Das geschieht durch Heranziehung der mit Hilfe der Greenschen Formel integrierten Form der Poissonschen Gleichung:

$$\int_{C_1} \frac{d u}{d n_a} d s = -2 \pi \iint_{G_1} \varrho \, d \sigma,$$

wo die Integrale über das Teilgebiet G_1 resp. über dessen Rand C_1 erstreckt werden; auch kann man im rechtsstehenden Integral an Stelle von $\varrho \, d \sigma$ allgemeiner ein Massenelement $d m$ einsetzen, wo dann das Integral im Stieltjesschen Sinne zu deuten ist.

Hat man nun eine beliebige, in einem Gebiete G subharmonische Funktion $u(x, y)$ vor sich, von der man sonst noch garnichts weiss und will man entscheiden, ob sich diese Funktion als logarithmisches Potential deuten lässt, so wird man zuerst die entsprechende Massenverteilung zu bestimmen suchen. Das Vorangehende liegt es nahe, diese Massenverteilung durch die Formel

$$\text{Masse in } G_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_a}\,ds$$

zu definieren. Doch da stösst man an die Schwierigkeit, dass wir über die Differenzierbarkeit von $u(x, y)$ nichts vorausgesetzt haben. Also hat das rechtsstehende Integral für uns zunächst keinen Sinn. Man könnte es versuchen, nach Analogie der konvexen Funktionen, aus dem vorausgesetzten subharmonischen Verhalten auf gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften zu schliessen. Doch die Sache liegt hier viel tiefer, der gerade Weg erweist sich als schwerfällig und es lohnt sich, einen kleinen Umweg zu machen. Dabei stützen wir uns auf die letzte Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes. Wir umgeben C_1 mit einer naheliegenden Kurve C_2, bilden die im Ringe 1 2 harmonische Funktion U_{12} mit denselben Randwerten wie jene von $u(x, y)$ und den entsprechenden Durchfluss D_{12}, d. i. das Integral

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{dU_{12}}{dn_a}\,ds$$

längs einer beliebigen, den Ring in zwei weitere Ringe zerschneidenden Kurve Γ. Zieht man nun C_2 auf C_1 zusammen, so folgt aus jener Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes, dass D_{12} *monoton abnehmend gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert geht.* Ähnliches gilt für Ringe, die sich von Innen an C_1 anschliessen; hier geht der entsprechende Durchfluss wachsend gegen einen Grenzwert und man sieht auch sofort, dass dieser zweite Grenzwert $\leqq$ sein muss als der erste (die eventuelle Verschiedenkeit der beiden Grenzwerte darf uns nicht überraschen; man braucht ja nur auf das Potential einer auf C_1 verteilten einfachen Schicht zu denken). Man hat dann nur noch diesen Grenzwerten, die man vielleicht als *Fluss aus* C_1 *und Fluss nach* C_1 bezeichnen dürfte, jene Rolle spielen zu lassen, welche den Integralen

$$\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_a}\,ds,\quad -\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_i}\,ds$$

bei genügenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nach der klassischen Theorie zukäme. Man erhält so eine Massenverteilung, aus der dann die ursprüngliche Funktion $u(x, y)$, abgesehen immer von einer additiven harmonischen Funktion, als logarithmisches

Potential oder durch Heranziehung der GREENschen Funktion aufgebaut werden kann. Genauer gesagt: Jedes innere Teilgebiet G von G enthält eine endliche Masse und *das entsprechende logarithmische Potential ist daselbst* $= u(x, y) +$ *eine harmonische Funktion.* Dasselbe gilt natürlich auch für G selbst, wenn die entsprechende Masse endlich ist. Verwendet man an Stelle von $\log \frac{1}{r}$ die entsprechende klassische GREEN*sche Funktion des Gebietes* G, und ist $u(x, y) \leqq 0$ im Gebiete G, *so existiert das entsprechende Integral und ergibt wieder* $u(x, y) +$ *eine harmonische Funktion,* u. zw. unabhängig davon, ob die entsprechende Masse endlich oder unendlich ist.[18]) Die Voraussetzung $u(x, y) \leqq 0$ kann man evidentermassen durch jene ersetzen, dass es zu $u(x, y)$ eine harmonische Majorante $U(x, y)$ für das ganze Gebiet gebe; in dieser Form ist die Bedingung *nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.*

Hiemit hat man eine gewissermassen abschliessende Lösung des aufgeworfenen Umkehrproblems erhalten; man könnte noch höchstens den Schönheitsfehler der additiven harmonischen Funktion zu beseitigen suchen, indem man diese als Potential von Massen auf dem Rande oder ausserhalb G deutet.

Die Einzelheiten des Beweises, der übrigens nach dem Gesagten nur noch sehr wenig Mühe kostet, kann ich hier heute nicht mehr ausführen. Ich möchte noch sagen, dass man die letzten Resultate entsprechend auch auf den Raum resp. auf subharmonische Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen kann, obzwar hier das sehr brauchbare Weikzeug der konformen Abbildung versagt.

Schliesslich folgt aus diesen Resultaten durch Heranziehung der LEBESGUEschen Theorie sofort die Existenz der ersten Differentialquotienten einer beliebigen subharmonischen Funktion „fast überall", also mit eventueller Ausnahme einer Nullmenge. und dasselbe gilt auch für den Differentialoperator Δu, wenn man diesen entsprechend verallgemeinert deutet, wodurch man auch an die bekannten Untersuchungen von Herrn PETRINI Anschluss gewinnt.

---

18) Die hier ausschlaggebende Bemerkung, dass es bei Verwendung der GREENschen Funktion an Stelle des Logarithmus auf die Endlichkeit der Gesammtmasse nicht mehr ankommt, verdanke ich Herrn M. RIESZ.

Über den Begriff der Riemannschen Fläche.

Von Tibor Radó in Szeged.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Untersuchung, zu welcher ich beim Studium des grundlegenden Werkes des Herrn Weyl über *Die Idee der Riemannschen Fläche* geführt wurde. Bekanntlich wird in diesem Buche der Begriff der Riemannschen Fläche zum ersten Male in vollkommen strenger Weise erklärt, und zwar wie folgt. Eine Riemannsche Fläche ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welche trianguliert werden kann, und für welche eine konforme Abbildung im Kleinen mitgegeben ist. Wir werden diese Begriffe eingehend besprechen (§§ 1 und 4), müssen aber gleich an dieser Stelle die Forderung der *Triangulierbarkeit* doch etwas genauer betrachten, um unser Problem formulieren zu können.

Der Ausdruck *zweidimensionale Mannigfaltigkeit* wird nicht von allen Autoren in demselben Sinne gebraucht. Sie ist jedenfalls ein zusammenhängender topologischer Raum im Hausdorffschen Sinne, welcher im Kleinen der xy-Ebene homöomorph ist: aber es wird manchmal noch die Forderung an sie gestellt, sie soll dem zweiten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügen. Wollte man den Ausdruck zweidimensionale Mannigfaltigkeit bei der Erklärung der Riemannschen Fläche in diesem Sinne verstehen, so wäre die Forderung der Triangulierbarkeit überflüssig. Unter Voraussetzung dieses Abzählbarkeitsaxioms bietet nämlich die Triangulierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit keine prinzipielle, sondern nur technische Schwierigkeiten, und die explicite Forderung der Triangulierbarkeit würde einfach bedeuten dass man mit möglicherweise umständlichen, aber im Grunde ganz einfachen Betrachtungen keine Zeit verlieren will.

Herr Weyl setzt aber kein Abzählbarkeitsaxiom voraus und dadurch wird die Sachlage eine ganz andere, die Behauptung der Triangulierbarkeit wird zu einer wesentlichen Aussage. Da nämlich die Mannigfaltigkeit zusammenhängend sein soll, so ist die Menge der Dreiecke der Triangulierung sicher abzählbar, und daraus folgt sofort, dass das zweite Hausdorffsche Axiom erfüllt ist. Die Forderung der Triangulierbarkeit ist hiernach mit diesem Axiom gleichwertig; sie dient also dazu, der Mannigfaltigkeit *Abzählbarkeitseigenschaften* aufzuprägen, wie dies Herr Weyl selbst ausdrücklich hervorhebt.

Bei der Einführung dieser Forderung bemerkt Herr Weyl, dass dieselbe notwendig zu sein *scheint*, um über die zweidimensionale Mannigfaltigkeit wesentliche Sätze aufstellen zu können. Diese Bemerkung veranlasste die vorliegende Untersuchung. Ich erhielt das Resultat, dass *die Triangulierbarkeit eine Folge der Voraussetzung ist, dass für die Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen (siehe § 4) mitgegeben ist.* Eine wichtige Ergänzung dieses Resultates bildet die Tatsache, deren Kenntnis ich Herrn Prüfer verdanke, dass es zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, welche *nicht* trianguliert werden können. Mit der freundlichen Erlaubnis des genannten Herrn teile ich in § 2 sein hiefür konstruiertes Beispiel mit. Dasselbe ist in mehreren Beziehungen sehr lehrreich. Dieses Beispiel setzt zunächst den spezifisch funktionentheoretischen Karakter unseres Satzes von der Triangulierbarkeit der Riemannschen Fläche in Evidenz,[1]) beleuchtet aber gleichzeitig die wesentlichen Gründe dieses funktionentheoretischen Satzes. Die Konstruktion des Herrn Prüfer beruht nämlich auf der einfachen und doch merkwürdigen Tatsache, dass es möglich ist, die ganze endliche Ebene topologisch auf das Innere des Einheitskreises abzubilden. Könnte eine derartige Abbildung konform sein, so wäre es möglich, für die Prüfersche Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen (siehe § 4) zu erklären, und man würde eine nicht triangulierbare Riemannsche Fläche erhalten. Be-

---

[1]) Herr Prüfer wurde zur Konstruktion dieses Beispiels eben durch den Wunsch angeregt, diesen Punkt klarzustellen, und er teilte mir sein Beispiel bereits in Jänner 1923 mit. Durch eine briefliche Mitteilung des Herrn Tietze wurde ich auf ein anders geartetes Beispiel aufmerksam gemacht, welches seither auch durch Herrn Alexandroff gefunden und veröffentlicht wurde (*Math. Annalen* 92).

kanntlich ist aber die endliche Ebene dem Innern des Einheitskreises nicht aequivalent im Sinne konformer Abbildung; und analoge Abbildungssätze werden es sein, auf welche wir den Beweis unseres funktionentheoretischen Satzes gründen werden.

Da es sich um eine axiomatische Untersuchung handelt, so war es nötig, in die folgende Darstellung eine genaue Besprechung des Begriffes der RIEMANNschen Fläche mit aufzunehmen. Und zwar umsomehr, da doch jedermann bereits eine fertige *Idee der Riemannschen Fläche* besitzt, höchstwahrscheinlich die Idee einer der *konkreten* RIEMANNschen Flächen, welche in der funktionentheoretischen Praxis gehandhabt werden. Diese sind natürlich Spezialfälle der allgemeinen RIEMANNschen Fläche, die wir betrachten werden, aber solche Spezialfälle, für welche unser Satz von der Triangulierbarkeit trivial wird. Immerhin sind diese Spezialfälle lehrreich, indem sie zeigen, dass beim Nachweis ihrer Triangulierbarkeit immer *die spezielle aritmetische Beschaffenheit* ihrer Punkte zur Verwendung kommt; im Falle des analytischen Gebildes hat man beispielsweise vom bekannten Satze Gebrauch zu machen, dass bei der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe nur abzählbar viele Potenzreihen mit vorgegebenem Mittelpunkte erhalten werden können. Demgegenüber werden wir uns bei der folgenden Untersuchung auf die besondere arithmetische Erklärung der Punkte unserer Fläche nicht berufen können, da eine derartige Erklärung in einer axiomatischen Definition der RIEMANNschen Fläche überhaupt nicht auftreten kann.

Die Arbeit gliedert sich folgendermassen. In § 1 wird die zweidimensionale Mannigfaltigkeit erklärt. Der § 2 bringt das PRÜFERsche Beispiel einer nicht triangulierbaren zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, und in § 3 wird der Hilfssatz bewiesen, dass die Triangulierbarkeit eine Folge des zweiten HAUSDORFFschen Axioms ist, womit das Topologische erledigt ist. In § 4 wird die RIEMANNsche Fläche erklärt und der Satz bewiesen, dass sie immer triangulierbar ist.

Es sei noch erwähnt, dass ich den Hauptsatz dieser Arbeit mit Andeutung des Beweisganges in Bd. 90 der Mathematischen Annalen mitgeteilt habe, in meiner Note: *Bemerkung zur Arbeit des Herrn Bieberbach* etc.

§ 1.

Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit.[2])

Herr WEYL führt die RIEMANNsche Fläche nicht genetisch, sondern axiomatisch ein; bei ihm wird dieselbe nicht etwa *hergestellt* aus aufgeschnittenen und kreuzweise zusammengehefteten ebenen Blättern, sondern sie wird *erklärt* durch eine Reihe von Eigenschaften, wobei die aritmetische Erklärung der Punkte gar nicht in Betracht kommt. Durch die geforderten Eigenschaften wird die RIEMANNsche Fläche zunächst als *topologischer Raum* gekennzeichnet. Dieser wird erklärt als der Inbegriff einer Menge von irgendwelchen Dingen, die als Punkte des Raumes gelten werden, und einer Vorschrift, durch welche jedem Punkte gewisse Punktmengen als *Umgebungen* zugeordnet werden, wobei die folgenden Umgebungsaxiome erfüllt sein müssen:

A) Zu jedem Punkte P gehört wenigstens eine Umgebung $U(P)$; jede Umgebung von P enthält den Punkt P.

B) Sind $U_1(P)$, $U_2(P)$ Umgebungen desselben Punktes P, so hat P eine Umgebung, welche Teilmenge von beiden ist.

C) Liegt der Punkt Q in einer Umgebung $U(P)$ von P, so hat Q eine Umgebung $U(Q)$, die Teilmenge von $U(P)$ ist.

D) Sind P und Q verschiedene Punkte, so haben sie solche Umgebungen $U(P)$, $U(Q)$, die keinen Punkt gemein haben.

Ist dann $\mathbf{M}$ eine Punktmenge im topologischen Raume $\mathbf{R}$, so heisst ein Punkt P innerer Punkt von $\mathbf{M}$, wenn es eine Umgebung von P gibt, die Teilmenge von $\mathbf{M}$ ist. Eine Menge heisst offen, wenn alle ihre Punkte innere Punkte sind. Randpunkt einer offenen Menge ist ein Punkt, falls er nicht in der Menge enthalten ist, aber in jeder Umgebung desselben Punkte der Menge liegen. In analoger Weise lassen sich weitere Begriffe aus der Theorie der ebenen Punktmengen übertragen. Wir wollen hier ausführlicher noch die topologischen Abbildungen und den Begriff der gleichwertigen Umgebungssysteme besprechen

Sind $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ zwei topologische Räume, und ist zwischen ihren Punkten eine umkehrbar eindeutige Beziehung erklärt, so heisst

---

[2]) Eine ausführliche systematische Darstellung der in diesem Abschnitte besprochenen Begriffsbildungen findet sich bei HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Kapitel 7 und 8.

diese eine topologische Abbildung, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Sind P_1 und P_2 entsprechende Punkte, $U(P_1)$ und $U(P_2)$ irgendwelche Umgebungen derselben, so gibt es eine Umgebung von P_1, deren Bildmenge Teilmenge von $U(P_2)$, und eine Umgebung von P_2, deren Bildmenge Teilmenge von $U(P_1)$ ist. Es folgt dann sofort, dass eine umkehrbar eindeutige Beziehung zweier Räume dann und nur dann eine topologische Abbildung ist, wenn die Bildmenge jeder offenen Menge wieder offen ist.

Wird für die Menge, deren Elemente die Punkte des topologischen Raumes $\mathbf{R}$ darstellen, eine andere Vorschrift für die Umgebungen gegeben, so entsteht ein neuer topologischer Raum $\overline{\mathbf{R}}$. Es steht uns vollkommen frei, die Fälle zu bestimmen, in welchen $\mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R}}$ identisch heissen sollen, durch die Anwendungen der Theorie wird indessen die folgende Festsetzung aufgenötigt. Für die beiden Räume $\mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R}}$ ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung unmittelbar gegeben, nämlich die identische Abbildung, bei welcher jeder Punkt sein eigener Bildpunkt ist. Dann und nur dann, wenn diese identische Abbildung eine topologische Abbildung ist, soll $\mathbf{R} \equiv \overline{\mathbf{R}}$ gesetzt werden. Dann und nur dann also, wenn jede Punktmenge, welche im einen dieser Räume offen ist, auch im anderen offen ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so heissen die beiden Umgebungssysteme *gleichwertig*. Ist $\mathbf{R}$ gegeben, so verstehen wir in der Folge unter einem *Umgebungssystem* schlechthin stets ein solches, welches dem bei der Erklärung von $\mathbf{R}$ ursprünglich verwendeten Systeme gleichwertig ist.

Ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, wenn es nicht möglich ist, denselben in zwei offene punktfremde Teilmengen zu zerlegen. In positiver Fassung bedeutet dies, dass jede offene Punktmenge, welche nicht alle Punkte des Raumes enthält, wenigstens einen Randpunkt hat. Die Eigenschaft eines Raumes, zusammenhängend zu sein, bleibt offenbar bei topologischen Abbildungen erhalten. Die Definition überträgt sich sofort auf offene Punktmengen, und führt zum Begriffe des Gebietes: eine offene Punktmenge heisst Gebiet, wenn sie zusammenhängend ist. Man sieht sofort: ist irgend eine Menge von Gebieten gegeben, welche alle einen gewissen Punkt P enthalten, so ist ihre Vereinigungsmenge wieder ein Gebiet. Mit Rücksicht auf spätere Anwendung soll noch eine einfache Tatsache als besonderer Hilfssatz angeführt werden.

Hilfssatz 1. Sei irgend eine Menge $\{G\}$ von Gebieten gegeben, welche den zusammenhängenden Raum **R** vollständig überdecken. Sind dann P und Q irgend zwei Punkte, so kann man unter den Gebieten von $\{G\}$ endlich viele herausgreifen, welche eine von P nach Q führende *Kette* bilden.

Darunter ist folgendes zu verstehen. Es gibt unter den Gebieten von $\{G\}$ endlich viele: $G_1, G_2, \ldots, G_n$, so dass je zwei aufeinander folgende Gebiete innere Punkte gemein haben, und P in G_1, Q in G_n liegt. Sei nun, bei festem P, **M** die Menge der Punkte Q, für welche die Behauptung richtig ist. Da **M** jedes Gebiet von $\{G\}$ vollständig enthält, von welchem auch nur ein einziger Punkt ihr angehört, so folgt, dass **M** eine nicht leere, offene Punktmenge ist, welche keinen Randpunkt haben kann. Da der betrachtete Raum zusammenhängend sein soll, so ist hiernach **M** mit dem ganzen Raume identisch, w. z. b. w.

Die xy-Ebene fällt unter den allgemeinen Begriff des topologischen Raumes. Als Umgebung eines Punktes kann man z. B. das Innere eines jeden Kreises erklären, welcher den Punkt im Innern enthält, und kommt auf diese Weise auf die geläufige Theorie der ebenen Punktmengen. Ist nun G ein Gebiet eines topologischen Raumes, und ist es möglich, G topologisch auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, so möge G ein *zweidimensionales Elementargebiet* heissen.

Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit wird nun erklärt als ein zusammenhängender topologischer Raum, für welchen es ein Umgebungssystem gibt, dessen Umgebungen zweidimensionale Elementargebiete sind. Dieselbe besitzt hiernach alle die Eigenschaften, die sich der Anschauung bei der Betrachtung einer unberandeten stetigen Fläche unmittelbar darbieten, und kann im Kleinen tatsächlich als solche behandelt werden. Hingegen können wir keine Betrachtungen anstellen, welche topologische Eigenschaften im Grossen betreffen, und zwar aus einem, wie es zunächst scheint, äusseren Grunde. Die Eigenschaften einer Fläche im Grossen werden nämlich in der naiven Topologie durch räumliche Betrachtungen hergeleitet, in der wissenschaftlichen Topologie durch kombinatorische Überlegungen, welche an die Triangulierung der Fläche anknüpfen. Unsere zweidimensionale Mannigfaltigkeit liegt aber nicht im anschaulichen Raume, sie ist auch nicht trianguliert. Wir wollen uns zunächst überzeugen, dass die hiermit bezeichnete Schwierigkeit eine wesentliche ist.

§ 2.

Das Prüfersche Beispiel.

Sobald es gelingt, eine vorgelegte zweidimensionale Mannigfaltigkeit zu triangulieren, so können auf dieselbe alle die Schlüsse der Flächentopologie angewendet werden. Die Forderung der Triangulierbarkeit stellt indessen eine wesentliche Einschränkung dar, wie wir es an einem ganz elementaren Beispiele zeigen wollen.

Ist eine Triangulierung irgendwie hergestellt, so ergibt sich sogleich, dass die Menge der verwendeten Dreiecke abzählbar ist. Und da jedes Dreieck einer abgeschlossenen Kreisscheibe der xy-Ebene topologisch aequivalent sein soll, so wird die Mannigfaltigkeit eine Reihe von Abzählbarkeitseigenschaften im Grossen besitzen, wie solche für die xy-Ebene aus der unmittelbaren Beziehung zum komplexen Zahlensystem erschlossen werden. Wir wollen hier nur diejenige Eigenschaft anführen, welche wir unmittelbar benötigen werden, dass nämlich jede nicht abzählbare Punktmenge wenigstens eine Häufungsstelle hat. Dies folgt aus der Bemerkung, dass unter den abzählbar vielen Dreiecken der Triangulierung wenigstens eines unendlich viele Punkte der Menge enthalten muss; im Innern oder am Rande eines solchen Dreiecks liegt dann sicher ein Häufungspunkt. Wir werden nun eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit angeben, welche bereits diese Abzählbarkeitseigenschaft nicht besitzt, also sicher nicht trianguliert werden kann. Um den elementaren Karakter der Konstruktion klar hervortreten zu lassen, werden wir die Überlegung des Herrn Prüfer aritmetisch einkleiden.

Die Punkte der zu erklärenden Mannigfaltigkeit **R** werden Symbole zweierlei Art sein. Zunächst nehmen wir Symbole (x, y, a), wobei x, y und a die erste, zweite und dritte Koordinate des Punktes heissen sollen. Diese können alle reelle Werte annehmen, welche den Ungleichungen

$$y > 0, (x-a)^2 + y^2 \leqq 1$$

genügen. Weiter betrachten wir Symbole, bei welchen die dritte Koordinate die imaginäre Einheit i ist, während die beiden ersten Koordinaten wieder beliebige reelle Werte sein können, nur für die zweite Koordinate y muss die Ungleichung $y > 0$ erfüllt sein

Der Bequemlichkeit halber sollen die Punkte mit der dritten Koordinate i *imaginäre*, alle übrigen *reelle* Punkte heissen.

Wir erklären nun für jede reelle Zahl a eine Menge $B(a)$, welche alle Punkte enthält, deren dritte Koordinate a oder i ist. Ein imaginärer Punkt ist hiernach in allen Mengen $B(a)$ enthalten, ein reeller Punkt aber nur in einer einzigen. Für jede Menge $B(a)$ erklären wir eine Abbildung $T(a)$, welche den Punkten von $B(a)$ in ein-eindeutiger Weise die Punkte der Euklidischen oberen Halbebene entsprechen lässt, also die Punkte (x, y) mit $y > 0$. Diese Abbildung erhalten wir wie folgt. Die reellen Punkte von $B(a)$ haben alle die gleiche dritte Koordinate a; einem solchen Punkte (x, y, a) ordnen wir einfach den Punkt (x, y) zu Ausserdem enthält $B(a)$ alle imaginäre Punkte; ist (x, y, i) ein solcher, so führe man die folgende Konstruktion aus: Sei A der Punkt $(a, 0)$, P der Punkt (x, y); auf dem Halbstrahle von A nach P bestimme man den Punkt P' so, dass $\overline{AP'} = \overline{AP} + 1$ sei. Dieser Punkt P ist dann der Bildpunkt von (x, y, i) bei der Abbildung $T(a)$. Den reellen Punkten von $B(a)$ entsprechen hiernach in ein-eindeutiger Weise diejenigen Punkte (x, y), für welche $y > 0, (x-a)^2 + y^2 \leq 1$ ist, während den imaginären Punkten die Punkte (x, y) mit $y > 0, (x-a)^2 + y^2 > 1$ zugeordnet werden.

Eine Teilmenge **M** heisse *einfach*, wenn es eine Menge $B(a)$ gibt, in welcher sie enthalten ist. Gibt es zwei verschiedene Mengen $B, B(a_1)$ und $B(a_2)$, welche **M** enthalten, so kann **M** nur aus imaginären Punkten bestehen. Seien $\mathbf{M}_1'$ und $\mathbf{M}_2'$ die Bildmengen von **M** bei den Abbildungen $T(a_1)$ und $T(a_2)$. Aus der Konstruktion dieser Mengen erhellt dann sofort, dass sie ein-eindeutig und stetig einander entsprechen, wenn also die eine ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, so ist es auch die andere. Wir dürfen hiernach erklären:

Ein *einfaches Elementargebiet* ist eine Punktmenge, welche ganz in einer Menge $B(a)$ liegt und bei der Abbildung $T(a)$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene übergeht.

Dabei ist also, im Falle mehrere Mengen $B(a)$ verwendet werden können, gleichgültig, welche man benutzt. Solche einfache Elementargebiete sind beispielsweise:

1. Die Menge aller imaginärer Punkte.

2. Jede Menge $B(a)$.

3 Jede Menge $B^*(a)$, enthaltend alle reelle Punkte mit der dritten Koordinate a, für welche $(x-a)^2+y^2<1$ ist.

4. Sei ϱ eine reelle positive Zahl, und man betrachte die Menge derjenigen Punkte von $B(a)$, deren Bildpunkte bei der Abbildung $T(a)$ das Gebiet $y>0$, $(x-a)^2+y^2<(1+\varrho)^2$ ausfüllen. Diese Menge, die wir mit $B_\varrho(a)$ bezeichnen, ist ebenfalls ein einfaches Elementargebiet. Dasselbe enthält alle reelle Punkte von $B(a)$, einen imaginären Punkt (x, y, i) aber dann und nur dann, wenn $(x-a)^2+y^2<\varrho^2$ ist.

Nunmehr können wir Umgebungen erklären, und zwar sollen als Umgebungen eines Punktes alle einfache Elementargebiete gelten, welche den betreffenden Punkt enthalten. Es ergibt sich dann leicht, dass unter Zugrundelegung dieser Vorschrift den in § 1 erklärten Umgebungsaxiomen *A)* bis *D)* genügt wird. Für *A)* und *C)* ist dies evident. Um *B)* zu zeigen, sei P ein Punkt und U_1, U_2 zwei Umgebungen desselben. Nun ist U_1 ganz in einer Menge $B(a_1)$, U_2 in einer Menge $B(a_2)$ enthalten. Ist $a_1=a_2$, so ist alles klar. Ist aber $a_1 \neq a_2$, so ist P notwendig ein imaginärer Punkt, da er in zwei verschiedenen Mengen B enthalten ist. Dann genügt zu bemerken, dass in jeder Umgebung eines imaginären Punktes solche Umgebungen desselben enthalten sind, welche nur aus imaginären Punkten bestehen. Um *D)* zu verifizieren, seien P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte. Sind sie erstens beide reell und haben sie verschiedene dritte Koordinaten a_1 und a_2, so wähle man $\varrho=\frac{|a_1-a_2|}{4}$, und betrachte die oben unter 4. erklärten Mengen $B_\varrho(a_1)$ und $B_\varrho(a_2)$. Dann ist die erste eine Umgebung für P_1, die zweite eine Umgebung für P_2, und die Annahme, dass diese Umgebungen einen Punkt Q gemein haben, führt sofort zu einem Widerspruche. In der Tat, Q müsste dann ein imaginärer Punkt (x, y, i) sein, und es müssten die Ungleichungen

$$(x-a_1)^2+y^2<\varrho^2$$
$$(x-a_2)^2+y^2<\varrho^2$$

gleichzeitig erfüllt sein, was aber infolge der Wahl von ϱ unmöglich ist. Ist zweitens für die Punkte P_1 und P_2 die erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, so gibt es wenigstens eine Menge $B(a)$, welche beide Punkte enthält, und dann ist alles klar.

Ist **M** eine einfache Menge, so folgt aus der getroffenen Umgebungserklärung sofort, dass dieselbe dann und nur dann offen ist, wenn ihre Bildmenge durch die entsprechende Abbildung $T(a)$ offen ist. Die $T(a)$ sind also topologische Abbildungen, und daraus ergibt sich weiter, dass die Mengen $B(a)$ Gebiete sind. Da diese Gebiete $B(a)$ zusammen alle Punkte von **R** enthalten, und da es Punkte gibt, nämlich alle imaginäre Punkte, welche in allen diesen Gebieten enthalten sind, so ist **R** zusammenhängend, also eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten nun etwa die Punktmenge $(^1/_2, {}^1/_2, a)$, wo a alle reelle Werte annimmt. *Diese Punktmenge ist nicht abzählbar und hat doch keine Häufungsstelle.* Denn jedes Gebiet $B(a)$ enthält von dieser Menge einen einzigen Punkt, mithin keinen Häufungspunkt derselben, während doch ein etwa vorhandener Häufungspunkt in wenigstens einem dieser Gebiete enthalten sein müsste, da sie die Mannigfaltigkeit vollständig überdecken. Damit ist erwiesen, dass die Prüfersche Mannigfaltigkeit nicht trianguliert werden kann.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Tiangulierung.

Es soll nun gezeigt werden, dass jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die sich, anschaulich gesprochen, nicht ins Unabzählbare erstreckt, trianguliert werden kann: wir werden dartun, dass eine Triangulierung möglich ist, sobald das zweite Hausdorffsche Axiom erfüllt ist. Dieses verlangt die Existenz eines abzählbaren Umgebungssystems, und kann im vorliegenden Falle in der folgenden, etwas bequemeren Form ausgesprochen werden:

Abzählbarkeitsaxiom: Es existiert eine Folge, d. h. eine abzählbare Menge, von Elementargebieten, welche die zweidimensionale Mannigfaltigkeit vollständig überdecken.

Im Falle der xy-Ebene bilden z. B. die Kreise mit rationalem Halbmesser und rationalem Mittelpunkte eine derartige Folge. Überhaupt ist für die Flächen, welche in der Topologie und Funktionentheorie betrachtet werden, das Axiom erfüllt, hingegen braucht es für eine allgemeine zweidimensionale Mannigfaltigkei nicht erfüllt zu sein, wie dies aus dem Prüferschen Beispiel hervorgeht. Die Tatsache, dass die Triangulierbarkeit eine Folge dieses Axioms ist, ist allgemein bekannt, wurde aber nur für besondere

Fälle bewiesen.[3]) Wir führen den Beweis ganz allgemein, wollen aber gleich bemerken, dass für unsere Zwecke dieser Hilfssatz ganz überflüssig wäre, wenn wir uns auf einen topologisch vollständig durchgearbeiteten, *mit Kreisscheiben operierenden* Beweis des Grenzkreistheorems berufen könnten.

Hilfssatz 2. *Ist* **R** *eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche das Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, so kann dieselbe trianguliert werden.*

Es sei uns gestattet, wegen der genauen Definition der Triangulierung den Leser auf das Weylsche Buch zu verweisen und sofort mit dem Beweise von Hilfssatz 2 zu beginnen. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von Elementargebieten, welche die Mannigfaltigkeit vollständig überdecken. Wir bezeichnen eine Punktmenge, welche ganz in einem gewissen Elementargebiete E enthalten ist und bei der topologischen Abbildung von E auf das Innere des Einheitskreises als eine geschlossene Jordankurve nebst Innengebiet erscheint, als einen Jordanschen Bereich. Dann können wir zunächst behaupten, dass die Mannigfaltigkeit auch durch eine Folge von Jordanschen Bereichen überdeckt werden kann, und zwar so, dass jeder Punkt in wenigstens einem Bereiche als innerer Punkt auftritt. In der Tat, für ein einzelnes Elementargebiet E_n folgt dies aus der Tatsache, dass das Innere des Einheitskreises durch abzählbar viele Kreisscheiben überdeckt werden kann. Nachdem wir für jedes E_n eine dasselbe überdeckende Folge von Jordanschen Bereichen hergestellt haben, erhalten wir durch Vereinigung dieser abzählbar vielen Folgen eine Folge, durch welche nunmehr die ganze Mannigfaltigkeit überdeckt wird. Wir behaupten nun das folgende

Lemma. Es existiert auch eine die ganze Mannigfaltigkeit überdeckende Folge von Jordanschen Bereichen, bei welcher die Randkurven von zwei verschiedenen Bereichen höchstens endlich viele Punkte gemein haben.

Wir wollen sofort angeben, wie man unter Zugrundelegung einer derartigen Folge eine Triangulierung herstellen kann. Zunächst konstruieren wir eine Polygonteilung der Mannigfaltigkeit. Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ die Bereiche der Folge. Als Polygon $\pi^{(1)}$ erklären wir B_1 selbst. Der Voraussetzung zufolge wird B_2 durch die Rand-

[3]) Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, S. 32. — H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Annalen* 91, S. 137—139.

kurve von B_1 in endlich viele, endlich vielfach zusammenhängende, Polygone zerlegt; diejenigen dieser Polygone, welche ins Innere von B_1 nicht eindringen, bezeichnen wir mit $\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{i_2}^{(2)}$. Allgemein wird B_n durch die Randkurven von $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ in endlich viele, endlich vielfach zusammenhängende, Polygone zerlegt, von welchen wir nur diejenige beibehalten, welche *nicht* ins Innere von $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ eindringen; es seien $\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_{i_n}^{(n)}$ diese Polygone. Dann haben keine zwei der schrittweise erklärten Polygone π innere Punkte gemein, jeder Punkt ist in wenigstens einem derselben als innerer oder Randpunkt enthalten, und schliesslich gibt es zu jedem Punkte eine Umgebung, in welche nur endlich viele Polygone eindringen. Es wird wohl genügen, die dritte Behauptung genauer zu betrachten. Sei also P der fragliche Punkt; in der Folge $B_1, B_2, \ldots$ gibt es dann einen Bereich B_m, welcher P im Innern enthält, es kommen also nur Polygone mit einem oberen Zeiger $\leq m$ in Betracht, denn die übrigen können nach ihrer Erklärung ins Innere von B_m nicht eindringen. Es gibt aber nur endlich viele Polygone mit oberem Zeiger $\leq m$, womit die Behauptung erwiesen ist. Durch geeignete Unterteilung erhalten wir nunmehr aus dieser Polygonteilung ohne Schwierigkeit eine Triangulierung.

Wir müssen nunmehr das Lemma begründen.[4]) Zu dem Ende gehen wir von irgendeiner Folge $B_1, B_2, \ldots$ aus, welche die Mannigfaltigkeit vollständig überdeckt. Ist B_n^* ein Jordanscher Bereich, welcher B_n enthält, so wird die Folge $B_1^*, B_2^*, \ldots$ die Mannigfaltigkeit *a fortiori* vollständig überdecken. Wir werden die Bereiche B_n^* so zu bestimmen suchen, dass die Folge dieser Bereiche ausserdem der im Lemma ausgesprochenen Bedingung genügt.

Als B_1^* können wir B_1 selbst wählen. Wir wollen gleich annehmen, es seien bereits $B_1^*, B_2^* \ldots, B_{n-1}^*$ so bestimmt, dass B_1 in $B_1^*, \ldots, B_{n-1}$ in B_{n-1}^* enthalten ist und dass die Randkurven dieser $n-1$ Bereiche paarweise höchstens endlich viele Punkte gemein haben. Es muss nun B_n^* so gewählt werden, dass diese Aussagen für die n Bereiche $B_1^*, B_2^*, \ldots, B_n^*$ gültig bleiben. Um die

[4]) Für RIEMANNsche Flächen ist das Lemma selbstverständlich. Auf einer solchen kann man nämlich *analytische* Kurven erklären, wobei der Satz bestehen bleibt, dass zwei verschiedene einfache geschlossene analytische Kurven höchstens endlich viele Schnittpunkte haben. Da aber sich die rein topologische Durchführung über Erwarten elementar erwies, so ziehe ich vor, dieselbe mitzuteilen.

folgenden Überlegungen möglichst übersichtlich zu gestalten, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Einen Punkt, welcher für mehr als einen der Bereiche $B_1^*, \ldots, B_{n-1}^*$ Randpunkt ist, nennen wir einen Kreuzungspunkt. Mit $\mathbf{M}_{n-1}$ bezeichnen wir die Menge der Randpunkte dieser $n-1$ Bereiche. Sind schliesslich P und Q irgend zwei Punkte, so soll jeder einfache Jordanbogen, welcher P und Q verbindet und mit $\mathbf{M}_{n-1}$ höchstens endlich viele Punkte gemein hat, als ein *erlaubter Weg* bezeichnet werden. Dann gelten zunächst die folgenden Tatsachen:

a) Sind $P_0, P_1, \ldots, P_k$ gegebene Punkte und $l_1, l_2, \ldots, l_k$ erlaubte Wege, wobei l_1 die Punkte P_0 und $P_1, \ldots, l_k$ die Punkte P_{k-1} und P_k verbindet, so gibt es einen erlaubten Weg l, welcher P_0 und P_k verbindet und nur aus solchen Punkten besteht, welche wenigstens einem der Bögen $l_1, l_2, \ldots, l_k$ angehören.

b) Ist P ein Punkt von $\mathbf{M}_{n-1}$, wobei P kein Kreuzungspunkt sein möge, so ist im Punkte P die Punktmenge $\mathbf{M}_{n-1}$ *unbewallt* im folgenden Sinne: ist U eine beliebige Umgebung von P, so gibt es eine weitere Umgebung V von P, so dass irgend zwei Punkte Q_1, Q_2 von V durch einen ganz in U verlaufenden erlaubten Weg verbunden werden können.

c) Ist G ein Gebiet, welches keinen Kreuzungspunkt enthält, so können irgend zwei Punkte von G durch einen ganz in G verlaufenden erlaubten Weg verbunden werden.

Die Behauptung *b)* ist eine unmittelbare Folge der *Unbewalltheit der Jordankurve.* Zu *a)* bemerke man, dass es genügt, den Fall $k=2$ zu betrachten. Sei Q der Punkt, in welchem beim Durchlaufen von l_1 in der Richtung von P_0 nach P_1 der Bogen l_2 zum ersten Male getroffen wird. Dann bilden der Teilbogen P_0Q von l_1 und der Teilbogen QP_2 von l_2 einen Weg mit den verlangten Eigenschaften. Endlich ist *c)* eine unmittelbare Folge aus *a)* und *b)*. Man sieht nämlich, dass nach *b)* zu jedem Punkte P von G insbesondere eine Umgebung gehört, so dass jeder Punkt dieser Umgebung mit P durch einen erlaubten Weg innerhalb G verbunden werden kann. Nach Hilfssatz 1, § 1 können dann irgend zwei Punkte von G durch eine endliche Kette derartiger Umgebungen verbunden werden, und dann folgt *c)* aus *a)*.

Nachdem dies alles festgestellt ist, kehren wir zu unserer Aufgabe, zur Bestimmung des Bereiches B_n^*, zurück. Sei E_n ein Elementargebiet, welches den Bereich B_n im Innern enthält. Wir bilden E_n topologisch auf das Innere des Einheitskreises ab, wobei der Rand von B_n als eine einfache geschlossene JORDANkurve C'_n erscheint. Da es nur endlich viele Kreuzungspunkte gibt, so können wir im Einheitskreise einen konzentrischen Kreis K derart annehmen, dass C'_n innerhalb K liegt, und dass der Kreisring zwischen K und dem Einheitskreise das Bild eines Gebietes G sei, welches keinen Kreuzungspunkt enthält. Unsere Aufgabe wird dann gelöst sein, wenn es uns gelingt, in diesem Kreisringe eine einfache geschlossene JORDANkurve anzugeben, welche K im Innern enthält und mit einer gewissen nirgends dichten, unbewallten Punktmenge, welche das Bild einer gewissen Teilmenge von $\mathbf{M}_{n-1}$ ist, höchstens endlich viele Punkte gemein hat. Dies bietet nunmehr keine Schwierigkeit. Da die erwähnte Punktmenge nirgends dicht ist, so können wir im Kreisringe zwei Punkte P, Q so annehmen, dass es je eine Umgebung derselben gibt, die frei von dieser Punktmenge sind, und dass ausserdem die beiden durch diese Punkte gehenden Radien verschieden sind. Diese Radien zerlegen den Kreisring in zwei viereckige Gebiete D_1 und D_2. Wir können dann in D_1 zwei Punkte P_1, Q_1 so annehmen, dass die Strecken PP_1, QQ_1 erlaubte Wege sind. Auf Grund von *c)* können wir weiter P_1 und Q_1 innerhalb D_1 durch einen erlaubten Weg l_1 verbinden, und nach *a)* können wir dann aus den Strecken PP_1, QQ_1 und aus l_1 einen erlaubten Weg $\bar{l}_1$ von P nach Q zusammensetzen, welcher von den Punkten P und Q selbst abgesehen ganz in D_1 enthalten ist. Ebenso erhalten wir einen erlaubten Weg $\bar{l}_2$, welcher P und Q innerhalb D_2 verbindet. Die Bögen $\bar{l}_1$ und $\bar{l}_2$ bilden dann zusammen eine JORDANkurve, welche unsere Aufgabe löst.

Damit ist erwiesen, dass die Bereiche B^*_n schrittweise so bestimmt werden können, dass eine durch das Lemma geforderte Folge zustande kommt, und der Beweis von Hilfssatz 2 ist beendigt.

§ 4.

Beweis des Satzes von der Triangulierbarkeit der Riemannschen Fläche.

Wir haben nun die RIEMANNsche Fläche zu erklären. Indem wir aus Zweckmässigkeitsgründen die von Herrn WEYL entwickelte funktionentheoretische Fassung durch eine rein geometrische ersetzen, führen wir zunächst den *Begriff der konformen Abbildung im Kleinen* ein. Sei **R** eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, $\{U\}$ ein *bestimmtes* Umgebungssystem, wobei jede Umgebung des Systems Elementargebiet sein soll. Für jede Umgebung des Systems sei ferner eine *bestimmte* topologische Abbildung $T[U]$ auf das Innere des Einheitskreises mitgegeben. Diese Abbildungen sollen im folgenden Verhältnis zueinander stehen.

Bedingung der Konformität. Ist G ein Gebiet, welches gleichzeitig in den Umgebungen U_1 und U_2 enthalten ist und sind G'_1, G'_2 die Bildgebiete von G bei den Abbildungen $T[U_1], T[U_2]$, so ist $T[U_1]^{-1}\, T[U_2]$ eine im üblichen Sinne direkt, d. h. ohne Umlegung der Winkel, konforme Abbildung von G'_1 auf G'_2.

Ist die Bedingung der Konformität erfüllt, so wollen wir sagen, das System $\{U\}$ und die mitgegebenen Abbildungen $T[U]$ bestimmen eine *konforme Abbildung im Kleinen* der Mannigfaltigkeit. Wie man sieht, sind die Abbildungen $T[U]$ nicht unabhängig voneinander, andererseits sind sie durch die Mannigfaltigkeit offenbar nicht eindeutig bestimmt. Eine unmittelbar sich darbietende Fragestellung ist die, ob es denn möglich sei, für jede beliebige zweidimensionale Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen zu erklären. Aus unseren Entwicklungen wird gerade hervorgehen, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, weil nämlich aus der Annahme dieser Möglichkeit auf die Triangulierbarkeit der Mannigfaltigkeit geschlossen werden kann.

Die Definition, die wir nunmehr für die Riemannsche Fläche geben werden, weicht von der Weylschen zunächst in ihrer geometrischen Fassung ab, was unwesentlich ist. Der wesentliche Unterschied wird aber darin bestehen, dass wir in die Definition keine Abzählbarkeitseigenschaft aufnehmen.

Erklärung der Riemannschen Fläche Eine Riemannsche Fläche ist der Inbegriff einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit und einer *bestimmten* konformen Abbildung im Kleinen derselben.

Zur Erläuterung mögen hier einige weitere Begriffsbildungen angeführt werden. Wenn für eine Mannigfaltigkeit **R** auf zwei verschiedene Arten konforme Abbildungen im Kleinen erklärt sind, so entstehen zwei kollokale Riemannsche Flächen, und es handelt sich dann darum, ein Kriterium für die Identität derselben anzugeben. Zu dem Ende vereinigen wir die beiden verwendeten Umgebungssysteme; wir erhalten dann wieder ein Umgebungssystem, und wenn für dieses unter Beibehaltung der ursprünglich mitgegebenen Abbildungen die Bedingung der Konformität erfüllt ist, dann und nur dann sollen die beiden RIEMANNschen Flächen als identisch gelten. Sind weiter **R** und **R**$'$ zwei RIEMANNsche Flächen und ist Σ eine topologische Abbildung **R** $\rightarrow$ **R**$'$, so muss bestimmt werden, unter welchen Umständen diese Abbildung konform heissen soll. Wenn $\{U\}$ das bei der Bestimmung von **R** verwendete Umgebungssystem bezeichnet, so entspricht demselben vermöge Σ ein Umgebungssystem $\{U\}$ auf **R**$'$, und indem wir jeder solchen Umgebung U' die Abbildung $\Sigma^{-1}T[U]$ zuordnen, erhalten wir eine konforme Abbildung im Kleinen für **R**$'$. Es entsteht auf diese Weise eine neue, mit **R**$'$ kollokale RIEMANNsche Fläche $\overline{\mathbf{R}}$; dann und nur dann, wenn im bereits erklärten Sinne $\mathbf{R}' \equiv \overline{\mathbf{R}}$ ist, nennen wir Σ eine konforme Abbildung von **R** auf **R**. Man stellt sofort fest, dass für die konformen Abbildungen die Gruppeneigenschaften bestehen: die inverse Abbildung einer konformen Abbildung ist wieder konform, und durch Zusammensetzung konformer Abbildungen erhält man wieder konforme Abbildungen. — Ist G ein Teilgebiet einer RIEMANNschen Fläche, so wird für G eine konforme Abbildung im Kleinen auf die folgende Weise eindeutig festgelegt. Diejenigen Umgebungen des bei der Erklärung der RIEMANNschen Fläche verwendeten Systems, die in G enthalten sind bilden ein Umgebungssystem für G, und unter Beibehaltung der Abbildungen $T[U]$ erhalten wir eine konforme Abbildung im Kleinen für G. Wir setzen nun ein für allemal fest, dass die Teilgebiete einer RIEMANNschen Fläche immer in diesem Sinne als RIEMANNsche Flächen aufgefasst werden sollen.

Auf die RIEMANNsche Fläche, wie dieselbe hier erklärt wurde, können wir nun *im Kleinen* alle Sätze der Funktionentheorie anwenden, *im Grossen* aber keineswegs, eben deswegen, weil wir keine Abzählbarkeitseigenschaften vorausgesetzt haben. Wir müssen uns dies bei den folgenden Überlegungen wohl gegenwärtig halten, wenn wir nicht in einen Zirkelschluss verfallen wollen.

Ist **R** eine RIEMANNsche Fläche im Sinne unserer Erklärung, so ist dieselbe im Grossen vorläufig unzugänglich. Wir werden aber in der Folge mit solchen Teilgebieten operieren, welche durch eine Folge von Elementargebieten überdeckt werden können; wir wollen solche Teilgebiete als *übersichtliche Gebiete* bezeichnen. Ein übersichtliches Gebiet kann nach § 3, Hilfssatz 2, trianguliert werden, ist demnach eine Riemannsche Fläche im Weylschen Sinne, auf welche also alle Resultate der Funktionentheorie angewendet werden dürfen.[5]) Für uns kommen hier die fundamentalen Ergebnisse der *Uniformisierungstheorie*[6]) in Betracht. Es ist nicht möglich, auf dieselbe an dieser Stelle genauer einzugehen, es wäre aber auch ganz überflüssig, da beispielsweise im Weylschen Buche der Leser alles Nötige in musterhafter Darstellung beisammen hat. Es sei uns also gestattet, sofort die Folgerungen anzugeben, die wir aus dem Hauptsatze der Uniformisierungstheorie, dem Grenzkreistheorem, ziehen werden.

Wir wählen auf der Riemannschen Fläche **R** einen festen Punkt 0 und bezeichnen mit **A** die Menge der übersichtlichen Gebiete, welche diesen Punkt enthalten. Die wesentliche Leistung des Grenzkreistheorems wird nun darin bestehen, dass es uns die Mittel an die Hand gibt, um die Gebiete von **A** in Bezug auf ihre Grösse miteinander vergleichen zu können. Wir werden nämlich folgendes zeigen. Jedem Gebiete G von **A** kann man in eindeutiger Weise eine positive Zahl $R(G)$, welche auch unendlich sein kann, zuordnen derart, dass für diese Zuordnung die beiden Gesetze gelten:

I. Ist G ein Gebiet von **A**, welches eine volle Umgebung irgendeines Punktes frei lässt, so ist $R(G)$ endlich.

II. Ist $\overline{G}$ ein Gebiet von **A**, für welches $R(\overline{G})$ endlich ist, so ist für jedes Teilgebiet G von $\overline{G}$ die zugeordnete Zahl $R(G)$ ebenfalls endlich und es ist $R(G) \leqq R(\overline{G})$. *Das Gleichheitszeichen gilt indessen dann und nur dann, wenn das Teilgebiet G identisch mit $\overline{G}$ ist.*[7])

[5]) Es sei hier daran erinnert, dass beim Beweise des Grenzkreistheorems im Weylschen Buche keine Regularitätsvoraussetzungen über die Einteilungslinien der Triangulierung gemacht werden, im Gegensatze zu den funktionentheoretischen Beweisen, wo derartige Voraussetzungen nötig sind, um die Ausführbarkeit gewisser *Heftungsprozesse* zu sichern. Es würde übrigens keine Schwierigkeit bieten, eine auch bei diesen Beweisen brauchbare Triangulierung herzustellen.

[6]) Wegen der Litteratur verweisen wir den Leser auf die Enzyklopädie-Artikel: L. Bieberbach, *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen,* II C 4, und L. Lichtenstein, *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.* II C 3.

[7]) Gerade dieser Zusatz wird den Beweis ermöglichen.

Es folgt nun ganz allgemein, sobald für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit eine derartige *Gebietsmessung* eingeführt werden kann, die Triangulierbarkeit derselben. Wir wollen diesen einfachen Gedankengang gleich durchführen, und erst dann die noch ausstehenden, ebenfalls sehr einfachen funktionentheoretischen Überlegungen nachholen.

Wir nehmen auf **R** einen JORDANschen Bereich B, welcher den Punkt O nicht enthält, bezeichnen mit $\overline{\mathbf{A}}$ die Menge der Gebiete von **A**, welche mit B keinen Punkt gemein haben, und schliessen dann aus I, dass für jedes Gebiet G von $\overline{\mathbf{A}}$ die Zahl $R(G)$ endlich ist. Wir behaupten weiter: die obere Grenze der Zahlen $R(G)$, für alle Gebiete G in $\overline{\mathbf{A}}$, ist ebenfalls endlich. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir aus $\overline{\mathbf{A}}$ eine Gebietsfolge $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ herausgreifen, für welche $R(G_n) \to \infty$. Durch Vereinigung dieser abzählbar vielen übersichtlichen Gebiete erhalten wir offenbar wieder ein Gebiet G in $\overline{\mathbf{A}}$, und nach II muss $R(G) \geqq R(G_n)$ sein für jeden Wert von n. Es könnte also $R(G)$ nicht endlich sein, im Widerspruche mit I. Bezeichnen wir nun die obere Grenze der Zahlen $R(G)$, für alle G in $\overline{\mathbf{A}}$, mit ϱ, so ergibt sich gleich, dass in $\overline{\mathbf{A}}$ ein Maximalgebiet G vorhanden ist, für welches $R(G) = \varrho$ ist. Denn jedenfalls können wir aus $\overline{\mathbf{A}}$ eine Gebietsfolge $G_1, G_2, \ldots$ herausgreifen, so dass $R(G_n) \to \varrho$. Durch Vereinigung dieser abzählbar vielen Gebiete erhalten wir ein Gebiet G von $\overline{\mathbf{A}}$, für welches aus I die Beziehung $R(G_n) \leqq R(G)$, aus der Definition von ϱ hingegen $R(G) \leqq \varrho$ folgt. Wegen $R(G_n) \to \varrho$ muss hiernach $R(G) = \varrho$ sein.

Dieses Maximalgebiet von $\overline{\mathbf{A}}$ muss nun identisch sein mit dem Gebiete $\overline{\mathbf{R}}$, welches aus **R** durch Entfernung der Punkte des JORDANschen Bereiches B entsteht. Sonst würde G wenigstens einen Randpunkt P in $\overline{\mathbf{R}}$ haben. Indem wir G mit einem in $\overline{\mathbf{R}}$ enthaltenen, den Punkt P enthaltenden Elementargebiete vereinigen, erhalten wir ein Gebiet G^* von $\overline{\mathbf{A}}$, welches das Maximalgebiet G als echtes Teilgebiet enthält. Nach II muss dann $R(G^*) > R(G)$ sein, im Widerspruche mit der Maximaleigenschaft von G. Damit ist erwiesen, dass das Gebiet $\overline{\mathbf{R}}$, welches aus **R** durch Entfernung der Punkte des JORDANschen Bereiches B entsteht, übersichtlich ist, mithin durch eine Folge $E_1, E_2, \ldots$ von Elementargebieten überdeckt werden kann. Nehmen wir noch ein Elementargebiet E_0 hinzu, welches B im Innern enthält, so wird die Folge $E_0, E_1, E_2, \ldots$

nunmehr die ganze Mannigfaltigkeit R überdecken, und diese ist also nach Hilfssatz 2, § 3 triangulierbar, wie es behauptet wurde.

Wir müssen noch zeigen, dass aus dem Vorhandensein einer konformen Abbildung im Kleinen die Möglichkeit einer *Gebietsmessung* im obigen Sinne folgt. Wir nehmen eine Umgebung U von O, welche eine konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises gestattet; diese Abbildung kann dann auch so gewählt werden, dass dem Punkte O der Nullpunkt entspricht. Durch diese Abbildung wird für den Punkt O eine Ortsuniformisierende erklärt, die nunmehr festgehalten werden soll. Ist G ein übersichtliches Gebiet, welches den Punkt O enthält, so gilt für dasselbe das Grenzkreistheorem. Die Fundamentalabbildung von G erfolgt dann entweder auf die Vollebene, oder auf die endliche Ebene, oder schliesslich auf das Innere eines endlichen Kreises. Dem Gebiete G ordnen wir in den beiden ersteren Fällen den Wert $+\infty$ zu. Im letzteren Falle normieren wir die Abbildung so, dass die Uniformisierende einen Zweig, den Hauptzweig, hat, welcher in O verschwindet und dort eine Ableitung gleich $+1$ nach der Ortsuniformisierenden besitzt. Es ergibt sich dann ein ganz bestimmter Bildkreis, und der Halbmesser desselben wird als die Zahl $R(G)$ erklärt. Es ist dann zu zeigen, dass die Gesetze I und II für diese Zuordnung erfüllt sind. Man erkennt sofort, dass diese Gesetze bloss eine etwas genauere Fassung der Unitätssätze der Uniformisierungstheorie darstellen. Wir wollen die Beweise dennoch durchführen, um die einfachsten funktionentheoretischen Gründe unseres Hauptsatzes beisammen zu haben.

Ad I. Sei P ein solcher Punkt, welcher eine Umgebung $U(P)$ hat, in welcher kein Punkt von G liegt. Nach Hilfssatz 1, § 1 können wir die Punkte O und P durch eine Kette von endlich vielen Elementargebieten verbinden. Indem wir diese Elementargebiete mit G vereinigen, erhalten wir ein übersichtliches Gebiet $\overline{G}$, welches G als Teilgebiet enthält, wobei eine gewisse in $\overline{G}$ enthaltene Umgebung des Punktes P frei von G ist. Wir bestimmen nun eine Uniformisierende $\overline{f}$ von $\overline{G}$. Sollte die Fundamentalabbildung von $\overline{G}$ auf die Vollebene erfolgen, so können und wollen wir es so einrichten, dass $\overline{f}$ gerade im Punkte P unendlich wird. Wir gehen nun von einem Zweige von $\overline{f}$ im Punkte P aus, und beschränken die analytischen Fortsetzungen dieses Zweiges auf das Teilgebiet G von $\overline{G}$. Ist dann f eine Uniformisierende für G, so entsteht durch diese analytische Fortsetzung eine eindeutige analytische Funktion $\bar{f}(f)$, die alle Werte auslässt, welche $\bar{f}$ in der von G freien Umgebung des Punktes P annimmt. Bedeutet also α einen der Werte von $\bar{f}$ in P, so wird die Funktion

$$\frac{1}{\bar{f}(f)-\alpha}$$

beschränkt sein (falls α unendlich ist, kann man die Funktion $\bar{f}(f)$ selbst betrachten). Wenn nun die Fundamentalabbildung von G nicht auf das Innere eines endlichen Kreises erfolgen würde, so wäre diese Funktion regulär für jeden endlichen Wert von f, also nach dem LIOUVILLEschen Satze konstant, was widersinnig ist.

Ad II. Soviel sieht man sofort, dass die Fundamentalabbildung von G nicht auf die Vollebene erfolgen kann. In diesem Falle wäre nämlich G geschlossen, könnte also keinen Randpunkt haben, und müsste mit $\bar{G}$ identisch sein, während nach Voraussetzung $R(\bar{G})$ endlich ist.

Es seien nun f und $\bar{f}$ die im Punkte O normierten Uniformisierenden der Gebiete G und $\bar{G}$, und sei K das Bildgebiet von G in der komplexen f-Ebene. Dabei ist also K entweder die ganze endliche Ebene, oder aber das Innere eines Kreises um den Nullpunkt mit dem endlichen Radius $R(G)$. Wir beschränken wieder die analytischen Fortsetzungen des Hauptzweiges von $\bar{f}$ auf das Teilgebiet G von $\bar{G}$, und erhalten eine in K reguläre eindeutige Funktion $\bar{f}(f)$. Da diese in K dem absoluten Betrage nach kleiner als die nach Voraussetzung endliche Zahl $R(\bar{G})$ bleibt, so kann K nicht die ganze endliche Ebene sein, denn aus dem LIOUVILLEschen Satze würde dann folgen, dass $\bar{f}(f)$ konstant ist, was nicht der Fall sein kann. Die Zahl $R(G)$ ist hiernach endlich. Da nun $\bar{f}(f)$ im Kreise K absolut kleiner als $R(\bar{G})$ bleibt, im Nullpunkte verschwindet und dort die Ableitung $+1$ hat, so folgt aus dem SCHWARZschen Lemma, dass $R(G) \leqq R(\bar{G})$ ist, mit dem Zusatze, dass das Gleichheitszeichen dann und nur dann gelten kann, wenn $\bar{f}(f) \equiv f$ ist. In diesem Falle schliessen wir wie folgt weiter. Da $\bar{f}(f) \equiv f$ sein soll, so nimmt $\bar{f}(f)$ in K alle Werte mit einem absoluten Betrage kleiner als $R(G) = R(\bar{G})$ an. Ist nun G ein echtes Teilgebiet von $\bar{G}$, so gibt es wenigstens einen Punkt P in $\bar{G}$ welcher nicht in G enthalten ist. Bedeutet α einen den Werte von $\bar{f}$ in P, so ist $|\alpha| < R(\bar{G})$, und $\bar{f}$ nimmt in G den Wert α

nicht an. Es kann also das Gleichheitszeichen nicht gelten, wenn G echtes Teilgebiet von $\overline{G}$ ist.[8])

Damit sind die Gesetze I und II verifiziert, und unser Beweis ist zu Ende.

Szeged, den 10. Jänner 1925.

---

[8]) Die Voraussetzung, dass $R(\overline{G})$ endlich ist, ist wesentlich. Sei nämlich $\overline{G}$ die ganze endliche Ebene, und G entstehe durch Punktierung von $\overline{G}$ im Nullpunkte. Dann ist G echtes Teilgebiet von $\overline{G}$, und für beide Gebiete erfolgt die Fundamentalabbildung auf die ganze endliche Ebene. Dieser Umstand machte auch die Vorsichtsmassregel der Einführung von B beim Beweise des Haupt atzes nötig.

Bibliographie.

E. Czuber, Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Wissenschaft und Hypothese XXIV), VIII + 343 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.

Der hauptsächliche Zweck dieses schönen Buches besteht darin, die Mathematiker mit den Spekulationen bekannt zu machen, die in neuerer Zeit von philosophischer Seite über die Grundlagen und die Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung angestellt worden sind. In Kapitel I lernt der Leser die feine Begriffsanalyse MEINONG's kennen; auch weiter im Buche hat man oft Gelegenheit, die tiefdurchdachten Gadankengänge dieses Philosophen in der lichtvollen Darstellung des Herrn Verfassers zu bewundern, Die Kapitel II, III, IV und VI behandeln die fundamentalen Sätze der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei auch die ursprünglichen Ansichten der grossen Mathematiker, welche diese Disziplin erschaffen haben, zur Sprache kommen. Diese Kapitel dürften für einige Philosophen, deren manchmal recht sonderbare Auffassungen im Buche gelegentlich geschildert werden, gerade unentbehrlich sein. Mit grossem Interesse wird man Kapitel VII lesen über den Versuch, die sogenannte unvollständige Induktion auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zurückzuführen, und Kapitel VIII über Wahrscheinlichkeitstheorie und Naturphilosophie. Von dem reichen Inhalt dieses Schlusskapitels sei hier nur auf die Darstellung und Kritik der ausgedehnten MARBE'schen Untersuchungen hingewiesen, welche die bedeutungsvolle Frage aufklären sollten, ob das wirkliche zufällige Geschehen den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechend vor sich geht.

Referent, der das Buch ursprünglich zum Vergnügen gelesen hatte, nimmt mit Bestimmtheit an, dass es recht vielen Lesern freudige Stunden bereiten wird.

Tibor Radó.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II, erste Lieferung (Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen XX, 2), VI + 242 S., B. G. Teubner, Berlin, 1924.

Diese erste Lieferung des zweiten Bandes des bekannten OSGOODschen Lehrbuches enthält in drei Kapiteln (I. Integraldarstellungen und mehrfache Reihen. Die erweiterten Räume. — II. Implizite Funktionen. Teilbarkeit. —

III. Singuläre Stellen und analytische Fortsetzung. Rationale Funktionen.) die Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Grössen. Eine meritorische Besprechung behalten wir uns vor, bis dieser zweite Band vollendet vorliegt

J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül (Grundlehren der math. Wissenschaften X), X + 311 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Die mathematische Methode der allgemeinen Relativitätstheorie ist die von Ricci begründete, von ihm als absoluter Differentialkalkül bezeichnete Methode. Diese Methode heisst jetzt allgemein, nach einem Vorschlage von Schouten, der Ricci-Kalkül.

Ricci selbst verwendet den absoluten Differentialkalkül nur zum Aufbau der Theorie der n-dimensionalen Riemannschen Räume, indem er den Begriff des covarianten Differentialquotienten von Christoffel fertig übernimmt. Sobald aber der Vektorbegriff differentialgeometrisch verallgemeinert wurde, tauchte die Frage nach der geometrischen Bedeutung des covarianten Differentialquotienten auf. Diese Bedeutung wurde von Levi-Civita und von Weyl klargestellt. Sie führen den Begriff der Parallelverschiebung ein und daraus erhalten sie den Begriff des Differentialquotienten. Schouten hingegen geht vom Differentialquotienten aus, dessen Eigenschaften er durch fünf Postulate festlegt, und ermittelt die verschiedenen Verschiebungsmöglichkeiten; diese sind seine linearen Übertragungen. In Kapitel II, in welchem wohl der Schwerpunkt des Buches liegen dürfte, bestimmt er die 27 möglichen Übertragungsarten. Kapitel III bringt die Theorie der homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen, und der Systeme von solchen, und die Integrabilitätsbedingungen der in der Differentialgeometrie vorkommenden Systeme Dann folgt das Pfaff'sche Problem, welches übrigens bereits eine Frage der Tensoranalysis wurde, durch die Theorie der Cartan'schen symbolischen Formen, der „formes à multiplication extérieure".

Der affinen, der Riemann'schen, der Weyl'schen Geometrie ist je ein Kapitel gewidmet. Jedes dieser Kapitel besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil beschäftigt sich mit den Transformationsfragen und mit den speziellen Fällen der betreffenden Geometrie; im zweiten Teile werden die eingebetteten Mannigfaltigkeiten untersucht.

Es würde zu weit führen, die Ergebnisse auch nur in grossen Zügen zu schildern. Viele Resultate rühren vom Verfasser selbst her; es werde hier nur auf seine Methode hingewiesen, welche eine einheitliche Untersuchung der affinen Räume ermöglicht und welche im speziellen Falle des euklidischen Raumes zur affinen Geometrie im engeren Sinne führt, deren Aufbau durch Pick, Blaschke und Andere erfolgte. Dieselbe allgemeine Methode ermöglicht auch, sinngemäss spezialisiert, den Aufbau der Riemannschen und Weylschen Geometrien. Wie man sieht, ist der karakteristische Zug des ganzen Buches das Streben nach methodischer Einheitlichkeit.

Das Schlusskapitel behandelt die invarianten Zerlegungen der Grössen höheren Grades.

Stephan Grynaeus.

C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen (Die Grundlehren der math. Wissenschaften XI), VIII + 372 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Die praktische Auffassung, dass ein mathematisches Problem erst dann als erledigt betrachtet werden kann, wenn man imstande ist, die Lösung mit vorgeschriebener Genauigkeit tatsächlich zu ermitteln, ist auf die Entwicklung der reinen Mathematik vom grössten Einflusse gewesen. Die wichtigsten besonderen Funktionen, die brauchbarsten Reihenentwicklungen, sie wurden gleichsam auf Bestellung des Praktikers eingeführt; das Problem der analytischen Darstellung willkürlicher Funktionen, die Methode der successiven Approximationen, sind, um Beispiele zu nennen, praktischen Ursprungs. Die Auswahl des Stoffes im vorliegenden Buche ist so getroffen, dass fast jedes Kapitel die Keime ganzer Theorien enthält. Das Buch wird darum für die Studierenden der reinen Mathematik von grossem Bildungswerte sein. Der Umstand, dass es aus zwanzigjähriger Praxis hervorgegangen ist, sowie die Namen der Verfasser bürgen dafür, dass auch der Lehrer der Mathematik aus demselben Belehrung und Nutzen ziehen wird. Beim Abhalten von Übungen werden die vielen sorgfältig durchgerechneten Aufgaben ausgezeichnete Dienste leisten.

Tibor Radó.

R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (Grundlehren der math. Wissenschaften XII), XIII + 450 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Vor ungefähr einem Vierteljahrhundert wurde die von manchem Mathematiker verhöhnte geometrisch-physikalische Anschauung durch die Arbeiten von Hilbert über das Dirichletsche Prinzip als Wegweiser zur Ausbildung strenger mathematischer Methoden wiederbelebt. Seitdem hat sich die physikalische Denkweise, vereint mit mathematischer Strenge, in allen Problemkreisen bewährt, die entweder der Physik entsprungen sind oder eine physikalische Deutung zulassen. Es ist mit grösster Freude zu begrüssen, dass R. Courant es unternommen hat, über die Ergebnisse dieser mathematischen Geistesrichtung, zu denen auch er selbst sehr viel Wertvolles beigesteuert hat, unter Benützung Hilbertscher Abhandlungen und Vorlesungen in einem zweibändigen Lehrbuche zu berichten.

Der vorliegende erste Band beginnt mit den linearen Transformationen und quadratischen Formen und kommt dann über orthogonale Funktionensysteme, Fouriersche Reihen und Integrale, lineare Integralgleichungen und die Grundtatsachen der Variationsrechnung hindurch zu seinem wichtigsten Material, zu den Schwingungs- und Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. Bei der Behandlung dieser Probleme, wie auch schon in den vorbereitenden Kapiteln, „spielen die Gesichtspunkte der Variationsrechnung die beherrschende Rolle, d. h. das Bestreben, mathematische Grössen und Funktionen durch Extremumseigenschaften zu charakterisieren". In lebhafter und verblüffend einfacher Weise wird hier dargelegt, wie man aus den Variations-ansätzen sozusagen alles über die Eigenschaften der Eigenfunktionen, über ihr gegenseitiges Verhalten und über die Asymptotik der Eigenwerte und der Eigenfunktionen herauslesen kann. Im letzten Kapitel werden spezielle Funktionen (Bessel, Legendre, Laplace) hauptsächlich mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden untersucht.

Mit Hinsicht auf die voraussichtliche grosse Verbreitung und eine baldige Neuausgabe des inhaltsreichen und ausgezeichnet geschriebenen Werkes fühlt sich Referent verpflichtet, auch auf eine schwache Stelle desselben hinzuweisen. Es handelt sich um das Lebesguesche Integral, das Stiefkind der meisten Lehr- und Handbücher über Analysis. Es weiss ja heute jeder Mathematiker, dass in den neueren Problemkreisen der Analysis, wie z. B. Integralgleichungen, Entwicklung nach Orthogonalfunktionen, Dirichletsches Prinzip und verwandte Variationsansätze u. s. f., der Lebesgueschen Theorie eine wichtige Rolle zukommt und wenn auch die Verwendung des Lebesgueschen Integrals in vielen Fällen durch Kunstgriffe umgangen werden kann, der forschende Mathematiker auch schon deshalb eine tiefere Einsicht in diese Theorie gewinnen muss, weil er aus derselben den Mut schöpft, um bei seinen Ansätzen vor scheinbar grossen Stetigkeits- und Konvergenz-Schwierigkeiten nicht zurückzuschrecken. Die meisten Lehrbücher schweigen noch über das Lebesguesche Integral. Das vorliegende Buch ist schon freigiebiger; es widmet ihm und seinen Anwendungen fast volle drei Seiten (p. 95—98). Dabei wird aber die Definition zwar nicht unrichtig, doch derart formuliert, dass sie von der Tragweite des Lebesgueschen Integrals eine falsche Vorstellung gibt. Verfasser scheint es übersehen zu haben, dass der springende Punkt der Lebesgueschen Ideenbildung, nämlich die Benutzung einer Intervalleinteilung nach Ordinaten statt Abscissen, eben dazu dient, eine Fehlerabschätzung a priori zu sichern, wodurch dann die Konvergenzfrage der Produktsummen bei unendlicher Verdichtung der Einteilung im vorhinein im positiven Sinne entschieden ist.

Auf S. 96 unten steht noch der folgende Satz: „Sind $f_1(x), f_2(x), \ldots$ summable Funktionen, für welche $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n(x)^2\, dx = 0$ ist, so gilt bis auf eine Nullmenge auch $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 0$." Auf einen ähnlich lautenden, ebenfalls falschen Satz hat schon vor 45 Jahren A. Harnack (Math. Ann. Bd. 17 u. 19) den Beweis der noch heute unentschiedenen Konvergenz — beinahe überall — der Fourierschen Reihe einer jeden quadratisch integrierbaren Funktion begründet. Es war ganz überflüssig, den obigen, durch ganz elementare Beispiele widerlegbaren Satz aus der Vergessenheit hervorzuholen und nicht lieber den entsprechenden, richtigen Auswahlsatz anzuführen, aus welchem dann auch die weiter ohne Beweis und auch ohne Angabe ihres Zusammenhanges angeführten, nach E. Fischer und dem Referenten benannten Sätze sich fast ohne Mühe ergeben.

Wir hoffen, dass die zweite Auflage dieses trefflichen Werkes der Lebesgueschen Entdeckung mehr gerecht wird.

F. R.

N. E. Nörlund, Differenzenrechnung (Grundlehren der math. Wissenschaften XIII), IX + 532 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Von der berufensten Feder geschrieben, erscheint ein Lehrbuch der Differenzenrechnung, dieser vielumfassenden Disziplin der Analysis, die in den letzten Jahren durch eine Reihe von Arbeiten des Verfassers neu aufblühte. Das vorliegende Werk, das neben den klassischen Resultaten diesen tiefen Untersuchungen gewidmet ist, und auch die schönen einschlägigen Ergebnisse BIRKHOFF's und HILB's enthält, ist im vollen Masse geeignet, das Eindringen in die neuere Literatur zu erleichtern. Überall ist der Verfasser bestrebt durch die klassischen Beispiele die behandelten Theorien lebendig zu machen; auf diese Weise gelangen die BERNOULLIschen und EULERschen Polynome (sowohl die gewöhnlichen, wie auch diejenigen höherer Ordnung, die der Verfasser eingeführt hat), die Gammafunktion (deren Eigenschaften als Sonderfälle aus der allgemeinen Theorie der Differenzengleichungen gewonnen werden), die Interpolations- und die Fakultätsreihen (von denen eine mannigfaltige Anwendung gemacht wird) zur Sprache.

Der Begriff der Hauptlösungen ist der springende Punkt der NÖRLUNDschen Theorie. Da nämlich jede Lösung der Differenzengleichung $F(x+\omega) - F(x) = \varphi(x)$, ($\varphi(x)$ gegeben, $F(x)$ gesucht) durch Hinzufügung einer periodischen Funktion von der Periode ω wieder in eine Lösung übergeht, so handelt es sich darum, eine ausgezeichnete Lösung von interessanten funktionentheoretischen Eigenschaften herauszugreifen. Dieses Problem — das früher von APPEL und HURWITZ angegriffen wurde — führt zu dem Begriff der Hauptlösung, deren Eigenschaften im 3., 4. und 7. Kapitel dargelegt werden. Für $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$ ergeben sich die BERNOULLIschen Polynome, für $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitung der Gammafunktion.

Der zweite Teil des Buches (Kapitel 10 bis 15) ist den linearen Differenzengleichungen gewidmet, d. h. Gleichungen von der Form

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, u(x+i) = \varphi(x).$$

Nach den bekannten Sätzen von HÖLDER und POINCARÉ (über das asymptotische Verhalten der Lösungen) wird die Gleichung mit rationalen Koeffizienten behandelt, durch Zuhülfenahme der sog. LAPLACE'schen Transformation und der Fakultätsreihen, wobei eine Klasse von Gleichungen, die der FUCHS'schen Klasse von Differenzialgleichungen analog ist, besonders hervorgehoben wird. Es werden sodann die BIRKHOFF'schen Untersuchungen über ein System von Differenzengleichungen erster Ordnung und die von diesem Autor eingeführte Matrixlösung in knapper Form dargelegt. Den Schluss des Werkes bilden die, an die THIELEsche Interpolationsformel anknüpfenden Untersuchungen—und der Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche.

Ein ausführliches Literaturverzeichnis findet am Ende des Buches Platz.

A. H.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage, erster Band, *Arithmetik—Algebra—Analysis.* Ausgearbeitet von E. HELLINGER (Grundlehren der math. Wissenschaften XIV), XII + 321 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Von den meisterhaften Vorlesungen, die FELIX KLEIN ein Menschenalter entlang an der Universität Göttingen hielt, ist nun die erste in Druck erschienen. Allbekannt ist die gewaltige Wirkung, die diese Vorlesungen, die bisher nur als Autographien erhältlich waren, durch Form und Inhalt auf ihre Hörer und Leser ausübten. Jeder, dem es vergönnt war dem Hörerkreise KLEIN's anzugehören, stand unter dem Eindrucke seiner Vorlesungen, die gar Vielen als Ideal mathematischen Universitätsunterrichts galt. Mit Freude begrüsst wird nun von allen Fachgenossen das Unternehmen, dass diese Vorlesungen nun in Druck erscheinen sollen.

Die vorliegende — von E. HELLINGER ausgezeichnet ausgearbeitete — Vorlesung ist der erste Teil der Elementarmathematik, der Arithmetik, Algebra und Analysis gewidmet, mit einem Anhang über Mengenlehre. Zwei Gesichtspunkte durchdringen das ganze Werk. Erstens: die vielen historischen Daten, die an jeder Stelle hervorgehoben werden und die einen schönen Einblick in die allgemeine Entwicklung der modernen Mathematik gestatten. Zweitens: die vielfach hervortretenden pädagogischen Exkurse, da ja die Vorlesung in erster Reihe für die Lehrer der Mathematik bestimmt ist. Durch die grosse Fülle der behandelten Fragen ist das Werk eine äusserst anregende Lektüre für alle Mathematiker. An vielen Stellen ist der Beweis nicht in extenso geführt, nur angedeutet; auf diese Weise gelingt es den mannigfachen Stoff in gedrängter Kürze darzulegen. Es gelingt, ausgehend von den Elementen, zu den schwierigsten Problemen emporzusteigen, wie es z. B. im Abschnitt über algebraische Gleichungen (p 109—153) der Fall ist, wo schliesslich der Leser einen schönen Überblick über die schwierige Theorie der Gleichungen 5-ten Grades gewinnt.

Jeder Mathematiker wird mit Freude das Erscheinen der übrigen Vorlesungen F. KLEIN's erwarten, und es ist zu hoffen, dass es zur Verbreitung seiner Ideen in einem weiten Kreise von Lesern erfolgreich beitragen wird.

A. H.

E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Nach der zweiten Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten Scheid (Grundlehren der math. Wissenschaften XVII), XII + 462 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Willkommen für alle Mathematiker, die sich mit Mechanik oder mit der Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet beschäftigen, ist die deutsche Übersetzung des trefflichen Werkes WHITTAKER's. Der musterhaften Darstellung, die im englischen Original vor zwei Jahrzehnten zuerst erschien, verdankt dieses Werk, dass es bald das meistgebrauchte Lehrbuch dieses Gebietes wurde zum Studium der Probleme der höheren Mechanik und zur

Einführung in das Dreikörperproblem. Es war die Absicht des Verfassers die allgemeinen Theoreme der einschlägigen Literatur darzulegen, die durch eine reiche Fülle von Beispielen und Aufgaben ergänzt werden. Auf diese Weise ist das Werk auch die beste Einführung zu den POINCARÉschen Untersuchungen über Himmelsmechanik; es finden ausser den Prinzipien der Störungstheorie, die Integralinvarianten, die allgemeine Theorie der Bahnkurven, die berühmten Sätze von BRUNS und POINCARÉ über die Nichtexistenz gewisser Integrale der mechanischen Probleme, eine mehr oder weniger ausführliche Besprechung.

Übergangen — oder auf Aufgaben verwiesen — werden Fragestellungen von spezielleren Charakter. Vielleicht ist in dieser Hinsicht bedauernswert, dass die Theorie der bedingt periodischen Lösungen, die in neuerer Zeit in der Physik eine wichtige Rolle spielen, nicht in das Werk eingearbeitet wurde.

Man findet im vorliegenden Buch eine vorzügliche Bearbeitung der einschlägigen Literatur, so dass das Werk sowohl zum Studium, wie auch als Nachschlagewerk in hervorragender Weise geeignet ist.

A. H

G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. *Reihen - Integralrechnung—Funktionentheorie.* (Grundlehren der math. Wissenschaften XIX), XIV + 338 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Als wir auf die Hochschule gingen, da war für die meisten von uns die Mathematik eine reiche Sammlung von mehr oder weniger anregenden Sätzen und Aufgaben, an denen wir mitarbeiten und unsere intuitive Kraft erproben konnten. So blieb es auch während der ersten Semester. Dann kam Systematik, es kamen mit grosser Präzision aufgebaute Theorien, die wir bewundern und uns aneignen durften, wo wir aber nicht mehr an den einzelnen Bausteinen zu rütteln wagten und das brachte Enttäuschung. Das vorliegende Buch ist berufen, der neuen Generation diese Enttäuschung zu ersparen. Für mittlere und höhere Semester bestimmt, aber auch dem Kenner manches Neue bietend, will er den Studierenden durch systematisch angeordneten Aufgaben an eigenes Denken und selbständiges Forschen in einigen wichtigen Gebieten der Analysis gewöhnen.

Auswahl und Anordnung des Stoffes sind meisterhaft. Der Leser wird fast spielend in Problemkreise eingeführt, die heute im Mittelpunkte der Interesse stehen, so z. B. additive Zahlentheorie, Probleme der Gleichverteilung, asymptotische Auswertung von Integralen, Folgen analytischer Funktionen, schlichte Abbildungen, die Verwertung des Maximumsprinzips durch PHRAGMÉN und LINDELÖF, die Dreikreisesätze von HADAMARD und HARDY u. s. f.

Wir sehen mit grösster Erwartung dem zweiten Bande entgegen.

F. R.

Über eine geometrische Darstellung der Fareyschen Reihe.

Von Georg Pólya in Zürich.

Eine hübsche geometrische Darstellung der wohlbekannten Haupteigenschaft der Fareyschen Reihe rührt von Sylvester her.[1]) Da diese Darstellung, wie es scheint, etwas in Vergessenheit geraten ist,[2]) da ferner die Ausführungen von Sylvester nicht ganz unanfechtbar sind, ist es vielleicht angezeigt den Gegenstand hier kurz wieder aufzunehmen.

1. Den folgenden Betrachtungen liegt ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene zugrunde. Als *Gitterpunkte* werden, wie üblich, die Punkte bezeichnet, deren beide Koordinaten ganze Zahlen sind.[3]) Der Gitterpunkt p, q heisst *sichtbar* (ausführlicher: vom Nullpunkte aus sichtbar), wenn die Verbindungsstrecke der Punkte $0, 0$ und p, q durch keinen Gitterpunkt hindurchgeht, d. h. wenn p und q teilerfremd sind. Man sagt, dass der Gitterpunkt p, q dem Gitterpunkte p', q' *vorangeht* (ausführlicher: bei zyklischer Anordnung um den Nullpunkt herum vorangeht), wenn

$$p q' - p' q > 0$$

ist. Man betrachte einen Bereich B, der beide Gitterpunkte p, q und p', q' enthält; man sagt, dass der Gitterpunkt p, q dem Gitterpunkte p', q' *innerhalb B unmittelbar* vorangeht, wenn p, q dem p', q' vorangeht und kein Gitterpunkt p'', q'' in B liegt, der dem Punkte p, q folgt und dem Punkte p', q' vorangeht.

[1]) J. J. Sylvester, The collected Mathematical Papers, Cambridge, 1912, Bd. IV, S. 78—81.

[2]) Z. B. ist in dem wichtigen Werk von L. E. Dickson, 'History of the Theory of Numbres Bd. I, S. 157 die Abhandlung von Sylvester wohl erwähnt, nicht aber die geometrische Darstellung.

[3]) D. h. rationale ganze Zahlen, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Ich werde den folgenden Satz beweisen:

Es sei B entweder

ein abgeschlossener konvexer Bereich, der den Nullpunkt enthält, oder

B soll diejenigen Punkte x, y enthalten, die den beiden Ungleichungen

$$x \geqq 0, \quad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

genügen, wobei $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, nie zunehmende und nie negative Funktion bedeutet.

Sind p, q und $p' q'$ zwei in B liegende sichtbare Gitterpunkte und geht p, q dem $p' q'$ innerhalb B unmittelbar voran, so ist

$$p q' - p' q = 1.$$

Der Satz umfasst zwei wesentlich verschiedene Fälle. Im ersten Fall, wenn B konvex ist, muss B nicht notwendigerweise endlich sein: B kann z. B. der durch die Ungleichung

$$|x - y| \leqq 1$$

abgegrenzte Parallelstreifen sein. Der zweite Fall des Satzes ist abgesehen von der geometrischen Einkleidung, schon von Halphén[4]) bewiesen worden. Der geläufige Satz betreffend die Fareysche Reihe, lässt sich beiden Fällen subsumieren: man nehme B als das durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x \leqq n, \quad 0 < y \leqq n$$

abgegrenzte Quadrat, oder was auf dasselbe hinauskommt,

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{für } 0 \leqq x \leqq n, \\ 0 & \text{für } \quad\;\; x > n \end{cases}$$

an.[5])

3. Der Beweis beruht auf einem bekannten Prinzip, das ich (allgemeiner, als es hier nötig ist) folgendermassen formulieren möchte:

L e m m a. *Es sei P eine endliche, abgeschlossene Fläche, begrenzt durch ein Polygon, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Der Flächeninhalt von P ist gleich der Anzahl der in P*

---

[4]) G. H. Halphén, Bull. de la Soc. Math. de France, Bd. 5 (1876—1877) S. 170—173.

[5]) Für eine Anwendung der Konfiguration der sichtbaren Gitterpunkte innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 \leqq s^2$ vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, 1925, Bd. II, S. 376, Lösung 239.

gelegenen Gitterpunkte, vorausgesetzt, dass diese mit passenden Gewichten gezählt werden, folgendermassen:

Ein Gitterpunkt im Innern wird voll gezählt, nämlich mit dem Gewichte 1.

Ein Gitterpunkt am Rande, aber nicht in einer Ecke (also im Innern einer Seite) wird mit dem Gewichte $\frac{1}{2}$ *gezählt.*

Ein Gitterpunkt in einer Ecke, deren Innenwinkel α *beträgt, wird mit dem Gewichte* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *gezählt.*

Man kann die Festlegung betreffs Gewichte auch einheitlicher fassen: Man lege um jeden Gitterpunkt einen infinitesimalen Kreis und ordne dem Gitterpunkt als Gewicht den im Innern von P gelegenen Bruchteil der Kreisfläche zu.

Die Summe der Gewichte sämtlicher in P gelegenen Gitterpunkte ist eine Funktion von P und sei mit $G(P)$ bezeichnet. $G(P)$ ist unverändert bei einer Translation von P, deren den Koordinatenachsen parallele Komponenten ganzzahlig sind, ebenso wie die Fläche von P Wenn P und P' nur Randpunkte gemeinsam haben, und $P+P'$ die kleinste Fläche bezeichnet, die sowohl P wie P' enthält, so ist

$$G(P)+G(P')=G(P+P').$$

D. h. $G(P)$ ist additiv, ebenso wie die Fläche von P. Ist P ein Elementardreieck, d. h. ein Dreieck, dessen drei Ecken Gitterpunkte sind, das aber keine weiteren Gitterpunkte enthält, so ist

$$G(P)=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2};$$

die Fläche von P ist bekanntlich[6]) auch $\frac{1}{2}$. Aus der Zerschneidung eines beliebigen P in Elementardreiecke folgt nun das Lemma.

4. Um die erste Hälfte der unter 2 ausgesprochenen Behauptung zu beweisen, betrachte man das abgeschlossene Dreieck, dessen drei Ecken

$$0,0; \quad p,q; \quad p',q'$$

im konvexen Bereich B liegen, u. zw. seien die beiden letztge-

[6]) Vgl. z. B. F. KLEIN. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1894, Bd. I, Einleitung.

nannten sichtbare und in B unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte. $\frac{1}{2}(pq' - p'q)$, der Inhalt des Dreieckes, ist nach Voraussetzung positiv, nicht Null. Die beiden von 0, 0 auslaufenden Seiten des Dreiecks sind, abgesehen von den Endpunkten, von Gitterpunkten frei, da p, q und p', q' sichtbar sein sollen. Das Dreieck ist ganz in B enthalten, da B konvex ist; irgend ein in ihm gelegener Gitterpunkt würde, da er nicht an den von 0, 0 auslaufenden Seiten liegen kann, p, q folgen und p', q' vorangehen. Es soll aber kein solcher Gitterpunkt in B vorhanden sein, und somit ist das Dreieck, abgesehen von den drei Eckpunkten, von Gitterpunkten frei. Es ist, was wir ein Elementardreieck nannten, und somit ist sein Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}(pq' - p'q) = \frac{1}{2},$$

w. z. b. w.

5. Nun betrachten wir die zweite Annahme betreffend die Gestalt von B. Ist p, q ein zu B gehöriger Gitterpunkt, so gehört das abgeschlossene Rechteck mit den vier Ecken

$$0, 0; \quad p, 0; \quad p, q; \quad 0, q$$

ganz dem Bereiche B an. Die kleinste Fläche, die alle solchen Rechtecke enthält, sei B^* genannt. B^* ist ein Teil von B, und zwar im allgemeinen ein eigentlicher Teil, aber enthält alle Gitterpunkte, die B enthält. B^* genügt übrigens derselben Voraussetzung, als B (die zugehörige monotone Funktion $f^*(x)$ ist streckenweise konstant). Es genügt den Satz für B^* zu bewiesen. Man bemerke, dass B^* ein abgeschlossener Bereich ist.

Man betrachte das abgeschlossene Dreieck, dessen drei Ecken

$$0, 0; \quad p, q; \quad p', q'$$

in B^* liegen, u. zw. seien die beiden letztgenannten sichtbare und in B^* unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte. Der Punkt p, q (wie auch p', q') kann eventuell Randpunkt von B^* sein; jedoch kann die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit 0, 0, als Diagonale eines bei der Konstruktion verwendeten Rechtecks, abgesehen eventuell von den Endpunkten, keine Randpunkte von B^* enthalten. Würde das betrachtete Dreieck überhaupt Randpunkte von B^* enthalten, so müsste die treppenförmige Randlinie durch die Verbindungslinie von p, q und p', q' eintreten und wieder hinaustreten (Eintritt- und Austrittpunkt könnten auch zusammenfallen) und so eine (einspringende) Ecke im Dreieck besitzen. Diese wäre jedoch ein Gitterpunkt in B^*, der p, q folgt und p', q' vorangeht, was ausgeschlossen ist. Somit liegt das Dreieck ganz in B^* und der Beweis wird wie unter 4 zu Ende geführt.

6. *Falsch* ist jedoch der folgende Satz[7]: Das Gebiet B_0 sei sternförmig vom Punkt 0, 0 aus gesehen, d. h. jeder von 0, 0 auslaufende Halbstrahl hat mit B_0 eine in 0, 0 anfangende volle Strecke gemeinsam. Ferner sei B_0 so beschaffen, dass für irgend zwei in B_0 liegende sichtbare, darin unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte p, q und p', q' die Relation

$$pq' - p'.q = 1$$

besteht. Dann besteht dieselbe Relation für irgend zwei in B liegende sichtbare, darin unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte p, q und p', q', falls B zu B_0 ähnlich und ähnlich gelegen ist, mit dem Punkt 0, 0 als Ähnlichkeitszentrum.

Gegenbeispiel: Man verbinde geradlinig den Punkt 1, 0 mit 1, $\frac{1}{2}$ und den letzteren mit $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Durch achtmalige Spiegelung dieses Streckenzuges an den beiden Koordinatenachsen und deren Halbierungslinien erhält man ein geschlossenes Polygon; der umschlossene „ordenskreuzförmige" Bereich B_0 erfüllt die Voraussetzung. Dehnt man die Linearabmessungen von B_0 bei Festhaltung des Nullpunktes und der Richtungen im Verhältnis 1 : 2, so erhält man einen Bereich B, der die Behauptung nicht erfüllt.

---

[7]) Sylvester scheint ähnliches a. a. O. zu behaupten und sogar beweisen zu wollen.

Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprocitätssatzes.

Von Ladislaus Rédei in Budapest.

Den nachfolgenden Beweis des quadratischen Reziprocitätssatzes möchte in veröffentlichen, da dieser sich von den bekannten meines Wissens principiell unterscheidet. Wir könnten alle Paare (p, q) der ungeraden Primzahlen gleichzeitig behandeln, doch wollen wir den Fall $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$ vorausschicken, da er besonders interressant ist und auch den Beweis des allgemeinen Falles beleuchtet.

1°. Es seien p, q verschiedene ungerade Primzahlen und $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$. Es sei $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Symbol von Legendre und $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, wenn $a \equiv 0 \pmod{p}$. Es bedeute n_{pq} die Anzahl der mod. pq quadratischen Reste in der ersten Hälfte des kleinsten nichtnegativen Restsystems von pq. Dann hat man:

$$n_{pq} = \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \frac{1 + \left(\frac{i}{p}\right)}{2} \, \frac{1 + \left(\frac{i}{q}\right)}{2},$$

wo $(pq)'$ anstatt $\frac{pq-1}{2}$ gesetzt ist und der Strich neben Σ die Auslassung der zu pq nicht relativ primen Werte bedeutet.

Für die in der Rede stehenden Summationswerte hat man $\sum' 1 = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ und $\sum \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i}{q}\right) = 0$, da $\left(\frac{pq-i}{p}\right) = \left(\frac{-i}{p}\right) = -\left(\frac{i}{p}\right)$ und $\sum_{i=1}^{pq-1}{}' \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i}{q}\right) = 0$. Es ist also:

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left(\frac{i}{p}\right) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left(\frac{i}{q}\right).$$

Man sieht leicht, dass

$$\sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left(\frac{i}{p}\right)=\sum_{i=1}^{(pq)'}\left(\frac{i}{p}\right)-\sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p\,.\,i}{p}\right)-\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{q\,.\,i}{p}\right). \tag{A}$$

Des erste Glied der rechten Seite:

$$\sum_{i=1}^{(pq)'}\left(\frac{i}{p}\right)=\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{i}{p}\right),$$

da $(pq)'=\frac{pq-1}{2}\equiv\frac{p-1}{2}$ (mod. p) wegen $\sum_{i=a+1}^{a+p}\left(\frac{i}{p}\right)=0$, das zweite Glied ist gleich Null, das dritte ist offenbar das $\left(\frac{q}{p}\right)$-fache des ersten. Man hat also, wenn man das dritte Glied so umgeformt hat, wie das zweite:

$$n_{pq}=\frac{(p-1)(q-1)}{8}+\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4}\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{i}{p}\right)+\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4}\sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{i}{q}\right).[1]$$

Die hier auftretende beide Summen sind ungerade Zahlen, da so $\frac{p-1}{2}$, wie $\frac{q-1}{2}$ ungerade sind. Mit n_{pq} ist also auch $\frac{(p-1)(q-1)}{8}+\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4}+\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4}$ eine ganze Zahl und damit ist der Satz für den jetzt behandelten Fall bewiesen.[2]

2°. Es sei p, q ein beliebiges Paar der verschiedenen Primzahlen (wir wollen also den vorher behandelten Fall nicht ausschliessen). Es sei $\frac{p-1}{2^e}$ eine ungerade Zahl, g eine primitive

---

[1]) Auf diese Formel bzw. auf ihre Verallgemeinerung gedenke ich an anderer Stelle zurückzukommen.

[2]) Es sei nämlich der zuletzt vorgekommene Ausdruck eine ganze Zahl, also $\frac{(p-1)(q-1)}{4}\equiv\frac{\left(\frac{q}{p}\right)-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}$ (mod. 2). Quadriert man die rechte Seite (es ist $a^2\equiv a$ (mod. 2)), formt man die linke Seite nach $x\equiv\frac{1-(-1)^x}{2}$ (mod. 2) um und multipliziert man mit 2, so bekommt man:
$1-(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}\equiv 1-\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$ (mod. 4), also: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=$ $=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$. Diese ist die gevöhnliche Form des quadratischen Reziprozitätssatzes.

Wurzel der Kongruenzgleichung $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ und α eine (komplexe) primitive Einheitswurzel 2^e-ten Grades. Wir definieren das Symbol $\left[\frac{a}{p}\right]$ für jede razionale ganze Zahl a folgendermassen: Es sei $\left[\frac{a}{p}\right] = \alpha^{\mathrm{ind.}\,a}$, wo $g^{\mathrm{ind.}\,a} \equiv a \pmod{p}$, wenn $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $\left[\frac{pa}{p}\right] = 0$. Dann gilt: $\left[\frac{a}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right] = \left[\frac{ab}{p}\right]$ und $\left[\frac{a}{p}\right]^{2^{e-1}} = (-1)^{\mathrm{ind.}\,a} = \left(\frac{a}{p}\right)$. Übrigens hat man $\left[\frac{a}{p}\right] = 1$ dann und nur dann, wenn a ein Potenzwert 2^e-ten Grades ist.

Als e, g, α zu p gehören, so sollen f, h, β zu q gehören.

Das Zahlenpaar $\left(\left[\frac{a}{p}\right], \left[\frac{a}{q}\right]\right)$ werden wir den Karakter von a nennen.

Bedeutet $n_{p,\,q}^{r,\,s}$ die Anzahl der Zahlen mit dem Karakter $(\alpha^{-r}, \beta^{-s})$ in der ersten Hälfte des kleinsten nichtnegativen Restsystems der Zahl pq, so sieht man leicht, dass

$$n_{p,\,q}^{r,\,s} = \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left(\frac{1}{2^e}\sum_{\mu=0}^{2^e-1}\left(\alpha^r\left[\frac{i}{p}\right]\right)^{\mu}\right)\left(\frac{1}{2^f}\sum_{\nu=0}^{2^f-1}\left(\beta^s\left[\frac{i}{q}\right]\right)^{\nu}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{e+f}}\sum_{\mu=0}^{2^e-1}\sum_{\nu=0}^{2^f-1}\alpha^{\mu r}\beta^{\nu s}\sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left[\frac{i}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{i}{q}\right]^{\nu}. \tag{1}$$

Abgesehen vom Falle $\mu = \nu = 0$, gibt es immer eine rationale ganze Zahl c, die zu pq relativ prim ist und für welche $\left[\frac{c}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{c}{q}\right]^{\nu} = \gamma \neq 1$ (z. B. wenn $\mu \neq 0$, so wähle man $c \equiv g \pmod{p}$, $c \equiv 1 \pmod{q}$) und also in diesem Falle $\sigma = \sum_{i=1}^{pq-1}{}'\left[\frac{i}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{i}{q}\right]^{\nu} = 0$, denn die Summe ändert sich nicht, wenn man $c\,i$ an Stelle von i setzt, während sie sich mit γ multipliziert. Ferner hat man in diesem Falle:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left[\frac{i}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{i}{q}\right]^{\nu} + \sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left[\frac{pq-i}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{pq-i}{q}\right]^{\nu} =$$

$$= (1+(-1)^{\mu+\nu})\sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left[\frac{i}{p}\right]^{\mu}\left[\frac{i}{q}\right]^{\nu} = 0. \tag{B}$$

In dem Ausdrucke (1) von $n_{p,q}^{r,s}$ verschwinden also die Glieder, die zu einem solchen Indizespaare (μ, ν) gehören, bei dem $\mu + \nu$ gerade und von Null verschieden ist. Folglich:

$$n_{p,q}^{r,s} = \frac{(p-1)(q-1)}{2^{e+f+1}} + \frac{1}{2^{e+f}} \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu+\nu \text{ ungerade})}}^{2^e-1} \sum_{\nu=0}^{2^f-1} \alpha^{\mu r} \beta^{\nu s} \sum_{i=1}^{(pq)'} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu.$$

Nun summiere man nach r von 0 bis $2^{e-1}-1$ und nach s von 0 bis $2^{f-1}-1$, dann verschwinden wegen der Summation nach r und s, nach einer bekannten Eigenschaft der Einheitswurzeln, die Glieder, die zu einem solchen Indicespaare (μ, ν) gehören, bei dem entweder μ gerade und $\neq 0$, oder ν gerade und $\neq 0$; es können also nur Glieder mit den Indices $(0, 1), (0, 3), \ldots; (1, 0), (3, 0), \ldots$ bleiben, also

$$n_{pq} = \Sigma n_{p,q}^{r,s} = \frac{(p-1)(q-1)}{2^3} +$$

$$+ \frac{1}{2^{e+f}} \sum_{\substack{\mu=1 \\ (\mu \text{ ungerade})}}^{2^e-1} \sum_{r=0}^{2^{e-1}-1} \sum_{s=0}^{2^{f-1}-1} \alpha^{\mu r} \sum_{i=1}^{(pq)'} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu + (\ldots),$$

wo $(\ldots)$ das bedeutet, was man aus dem ihn vorhergehenden Gliede enthält, wenn man statt p und statt die zu p gehörigen Zahlen bzw. q und die zu q gehörigen Zahlen schreibt.

Vollführt man die Summation nach s, formt man die Summe nach i so um, wie im vorigen Paragraphen bei (A), [N. b. $\sum_{i=a+1}^{a+p} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu = 0$ ergibt sich so, wie bei (B)] so bekommt man:

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{2^{e+1}} \sum_{\substack{\mu=1 \\ (\mu \text{ ungerade})}}^{2^e-1} \sum_{r=0}^{2^{e-1}-1} \alpha^{\mu r} \left(1 - \left[\frac{q}{p}\right]^\mu\right) \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu + (\ldots).$$

Man vollführe die Summation nach r, (Rücksicht genommen auf $\alpha^{2^{e-1}} = -1$), setzen wir ind. $q = x$, also $\left[\frac{q}{p}\right] = \alpha^x$, so bekommt man:

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{2^e} \sum_{\substack{\mu=1 \\ (\mu \text{ ungerade})}}^{2^e-1} \frac{1-\alpha^{\mu x}}{1-\alpha^\mu} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu + (\ldots).$$

Es bedeute a_m bzw. a'_m die Anzahl derjenigen Zahlen a in der Folge $1, \ldots, \frac{p-1}{2}$ bzw. $\frac{p+1}{2}, \ldots, p-1$, für welche $\left[\frac{a}{p}\right] = \alpha^m$, so ist:

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{i}{p}\right]^{\mu} = \sum_{m=0}^{2^e-1} a_m\, \alpha^{\mu m}.\text{[3]}$$

Setzt man das in die vorige Formel ein und führt man im so erhaltenen Ausdrucke die Division aus, so bekommt man:

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{2^e} \sum_{r=0}^{x-1} \sum_{m=0}^{2^e-1} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} a_m\, \alpha^{(r+m)\mu} + (\ldots).$$

Hier ist das Glied mit dem Indizespaare (r, m) gleich Null, abgesehen vom Falle, als 2^{e-1} in $r+m$ aufgeht; diese letzte Bedingung ordnet zu einem jeden r zwei Werte — m_r, $m_r + 2^{e-1}$ — von m zu, und so bekommen wir nach der Summation nach μ:

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{x-1} (\varepsilon\, a_{m_r'} + \eta\, a_{m_r + 2^{e-1}}) + (\ldots),$$

wo $\varepsilon, \eta = \pm 1$. Da n_{pq} eine ganze Zahl ist, so steht an der rechten Seite eine ganze Zahl auch dann, wenn man $\varepsilon = \eta = 1$ setzt. Der Summand ist dann nach der dritten Fussnote ersichtlich eine ungerade Zahl, es ist also

$$\frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{x}{2} + (\ldots)$$

eine ganze Zahl. Da $x \equiv \frac{1-(-1)^x}{2} \equiv \frac{1-(-1)^{\text{Ind. } q}}{2} \equiv \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{2}$ (mod. 2), so ist

$$\frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4} + \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4}$$

ganz, woraus der Satz folgt, nach der zweiten Fussnote.

---

[3]) Offenbar ist $a_m + a_m'$ gleich der Anzahl derjenigen Glieder in der Folge $1, \ldots, p-1$, für welchen $\left[\frac{a}{p}\right] = \alpha^m$; d. h. $a_m + a_m' = \frac{p-1}{2^e}$. Anderseits ist $a_m' = a_{m+2^{e-1}}$, da $\left[\frac{p-i}{p}\right] = -\left[\frac{i}{p}\right] = \alpha^{2^{e-1}} \left[\frac{i}{p}\right]$, es ist also $a_m + a_{m+2^{e-1}} = \frac{p-1}{2^e}$ eine ungerade Zahl.

Über die Variation von Doppelintegralen mit variierender Begrenzungslinie.[1])

Von EUGEN GERGELY.

Einleitung.

Im Falle des einfachsten Variationsproblems (bei vorgeschriebenen Randwerten)

$$\iint\limits_T f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \text{Min.}$$

bewies A. HAAR,[2]) dass die gesuchte Funktion: $z = z(x\,y)$ dem folgenden partiellen Differentialgleichungsystem genügt:

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\, \partial y},$$

wo $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$ im Gebiete T einmal stetig differenzierbare Hilfsfunktionen sind und wo ausserdem auch $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\, \partial y}$ existiert und stetig ist. (Wenn das Integral z nicht enthält, so ist $\Omega \equiv 0$.)

Die Ableitung dieses Resultates erfolgt *ohne Voraussetzung der Existenz der zweiten Ableitungen* der Extremalfunktion $z = z(x, y)$ mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in einem Gebiete T stetige Funktionen und ist

$$\iint\limits_T \left(u\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\,\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx\, dy = 0$$

---

[1]) Auszug aus einer der Math.-Naturwissenschaftlichen Fakultät der kgl. Franz Josef Universität in Szeged vorgelegten Inauguraldissertation.

[2]) „Über die Variation der Doppelintegrale." Journal für Math. Bd. 149. S. 1—18.

für alle $\zeta(x, y)$, welche an der Begrenzung dieses Gebietes verschwinden und in seinem Innern einmal stetig differenzierbar sind, dann verschwindet das Integral

$$\int_C (u\,dy - v\,dx)$$

für jeden im Innern des Gebietes liegende geschlossene Integrationsweg C. Mit anderen Worten: es existiert eine einmal stetig differenzierbare Funktion $\omega(x, y)$, für welche

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y) \qquad \textit{ist.}$$

Wir wollen das partielle Differentialgleichungsystem (1) auf die Variation von Doppelintegralen mit variierender Begrenzungslinie anwenden. Die gewonnenen Resultate sind nicht neu, bei ihrer Ableitung wird aber die *Existenz der zweiten Ableitungen der gesuchten Funktion nicht vorausgesetzt,* was bei den bisherigen Ableitungen stets vorausgesetzt war.

§ 1.

Ein Variationsproblem von Doppelintegralen mit variabler Begrenzungslinie.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Variationsproblem

$$I = \iint_T f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy = \text{Min.},$$

wo die Fläche $z(x, y)$ der Bedingung unterworfen ist, dass ihre Begrenzungslinie auf einem zur (x, y) Ebene senkrechten Zylinder liegt.

Es seien $\qquad x = x(s), \quad y = y(s)$

— wo $x(s)$, $y(s)$ stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind — die Gleichungen der geschlossenen Grundkurve K des Zylinders und es sei T das Innere der Kurve K, so genügt die gesuchte Funktion $z(x, y)$ — wie bekannt — den Gleichungen (1), da unsere Extremalfunktion a fortiori ein Minimum liefern muss, falls man zur Konkurrenz nur solche Funktionen zulässt, die auf K dieselben Randwerte als $z(x, y)$ annehmen. Daher ist im vorliegenden Falle

$$\delta I = \iint\limits_T \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta \right] dx\, dy = 0,$$

für *alle* im Gebiete T stetig differenzierbare Funktionen $\zeta = \zeta(x, y)$.

Diese Form der ersten Variation lässt sich als die Summe von zwei Integralen schreiben:

$$\delta I = I_1 + I_2 = \iint\limits_T \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta \right] dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_T \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dx\, dy = 0,$$

wo beide Integrale sich noch weiter vereinfachen lassen.

Aus den Gleichungen

$$\iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)}{\partial x} dx\, dy - \iint\limits_T \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\, dy$$

$$\iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)}{\partial y} dx\, dy - \iint\limits_T \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\, dy$$

folgt durch Addition:

$$2 \iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \left[\frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dx\, dy -$$

$$- \iint\limits_T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= - \iint\limits_T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy + \int\limits_K \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy - \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx \right).$$

I_1 hat also die Form:

$$\int\limits_K \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy - \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx \right) = \int\limits_0^S \zeta(s) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right] ds,$$

wo S die Bogenlänge der Kurve K bedeutet.

Das Integral I_2 lässt sich folgenderweise umformen:

$$I_2 = \iint\limits_T \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_T \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{F_\zeta} \left[- \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(n, y) \right] do,$$

wo F_ζ die Fläche $\zeta = \zeta(x, y)$ und n die nach oben gerichtete Normale der Fläche F_ζ bedeutet. Dieses Integral lässt sich mit Hilfe des Satzes von Stokes auf die folgende Form bringen:

$$I_2 = - \int\limits_{K_\zeta} \omega\, dz\,,$$

wo K_ζ die Begrenzungslinie der Fläche $\zeta(x, y)$ ist. In der Tat, es gilt nach dem erwähnten Satze

$$\iint\limits_F \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right] do = - \int\limits_K (P\, dx + Q\, dy + R\, dz),$$

wo $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ und $R(x, y, z)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und K die Begrenzung, n die Normale der Fläche F bedeutet. Setzen wir

$$P \equiv Q \equiv 0, \quad R = \omega, \quad F = F_\zeta$$

so erhalten wir I_2 in der erwähnten Form.

Die Funktionen ω und ζ spielen übrigens — abgesehen vom Vorzeichen — eine symmetrische Rolle und es lässt sich I_2 auch in der Form

$$I_2 = \int\limits_{K_\omega} \zeta\, dz$$

schreiben, wo K_ω die Begrenzung der Fläche $\omega = \omega(x, y)$ ist.

Die für I_2 gewonnene Formel

$$I_2 = -\int_0^S \omega[x(s), y(s)] \frac{d\zeta[x(s), y(s)]}{ds} ds = -\int_0^S \omega(s)\zeta'(s)\, ds$$

führt man durch partielle Integration — die erlaubt ist, da $\omega(x, y)$ ein stetig differenzierbare Funktion ist — in die folgende Form über:

$$I_2 = \int_0^S \omega'(s)\zeta(s)\, ds.$$

Das vom Integralzeichen freie Glied ist Null, da ζ und ω für $s = 0$ und $s = S$ dieselben Werte annehmen.

Das Verschwinden der ersten Variation ist daher in unserem Problem durch die folgende Gleichung formuliert:

$$(2) \quad \delta I = I_1 + I_2 = \int_0^S \zeta(s) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \omega'(s)\right] ds = 0,$$

die für *alle* stetig differenzierbare Funktionen $\zeta(s)$ gilt, welche der Bedingung

$$\zeta(0) = \zeta(S)$$

genügen. Beschränken wir uns auf Funktionen, für welche

$$\zeta(0) = \zeta(S) = 0$$

ist, so erhalten wir aus (2) mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung,

$$(3) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y} y'(s) - \frac{\partial \Omega}{\partial x} x(s) + \omega'(s) \Big|^K = 0.$$

Ersetzt man darin $\omega'(s) = \frac{\partial \omega}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial \omega}{\partial y} y'(s) \Big|^K$ durch

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) x'(s) + \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) y'(s) \Big|^K,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial p} y'(s) - \frac{\partial f}{\partial q} x'(s) \Big|^K = 0.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Grenzgleichung des Problems, die wir, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen anzunehmen, bewiesen haben.

§ 2.

Die Variation von Doppelintegralen mit variabler Begrenzung in Parameterdarstellung.

Mit Anwendung des Lemmas von A. HAAR auf das Variationsproblem in Parameterdarstellung

$$I = \iint_T F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, du\, dv = \text{Min.}$$

ergibt sich sofort das folgende partielle Differentialgleichungsystem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_u} = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_v} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_u} = \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_v} = -\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial u\, \partial v};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_u} = \frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_v} = -\frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u\, \partial v},$$

wo $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}, \Omega, \overline{\Omega}, \overline{\overline{\Omega}}$ im Gebiete T einmal bzw. zweimal stetig differenzierbare Hilfsfunktionen von u und v sind.

Wir beschäftigen uns mit dem Fall, wo die Begrenzungslinie der Fläche

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

auf einer gegebenen Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

liegt, und nehmen an, dass $\varphi(x, y, z)$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Es seien

$$x = X(u, v; \varepsilon), \quad y = Y(u, v; \varepsilon), \quad z = Z(u, v; \varepsilon)$$

die Gleichungen einer einparametrigen Schar von variierten Flächen mit dem Parameter ε; die in Betracht kommende Werte u, v liegen im Gebiete T. Sind $u = u(t)$, $v = v(t)$ die Gleichungen der Begrenzungslinie K von T, wo u und v stetig differenzierbare Funktionen von t sind und $u'(t)^2 + v'(t)^2 \neq 0$ ist, und bedeuten X_K, Y_K, Z_K die Werte der Funktionen X, Y, Z auf der Kurve K, so hat die Bedingung die Form

$$\varphi(X_K, Y_K, Z_K) = 0.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\xi = X_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \eta = Y_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta = Z_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$$

und bezeichnen mit ξ_K, η_K, ζ_K die Werte der Funktionen ξ, η, ζ auf

K, so folgt aus der letzten Bedingung durch Differentiation

(4) $$\varphi_x \xi_K + \varphi_y \eta_K + \varphi_z \zeta_K \Big|^K = 0.$$

Die erste Variation des vorgelegten Integrals lässt sich nach der in § 1 erwähnten Umformung in der folgenden Form schreiben:

$$\delta I = \int_K \Big[\xi_K \Big(\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) \Big) +$$
$$+ \eta_K \Big(\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u} u' + \overline{\omega}'(s) \Big) +$$
$$+ \zeta_K \Big(\frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u} u' + \overline{\overline{\omega}}'(s) \Big) \Big] ds = 0.$$

Multipliziert man die Gleichung (4) mit einer willkürlichen Funktion $\lambda(s)$, integriert auf K und addiert dieses Integral zu δI, so erhält man

$$\int_K \sum \xi_K \Big(\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) + \lambda \varphi_x \Big) ds = 0,$$

wobei die Summation sich auf eine Vertauschung der Buchstaben ξ_K, η_K, ζ_K; $\Omega, \overline{\Omega}, \overline{\overline{\Omega}}$; $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}$ bzw. $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ bezieht.

Von den drei Funktionen ξ_K, η_K, ζ_K kann man zwei willkürlich wählen, die dritte ist dann durch die Gleichung (4) bestimmt. Daraus folgt — nach der bekannten Multiplikatorenmethode — die Existenz einer Funktion ν, so dass die Faktoren von ξ_K, η_K, ζ_K einzeln verschwinden. So erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) + \lambda(s) \varphi_x \Big|^K = 0$$
$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u} u' + \overline{\omega}'(s) + \lambda(s) \varphi_y \Big|^K = 0$$
$$\frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u} u' + \overline{\overline{\omega}}'(s) + \lambda(s) \varphi_z \Big|^K = 0,$$

und aus diesen Gleichungen folgen — analog, wie am Ende des des § 1 — die weiteren:

$$F_{x_u} v' - F_{x_v} u' + \lambda \varphi_x \Big|^K = 0$$
$$F_{y_u} v' - F_{y_v} u' + \lambda \varphi_y \Big|^K = 0$$
$$F_{z_u} v' - F_{z_v} u' + \lambda \varphi_z \Big|^K = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen u', v' und λ, so erhält man die Grenzbedingung des vorgelegten Variationsproblems:

$$\left| \begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} \right|^{K} = 0,$$

die hier — entsprechend dem Ziele dieser Arbeit — abgeleitet wurde ohne die Existenz der zweiten Differentialquotienten der Extremalfunktion vorauszusetzen.

Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme.

Von Tibor Radó in Szeged, Ungarn.

1. In dieser Theorie unterscheidet man bekanntlich *Funktionenprobleme,* bei welchen eine Funktion $z(x, y)$ zu bestimmen ist, und *Flächenprobleme,* bei welchen es sich um die Bestimmung einer Fläche in allgemeiner Parameterdarstellung handelt.[1]) In dieser Note betrachten wir das folgende

Funktionenproblem. Es sei $f(p, q)$ eine für alle reelle Werte der Argumente eindeutig erklärte, etwa analytische Funktion. Sei ferner C eine einfache geschlossene Kurve in der xy-Ebene, und man betrachte die Gesamtheit der Funktionen $z(x, y)$, welche im Innern dieser Kurve eindeutig und *einmal* stetig derivierbar sind, und auf der Kurve C dieselben vorgeschriebenen Werte annehmen. Es werde angenommen, dass unter diesen Konkurrenzfunktionen eine solche gibt, für welche das über das Innere von C erstreckte Doppelintegral

$$\iint f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

einen kleinstmöglichen Wert annimmt.

Für diese Extremalfunktion sollen partielle Differentialgleichungen abgeleitet werden.

In der Folge soll der Ausdruck *Funktionenproblem* stets in diesem Sinne verstanden werden, wobei also der Nachdruck auf dem Umstande liegt, dass die Extremalfunktion nur stetige Ableitungen *erster* Ordnung zu haben braucht, die Existenz höherer Ableitungen wird nicht vorausgesetzt. Die Extremalfunktion be-

[1]) Vgl. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, p. 652.

zeichnen wir mit $z^{(0)}$, ihre Ableitungen erster Ordnung mit $p^{(0}$ und $q^{(0)}$.

Wir erinnern nun daran, dass in der klassischen Theorie stets vorausgesetzt wird, dass die Extremalfunktion zweimal stetig derivierbar ist. Unter dieser keineswegs sachgemässen Annahme leitet man für die Extremalfunktion in bekannter Weise die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung her:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_q)+\frac{\partial}{\partial x}(f_p)=f_{pp}\,r+2f_{pq}\,s+f_{qq}\,t=0. \qquad \text{(I)}$$

Es war Herr A. HAAR der erste, welcher ohne Voraussetzung der Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung Differentialgleichungen erster Ordnung für die Extremale erhielt. Er fand zwei Gleichungen, in welchen ausser der Extremalfunktion eine Hilfsfunktion $\omega(x,y)$ vorkommt, und welche wie folgt lauten:[2])

$$f_q=\frac{\partial\omega}{\partial x},f_p=-\frac{\partial\omega}{\partial y}. \qquad \text{(II)}$$

Diese Gleichungen erster Ordnung drücken dieselbe Tatsache aus wie die Gleichung zweiter Ordnung (I), dass nämlich der Ausdruck

$$f_q\,dx-f_p\,dy$$

ein *vollständiges Differential* sein muss.

2. Wenn es sich um ein Flächenproblem handelt, so kann man die Extremalfunktion, anschaulich zu reden, nicht nur in der z-Richtung, sondern auch in den x- und y-Richtungen variieren, und die HAARsche Methode ergibt dann *drei* Gleichungspaare. Ich habe aus diesen Gleichungspaaren für das Variationsproblem der Minimalflächen in einfachster Weise den Schluss ziehen können, dass jede einmal stetig derivierbare Fläche, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt, analytisch ist.[3]) Auf Anregung des Herrn A. HAAR habe ich nun die Frage untersucht, ob man auch im Falle eines Funktionenproblems weitere Gleichungspaare für die Extremalfunktion erhalten kann. Durch Betrachtung geeigneter Variationen ergab sich, dass dies in der Tat möglich ist. Das Ergebnis sprechen wir im folgenden Satze aus:

---

[2]) A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, Journal für Mathematik Bd. 149 (1919), p. 1—18.

[3]) Über den analytischen Charakter der Minimalflächen, erscheint in der Math. Zeitschrift.

Satz A) *Die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$ befriedigt, zusammen mit drei Hilfsfunktionen $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y)$, $\omega_3(x,y)$, welche in Innern der Randkurve C einmal stetig derivierbar sind, die folgenden drei Paare von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$p^{(0)} f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad f(p^{(0)}, q^{(0)}) - p^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \qquad (\mathrm{III}_1)$$

$$f(p^{(0)}, q^{(0)}) - q^{(0)} f_q p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad q^{(0)} f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \qquad (\mathrm{III}_2)$$

$$f_q(p^{(0)}, q^{(0)}) = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \quad f_p(p^{(0)}, q^{(0)}) = -\frac{\partial \omega_3}{\partial y}. \qquad (\mathrm{III}_3)$$

Das dritte Gleichungspaar ist durch Herrn A. HAAR abgeleitet worden. Wir wollen sofort bemerken, dass wenn die Extremalfunktion *zweimal* stetig derivierbar ist, dieses Gleichungssystem mit einer einzigen Gleichung gleichwertig ist, nämlich mit der LAGRANGEschen Gleichung des Problems. Unter Voraussetzung der Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung folgert man in der Tat aus den Gleichungen (III):

$$\frac{\partial}{\partial y}(p^{(0)} f_q) - \frac{\partial}{\partial x}(f - p^{(0)} f_p) = p^{(0)}(f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f - q^{(0)} f_q) - \frac{\partial}{\partial x}(q^{(0)} f_p) = -q^{(0)}(f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_q) + \frac{\partial}{\partial x}(f_p) = f_{pp} r^{(0)} + 2 f_{pq} s^{(0)} + f_{qq} t^{(0)} = 0,$$

wobei $r^{(0)}, s^{(0)}, t^{(0)}$ die Ableitungen zweiter Ordnung von $z^{(0)}$ bedeuten. Die dritte Gleichung ist die LAGRANGEsche, die beiden ersten sind offenbar Folgen der dritten. Ob eine derartige Abhängigkeit auch für die Gleichungspaare (III) erwiesen werden kann, natürlich ohne Voraussetzung der Existenz von $r^{(0)}, s^{(0)}, t^{(0)}$, scheint keine ganz leichte Frage zu sein. Solange dieser Punkt nicht aufgeklärt ist, dürfte es vorteilhaft sein, die drei Gleichungspaare (III) gleichzeitig zu verwenden.

3. Bevor wir zur Herleitung dieser Gleichungen übergehen, betrachten wir etwas genauer den einfachen und wichtigen Fall

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

welcher bekanntlich auf die Minimalflächen führt. Wenn wir die Bezeichnung

$$W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}, \quad W^{(0)} = (1 + (p^{(0)})^2 + (q^{(0)})^2)^{1/2}$$

einführen, so lauten die Gleichungen (III):

$$\begin{aligned} \frac{p^{(0)} q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, & \frac{1+(q^{(0)})^2}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \\ \frac{1+(p^{(0)})^2}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, & \frac{p^{(0)} q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \\ \frac{q^{(0)}}{W^{(0)}} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, & \frac{p^{(0)}}{W^{(0)}} &= -\frac{\partial \omega_3}{\partial y} \end{aligned} \tag{IV}$$

Es ist nun l. c.[3]) gerade gezeigt worden, dass jede in einem Gebiete einmal stetig derivierbare Funktion, welche zusammen mit drei Hilfsfunktionen das System (IV) befriedigt, analytisch ist. Wir haben also den Satz:

S a t z B) *Handelt es sich speziell um das Funktionenproblem mit*

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

so ist die Extremalfunktion analytisch.

An diesem Satze ist bereits interessant, dass überhaupt die Existenz der Ableitungen zweiter und höherer Ordnung behauptet werden kann. Wir bemerken noch, dass Satz B) inhaltlich nicht identisch mit dem l. c.[3]) bewiesenen Satze ist, welcher die Analytizität der einmal stetig derivierbaren Flächen gewährleistet, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt haben. Die Extremalfunktion des Funktionenproblems mit

$$f(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$$

definiert nämlich ein Flächenstück, welches nur *im Vergleich mit gewissen besonderen Flächen* einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt, und zwar im Vergleich mit denjenigen Flächen, welche *im Grossen* durch eine Gleichung $z = z(x, y)$ dargestellt werden können, unter $z(x, y)$ eine *eindeutige* Funktion verstanden.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Gleichungspaare (III) kann im vorliegenden Falle wie folgt formuliert werden:

Sei $z^{(0)}(x, y)$ eine einmal stetig derivierbare Funktion, welche zusammen mit einer einmal stetig derivierbaren Hilfsfunktion das dritte Gleichungspaar (IV) befriedigt. Kann man dann die Existenz von zwei weiteren Hilfsfunktionen behaupten, welche zusammen mit $z^{(0)}(x, y)$ die beiden ersten Gleichungspaare (IV) befriedigen? Oder: kann man aus dem dritten Gleichungspaare (IV) allein Schlüsse über die Existenz der zweiten Ableitungen von $z^{(0)}(x, y)$ ziehen?

Es möge noch eine interessante Folgerung negativen Charakters erwähnt werden, die sich aus Satz B) ergibt, dass nämlich *bei dem Funktionenproblem mit*

$$f(p,q) = (1+p^2+q^2)^{1/2}$$

im Allgemeinen keine (einmal stetig derivierbare) *Extremalfunktion existiert,* während für das entsprechende PLATEAUsche Flächenproblem die Existenz der Extremalfläche physikalisch evident ist. Aus Satz B) folgt zunächst, dass die Extremalfunktion gewiss stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, und demzufolge der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen genügt. Sie liefert also eine im Innern der Randkurve C reguläre Lösung dieser Gleichung, welche auf der Kurve C vorgeschriebene Randwerte annimmt. Die *Nichtexistenz im Allgemeinen der Extremalfunktion* folgt nun einfach daraus, dass die Randwertaufgabe der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen im Allgemeinen keine Lösung hat. Auf diese wichtige Tatsache scheint zuerst Herr S. BERNSTEIN hingewiesen zu haben.[4])

4. Wir wollen nun Satz A) beweisen. Das Gleichungspaar (III_8) ist, wie bereits erwähnt, von Herrn A. HAAR abgeleitet worden, durch Betrachtung der üblichen Variationen, anschaulich gesprochen, in der z-Richtung. Da wir nun mit *Funktionenproblemen* zu tun haben, so können wir die bei *Flächenproblemen* zulässigen Variationen in den x- bzw. y-Richtungen nicht anwenden. Wir werden uns der Methode der *Variation der unabhängigen Variabeln* bedienen, *„die bei den älteren Autoren über Variationsrechnung eine grosse Rolle gespielt hat. Sie hat viel Unklarheit in die Variationsrechnung gebracht,"*[5]) und deswegen wollen wir den an sich sehr einfachen Gedankengang mit der grössten Sorgfalt darstellen.

Wir zeichnen einen Kreis K, welcher ganz innerhalb der Kurve C liegt, und werden die Extremalfunktion $z^{(0)}$ innerhalb dieses Kreises in geeigneter Weise variieren. Zu dem Ende nehmen wir eine Funktion $t(x, y)$ an, die innerhalb K einmal stetig differenzierbar ist, auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet, sonst aber ganz beliebig ist. Mit M bezeichnen wir eine positive Konstante, so dass in K

---

[4]) S. BERNSTEIN, Sur les équations du calcul des variations, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3. série, tome XXIX (1912), vgl. insbesondere p. 469.

[5]) Siehe l. c. [1]), p. 49. Fussnote

$$\left|\frac{\partial t}{\partial x}\right| < M \tag{1}$$

gilt, und führen weiter einen reellen Parameter ε ein, welcher auf das Intervall

$$-\frac{1}{2} M < \varepsilon < \frac{1}{2} M \tag{2}$$

beschränkt wird. Es gilt also:

$$1 + \varepsilon \frac{\partial t}{\partial x} > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Nunmehr nehmen wir eine zweite Koordinatenebene (u, v) an, und zeichnen in derselben einen Kreis K^*, welcher aus dem Kreise K durch die Transformation $T_0 : x = u, y = v$ hervorgeht, also in Bezug auf das System (u, v) die gleiche Lage hat, wie der Kreis K in Bezug auf das System (x, y). Mit $\zeta(u, v), \tau(u, v)$ bezeichnen wir die Funktionen, welche durch die Transformation T_0 aus den Funktionen $z^{(0)}(x, y), t(x, y)$ hervorgehen. Diese Funktionen sind also in K^* einmal stetig derivierbar, sie bleiben ferner auf K^* nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig. Der grösseren Deutlichkeit halber merken wir noch die selbstverständlichen Formeln an:

$$\left.\begin{array}{lll} z^{(0)} = \zeta, & p^{(0)} = \zeta_u, & q^{(0)} = \zeta_v, \\ t = \tau, & t_x = \tau_u, & t_y = \tau_v, \end{array}\right|_{T_0} \tag{4}$$

wobei das beigefügte Zeichen

$$\Big|_{T_0}$$

darauf hinweisen soll, dass die Argumente x, y und u, v durch die Transformation T_0 zusammenhängen.

Wir erklären nun, für jeden der Beziehung (3) genügenden Wert des Parameters ε, eine Transformation T_ε durch die Formeln:

$$T_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} x = u + \varepsilon \tau(u, v), \\ y = v. \end{array} \right. \tag{5}$$

Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich dieselbe auf $x = u$, $y = v$, so dass wir mit der bereits eingeführten Bezeichnung T_0 im Einklang bleiben. Wir behaupten nun, dass durch die Transformation T_ε die Kreisscheibe K^* umkehrbar eindeutig und stetig auf die Kreisscheibe K abgebildet wird. Zunächst ist klar, dass T_ε in und auf K^* eindeutig und stetig erklärt ist, und dass der Kreislinie K^* selbst umkehrbar eindeutig und stetig die Kreislinie K entspricht. Weiter ist klar, dass zwei verschiedenen Punkten in oder auf K^* nur dann derselbe Punkt der xy-Ebene entsprechen könnte, wenn die beiden Punkte auf derselben horizontalen Sehne von K^* liegen. Auf einer solchen Sehne ist aber, nach (5), die Koordinate y konstant, die Koordinate x aber eine *monotone* Funktion von u, da nach (5):

$$x_u = 1 + \varepsilon \tau_u$$

ist, und dieser Ausdruck nach (3) und (4) stets positiv ist. Einer horizontalen Sehne von K^* entspricht also umkehrbar eindeutig und stetig eine horizontale Strecke. Die Endpunkte dieser Strecke liegen aber, da der Kreislinie K^* die Kreislinie K entspricht, auf K, so dass den inneren Punkten der Sehne solche Punkte entsprechen, die innerhalb K liegen.

Damit ist gezeigt, dass durch die Formeln (5) die abgeschlossene Kreisfläche K^* umkehrbar eindeutig und stetig auf die abgeschlossene Kreisfläche K abgebildet wird. Wir merken noch die Formeln an:

$$\left.\begin{aligned} & x_u = 1 + \varepsilon \tau_u, \quad x_v = \varepsilon \tau_v, \\ & y_u = 0, \qquad\quad y_v = 1, \\ & \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = 1 + \varepsilon \tau_u > \frac{1}{2}, \end{aligned}\right|_{T_\epsilon} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} & u_x = \frac{1}{1 + \varepsilon \tau_u}, \quad u_y = - \frac{\varepsilon \tau_v}{1 + \varepsilon \tau_u}, \\ & v_x = 0, \qquad\quad v_y = 1, \end{aligned}\right|_{T_\epsilon} \tag{7}$$

wobei die Indices in üblicher Weise Ableitungen bedeuten, und das Zeichen

$$\Big|_{T_\epsilon}$$

wiederum die Bedeutung hat, dass die Argumente x, y und u, v durch die Transformation T_ϵ zusammenhängen. Wir bemerken noch, dass nur solche Punkte (u, v) betrachtet werden, die in oder auf K^* liegen.

5. Wir erklären nun ein Flächenstück F_ϵ durch die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= u + \varepsilon \tau (u, v), \\ y &= v, \\ z &= \zeta (u, v). \end{aligned} \tag{8}$$

Da die Koordinaten x, y durch die umkehrbar eindeutige Transformation T_ϵ aus u, v hervorgehen, so folgt sogleich, dass man u und v eliminieren kann, und auf diese Weise erhält man für F_ϵ eine Darstellung in der Form

$$z = z_\epsilon(x, y),$$

wobei $z_\epsilon(x, y)$ innerhalb K eindeutig ist. Da alle die vorkommenden Funktionen einmal stetig derivierbar sind, so erhält man durch einfache Rechnung, unter Beachtung von (8) und (7):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_\epsilon}{\partial x} &= \frac{\zeta_u}{1+\varepsilon\tau_u} \\ \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y} &= \zeta_v - \frac{\varepsilon\zeta_u\tau_v}{1+\varepsilon\tau_u} \end{aligned}\right|_{T_\epsilon} \tag{9}$$

Aus den Formeln (9), (8), und (4) ersieht man unmittelbar:

a) Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich die Funktion $z_\epsilon(x, y)$ auf die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$, d. h. es ist $z^{(0)} = z_0$.

b) De Funktion $z_\epsilon(x, y)$ ist innerhalb K einmal stetig derivierbar, bleibt auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig, und stimmt auf der Kreislinie K selbst mit der Extremalfunktion $z^{(0)} = z_0$ nebst den Ableitungen erster Ordnung überein, da ja $\tau(u, v)$ auf der Kreislinie K^* nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet.

Aus *b)* folgt nun, dass wir eine Konkurrenzfunktion erhalten, wenn wir die Extremalfunktion $z^{(0)}(x, y)$ innerhalb K durch die Funktion $z_\epsilon(x, y)$ ersetzen. Da ausserhalb K die so erhaltene Funktion mit $z^{(0)}$ übereinstimmt, so muss infolge der Extremaleigenschaft von $z^{(0)}$ die Ungleichung gelten:

$$\iint\limits_{(K)} f\left(\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint\limits_{(K)} f\left(\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}, \frac{\partial z^{(0)}}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{10}$$

Wird das linksstehende Integral als Funktion des Parameters ε mit $I(\varepsilon)$ bezeichnet, so ist das rechtsstehende Integral, nach *a)*, gleich $I(0)$. Die Funktion

$$I(\varepsilon) = \iint\limits_{(K)} f\left(\frac{\partial z_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\epsilon}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{11}$$

hat also für $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Indem wir die übliche Schlussweise anwenden, berechnen wir zunächst die Ableitung $I'(\varepsilon)$. Zu dem Ende führen wir im Integral (11) auf Grund der Formeln

(5) neue Variablen u, v ein, und erhalten unter Beachtung von (9) und (6):

$$I(\varepsilon)=\iint\limits_{(K^*)} f\left[\frac{\zeta_u}{1+\varepsilon\tau_u}, \zeta_v-\frac{\varepsilon\zeta_u\tau_v}{1+\varepsilon\tau_u}\right](1+\varepsilon\tau_u)\,du\,dv.$$

Jetzt üben wir auf die Variablen u, v die Transformation $T_0: u=x$, $v=y$ aus und erhalten auf Grund der Formeln (4):

$$I(\varepsilon)=\iint\limits_{(K)} f\left[\frac{p^{(0)}}{1+\varepsilon t_x}, q^{(0)}-\frac{\varepsilon p^{(0)} t_y}{1+\varepsilon t_x}\right](1+\varepsilon t_x)\,dx\,dy. \tag{12}$$

Wir überzeugen uns leicht, dass hier unter dem Integralzeichen nach ε deriviert werden kann. Es ist nämlich:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(f[\ldots](1+\varepsilon t_x))=f[\ldots]\,t_x-(1+\varepsilon t_x)\Big(f_p[\ldots]\frac{p^{(0)}t_x}{(1+\varepsilon t_x)^2}+$$
$$+f_q[\ldots]\frac{p^{(0)}t_y(1+\varepsilon t_x)-\varepsilon p^{(0)}t_x t_y}{(1+\varepsilon t_x)^2}\Big), \tag{13}$$

wobei in die Klammern $[\ldots]$ dieselben Argumente einzusetzen sind wie bei der Formel (12). Der gefundene Ausdruck ist für die betrachteten Werte von ε und für alle Punkte (x, y) in oder auf K offenbar stetig, und damit ist die Derivation unter dem Integralzeichen in Formel (12) gerechtfertigt. Da nun $I(\varepsilon)$ für $\varepsilon=0$ Minimum wird, so folgern wir:

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=$$
$$=\iint\limits_{(K)}\Big\{[f(p^{(0)}, q^{(0)})-p^{(0)}f_p(p^{(0)}, q^{(0)})]\,t_x-p^{(0)}f_q(p^{(0)}, q^{(0)})\,t_y\Big\}\,dx\,dy=0. \tag{14}$$

6. Setzen wir für einen Augenblick:

$$\begin{aligned} a(x, y)&=f(p^{(0)}, q^{(0)})-p^{(0)}f_p(p^{(0)}, q^{(0)}),\\ b(x, y)&=-p^{(0)}f_q(p^{(0)}, q^{(0)}),\end{aligned} \tag{15}$$

so sind $a(x,y)$, $b(x,y)$ in und auf K stetig, und wir haben mit (14) bewiesen:

Ist $t(x,y)$ eine Funktion, welche innerhalb K einmal stetig derivierbar ist, auf K nebst ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet, sonst aber ganz beliebig ist, so verschwindet das Integral:

$$\iint\limits_{(K)}(a\,t_x+b\,t_y)\,dx\,dy.$$

Daraus folgt nun nach einem wichtigen Hilfssatze, welchen Herr

A. Haar bei der Ableitung der Gleichungen (II) bewiesen hatte,[6]) dass das Kurvenintegral

$$\int a\,dy - b\,dx \tag{16}$$

für jeden geschlossenen, innerhalb K verlaufenden Integrationsweg verschwindet. Nun sind aber $a(x, y)$, $b(x, y)$ nicht nur in K, sondern überhaupt im ganzen Innern der Randkurve C stetig erklärt, während K ein beliebiger innerhalb C gelegener Kreis war. Daraus folgt nach einfachster Überlegung, dass das Kurvenintegral (16) überhaupt für jeden geschlossenen Integrationsweg innerhalb C verschwindet. Wenn also (α, β) einen festen Punkt innerhalb C bedeutet, so ist das Integral

$$\int_{(\alpha,\beta)}^{(x,y)} a\,dy - b\,dx$$

vom Wege unabhängig, und definiert eine innerhalb C eindeutige Funktion $\omega_1(x, y)$, für welche dann bekanntlich die Beziehungen gelten:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = -b, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = a,$$

und damit ist, mit Rücksicht auf (15), das Gleichungspaar (III_1) erhalten.

Um das zweite Paar (III) abzuleiten, hat man nur die Transformation T_ε in der Form

$$x = u,$$
$$y = v + \varepsilon\tau(u, v)$$

anzusetzen, während das dritte Paar durch die übliche Betrachtung von Vergleichsfunktionen der Form

$$z_\varepsilon(x, y) = z^{(0)}(x, y) + \varepsilon\, t(x, y)$$

erhalten wird.

Szeged, den 19. IV. 1925.

---

[6]) L. c. [2]). Ein sehr einfacher Beweis findet sich bei L. Lichtenstein, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten, Annales de la Société Polonaise de Mathématique (1924), siehe insbesondere p. 27—28.

Remarques sur des propriétés topologiques.

Par M. B. de Kerékjártó (Princeton University).

1° La définition la plus générale pour la notion d'élément d'accumulation a été donnée par M. Fréchet dans la forme suivante[1]:

Soit C un ensemble abstrait; à chaque sousensemble M de C, nous ordonnons certains éléments de C appelés éléments d'accumulation de M sur C de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites: 1. Tout élément d'accumulation d'un ensemble M est élément d'accumulation de chaque ensemble comprenant M. 2. Le fait pour un élément P d'être ou non élément d'accumulation d'un ensemble M ne dépend que des éléments de M autres que P.

Or, on voit qu'une telle définition rend déjà possible la discussion des questions concernant la notion de la continuité, c'est-à-dire l'étude de la topologie d'ensembles abstraits tels que C qui ont le nom *classe (V)* dans la (nouvelle) terminologie de M. Fréchet.

Soient M et M' deux ensembles dans des classes *(V)*; nous disons que M et M' sont des *images topologiques* l'un de l'autre ou que M est transformé en M' par une transformation topologique si à chaque élément de M correspond un élément de M' et un seul et inversement et si ensuite la condition suivante est satisfaite:

Étant M_1 un sousensemble arbitraire de M et P un point de M qui est élément d'accumulation de M_1, alors l'ensemble M_1' correspondant à M_1 a le point P' qui correspond à P pour élément d'accumulation (et inversement).

On entend par une *propriété topologique* d'un ensemble M une propriété qui s'exprime en termes d'éléments de la classe *(V)*

[1]) Bulletin des Sciences Math. (2) 42. (1918), p. 140.

laquelle contient l'ensemble M et de la définition d'éléments d'accumulation. (Cette explication comprend aussi des propriétés qui ne se rapportent pas à M.)

Par définition, chaque propriété topologique peut s'exprimer en termes de la notion d'élément d'accumulation. Si l'on pense à la propriété surement „topologique" de la surface de Möbius qu'elle est une surface non-orientable, la dernière proposition semble être un paradoxe. Néanmoins on pourrait formuler la dite propriété par la notion d'élément d'accumulation. D'abord, on considère les conditions auxquelles la définition d'élément d'accumulation ou ce qui revient au même celle de voisinage doit satisfaire pour obtenir une classe (D) (ou espace métrique). On appelle ainsi une classe pour laquelle une définition de distance a été donnée dans le sens qu'à deux éléments quelconques P et Q un nombre non négatif $(P, Q) = (Q, P)$ est ordonné comme leur distance; cette définition doit satisfaire aux conditions suivantes: 1. $(P, Q) = 0$ si $P = Q$ et seulement dans ce cas-ci; 2. poir trois éléments arbitraires P, Q et R on a $(P, Q) + (Q, R) \geq (P, R)$. On doit le résultat de caractériser les classes (D) parmi les classes (V) à des recherches importantes de MM. Fréchet, Alexandroff et Urysohn. Or dans les classes (D), on peut déterminer les courbes continues grace aux théorèmes de MM. Hahn, Mazurkiewicz et Sierpinsky. Parmi celles-ci les courbes simples peuvent être caracterisées d'une façon simple due à M. Tietze. À l'aide de la notion de courbe simple et continue on est ramené à considérer les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions comme des puissances d'une ligne simple continue et ouverte (Tietze). On a alors le moyens pour la topologie combinatoire.

Une propriété topologique de M est appelée *propriété absolue* si dans sa définition n'entrent aucuns autres termes que la définition des éléments de M et celle des éléments d'accumulation de M appartenant à M. Autrement elle est appelée une *propriété relative* de M; celle-ci n'exprime qu'une propriété de M relative à sa situation dans la classe.

Or, on a la proposition suivante:

Chaque propriété absolue d'un ensemble M reste invariable pour toutes les transformations topologiques de M. Inversement, chaque propriété qui reste invariable pour toutes les transformations topologiques de M est une propriété absolue de M.

La première partie de la proposition est évidente. Pour vérifier la seconde, on considère une nouvelle classe C' contenant tous les éléments de M et seulement ceux-ci, en gardant les définitions d'éléments d'accumulation comme donné pour la classe primitive C. Par la transformation identique qui fait correspondre chaque élément de M à soi-même, on obtient une transformation topologique de l'ensemble M situé en C en la classe C'. La propriéte en question étant invariable, elle peut s'exprimer pour cette nouvelle classe C, c'est-à-dire en termes d'éléments de M.

2⁰ Pour une application de la proposition ci-dessus, considérons la propriété d'un ensemble d'être fermé, compact, extrémal.

On entend par un ensemble *fermé* un ensemble qui contient tous ses éléments d'accumulation. Un ensemble est appelé *compact* si chaque sousensemble infini de l'ensemble a au moins un élément d'accumulation (qui peut appartenir à l'ensemble ou non). Un ensemble fermé et compact est appelé *extrémal*.

La notion d'ensemble compact et surtout celle d'ensemble extrémal (introduites toutes les deux par M. FRÉCHET) jouent un rôle important dans les classes *(L)* (voir 4⁰) en rapport avec le théorème de HEINE—BOREL et des problèmes analogues.

En ce qui concerne leur signification pour les classes *(V)*, on sait qu'aucune des notions: ensemble fermé et ensemble compact ne représent une propriété absolue des ensembles.

De plus, la prcpriété d'un ensemble d'être extrémal n'est pas une propriété absolue. Soit par exemple C une classe dont les éléments sont les segments: $(x, y$ coordonnées dans le plan)

$$K_0 : x = 0,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{4}$$

$$K_0' : x = 0,\ \frac{3}{4} \leq y \leq 1$$

$$K_n : x = \frac{1}{n},\ 0 \leq y \leq 1 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

disons qu'un ensemble (K_i) a l'élément K_n pour élément d'accumulation s'il y a une suite de points appartenant à des segments K_i différents et qui tendent vers un point de K_n. Alors on voit que chaque ensemble infini extrait de l'ensemble $(K', K_0, K_1, \ldots)$ a K_0 et K_0 pour élément d'accumulation. Désignons par M l'ensemble $(K_0, K_1, K_2, \ldots)$; M n'est pas extrémal en C. Néanmoins

M est l'image topologique de l'ensemble $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ lequel est extrémal dans l'ensemble des nombres réels.

3° Considérons la condition qu'il faut imposer à une classe *(V)* pour que la notion d'extrémalité y soit invariable c'est-à-dire pour qu'une image topologique d'un ensemble extrémal y soit toujours extrémal. La condition suivante est évidemment nécéssaire:

Étant M un ensemble extrémal dans la classe considerée et P n'importe quel élément d'accumulation de M, il y a un sousensemble infini de M qui a P pour seul élément d'accumulation.

Autrement il y aurait un ensemble M et un élément d'accumulation P de M tel que chaque sousensemble de M qui a P pour élément d'accumulation a aussi un autre élément d'accumulation (lequel appartient à M puisque M est fermé). Considérons alors la classe C' formée de tous les éléments de M autres que P en gardant les mêmes définitions d'élément d'accumulation que pour la classe C. L'ensemble M' consistant en tous les éléments de C' est fermé est compact d'après nos suppositions. L'ensemble M' dans la classe C consistant en tous les éléments de M autres que P n'est pas fermé. L'identité fournit une transformation topologique entre les ensembles M' de la classe C' et celui de la classe C.

Pour voir que la condition est nécéssaire, il ne faut que montrer que l'image d'un ensemble extrémal est toujours *fermé*, pourvu que l'ensemble et l'image soient situés dans des classes *(V)* satisfaisantes à notre condition. Supposons donc que l'image M' d'un ensemble extrémal M ne soit pas fermé et soit P' un élément d'accumulation de M' qui ne lui appartient pas. Soit M'_1 un sousensemble infini de M' qui a P' pour seul élément d'accumulation et soi M_1 le sousensemble correspondant de M. M_1 étant infini, il a au moins un élément d'accumulation. L'image d'un élément d'accumulation P de M_1 est premièrement un élément de M' (puisque P est nécéssairement un point de M) ensuite elle est un élément d'accumulation de l'image M'_1 de M_1 d'après la définition des transformations topologiques. Par conséquent, le seul élément d'accumulation P' de M'_1 appartient à l'ensemble M'.

On voit que la condition peut se mettre aussi sous la forme suivante:

Étant M un ensemble extrémal dans la classe considérée et

P n'importe quel élément d'accumulation de M, il y a un sous-ensemble dénombrable de M qui a l'élément P et aucun autre pour élément d'accumulation.

4° On apelle classe *(L)*, d'après M. Frechet, un ensemble pour lequel une définition de la *limite* a été donnée de sorte que pour chaque suite d'éléments $P_1, P_2, \ldots$ ou bien cette suite est divergente, ou bien elle est convergente et tend vers un élément déterminé. La définition de la limite n'est d'ailleurs assujettie qu'aux deux conditions suivantes: 1 Si les éléments de la suite sont identiques à un certain elément P, la suite est convergente et tend vers P. 2. Si une suite $P_1, P_2, \ldots$ tend vers P, chaque suite infinie extraite de celle-ci tend aussi vers P. Étant M un ensemble dans une classe *(L)*, on dit qu'un élément P de la classe est élément d'accumulation de M s'il y a une suite d'élément distincts de M qui converge vers P.

La condition nécéssaire et suffisante pour qu'une classe *(V)* puisse être considérée comme classe *(L)* est la suivante:[2])

Étant P un élément d'accumulation d'un ensemble M, il y a un sousensemble dénombrable M_1 de M tel que chaque suite infinie extraite de M_1 a l'élément P et aucun autre pour élément d'accumulation.

On voit que cette condition est plus restrictive que celle donnée à la fin du paragraphe précédent; de la on conclût en particulier (ce qui est d'ailleur facile à vérifier directement) que pour les classes *(L)* la propriété de l'extrémalité a un caractère invariable.

D'autre part, on voit qu'étant M un ensemble extrémal dans une classe pour laquelle cette propriété est invariable, on peut considérer l'ensemble M comme une classe *(L)*. En particulier, si C est une classe compacte pour laquelle l'extrémalité est une propriété invariable, alors C est une classe *(L)*.

---

[2]) Frechèt, Bull. des Sciences Math. (2), *42* (1918) p. 146—147.

Sur les familles de surfaces et de courbes.

I. Conditions de régularité pour les familles de surfaces.

Par M. B. de Kerékjártó (Princeton University).

Soit S_1 une surface fermée simplement connexe dans l'espace à trois dimensions et soit $\{S\}$ une famille de surfaces simplement connexes intérieures à S_1 telles que par chaque point intérieur à S_1, sauf certains points isolés, passe une surface de la famille et une seule. Alors (comme je le démontrerai en un autre mémoire de cette série): 1. il n'y a qu'un seul point exceptionnel; 2. ce point est intérieur à chaque surface de la famille; 3. de deux surfaces de la famille l'une contient toujours l'autre; 4. on peut faire correspondre aux surfaces de la famille les valeurs t $(0<t\leqq 1)$ de telle façon que pour $t<t'$, S_t est intérieur à $S_{t'}$; 5. cette correspondance biunivoque entre les surfaces S_t et les valeurs t est continue dans le sens qu'à chaque nombre positif ε correspond une valeur $\delta>0$ telle que pour $|t-t'|<\delta$, chaque point de la surface S_t respectivement $S_{t'}$ est à une distance inférieure à ε de la surface $S_{t'}$ respectivement S_t.

Nous allons considérer sous quelles conditions la famille $\{S_t\}$ est équivalente à la famille des sphères concentriques. En d'autres termes, sous quelles conditions peut-on transformer la surface S_1 et son intérieur en une sphère et son intérieur par une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et continue) qui transforme chaque surface S_t en une sphère concentrique.

Nous nous servirons de la notion de l'*écart* de deux surfaces introduit par M. Fréchet qui peut être définie comme il suit: deux surfaces ont un écart inferieur à ε $(\geqq 0)$ lorsqu'il est possible d'établir une correspondace biunivoque et continue entre les deux surfaces telle que deux points correspondants on toujours une distance $< \varepsilon$. (La borne inférieure des valeurs ε statisfaisant à l'énoncé est appelé l'écart des deux surfaces).

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Pour l'équivalence de la famille $\{S_t\}$ avec une famille de sphères concentriques la condition suivante est nécéssaire et suffisante: à chaque valeur $\varepsilon > 0$ correspond une valeur $\delta > 0$ telle que pour $|t-t'| < \delta$ l'écart des surfaces S_t et $S_{t'}$ est inférieure à ε.*

Il est évident que la condition est nécéssaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. Soient S^0 et S^* deux surfaces de la famille $\{S_t\}$ (dont nous supposons qu'elle satisfait aux prémisses du théorème); soit T une transformation topologique avec indicatrice invariable de S^0 en S^* et soit ε un nombre positif. Alors on peut déterminer une suite de surfaces de la famille

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^n = S^* \quad (S^{i-1} \text{ intérieur à } S^i)$$

et des transformations topologiques avec indicatrice invariable

$$T_1, T_2, \ldots, T_n$$

telles que T_i transforme S^{i-1} en S^i et chaque point de S^{i-1} est de son image à une distance inférieure à ε; enfin que

$$T = T_1 T_2 \ldots T_n.$$

D'après nos conditions, il y a une suite de surfaces

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^r, S^*$$

telle que S^i est intérieur à S^{i+1}, que l'écart de S^i et S^{i+1} est inférieur à ε enfin que l'écart de deux surfaces entre S^r et S^* est toujours inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$. Or désignons par T_i une transformation topologique avec indicatrice invariable de S^{i-1} en S^i ($i = 1, 2, \ldots, r-1$) par laquelle chaque point de S^{i-1} est à une distance inférieure à ε de son image. Soit T^* une transformation avec indicatrice invariable de S^r en S^* qui transforme chaque point de S^r en un point à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Considérons la transformation

$$\tau = T^{-1} T_1 T_2 \ldots T_r T^*.$$

C'est une transformation topologique de S^* en soi même avec indicatrice invariable. D'après le *théorème de déformation* dû à M. TIETZE[1]), on peut la déformer topologiquement à l'identité. En particulier, on peut trouver une suite de transformations topologiques de S^* en soi même

$$1 = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s = \tau^{-1}$$

telles que pour chaque transformation $\tau_{i-1}^{-1} \tau_i$ l'image de n'importe quel point est à une distance $< \frac{\varepsilon}{3}$ du point même.

Soit alors $S^{r+1}, S^{r+2}, \ldots, S^{r+s-1}$ une suite de surfaces de la famille entre S^r et S^* (S^i intérieur à S^{i+1}) et $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{s-1}$ des transformations topologiques à indicatrice invariable de S^* en $S^{r+1}, S^{r+2}, \ldots, S^{r+s-1}$ telles que chaque point est éloigne de son image par moins que $\frac{\varepsilon}{3}$.

Considérons les transformations

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= T^* \tau_1 \varrho_1 \\ T_{r+2} &= \varrho_1^{-1} \tau_1^{-1} \tau_2 \varrho_2 \\ T_{r+3} &= \varrho_2^{-1} \tau_2^{-1} \tau_3 \varrho_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{r+s} &= \varrho_{s-1}^{-1} \tau_{s-1}^{-1} \tau_s. \end{aligned}$$

La transformation T_{r+i} transforme la surface S^{r+i-1} en S^{r+i} de telle façon que chaque point est à une distance de son image $< \varepsilon$. Le produit des transformations $T_{r+1}, \ldots, T_{r+s}$ est (puisque $\tau_s = \tau^{-1}$)

$$T_{r+1}\, T_{r+2} \ldots T_{r+s} = T^* \tau^{-1};$$

combinant cette relation avec la relation ci-dessus

$$T^{-1}\, T_1\, T_2 \ldots T_r = \tau\, T^{*-1},$$

on obtient

$$T_1\, T_2 \ldots T_{r+s} = T$$

ce qui démontre notre lemme,

La démonstration du téorème est à présent immédiate. Nous prenons un nombre ε (> 0) et nous choisissons une suite de surfaces de la famille, chacune contenue dans la précédente de telle sorte que deux surfaces consécutives ont un écart $< \varepsilon$; nous supposons que la première surface de la suite est la surface extérieure S_1 de la famille et que la dernière est à une distance

[1]) Voir par exemple: KERÉKJÁRTÓ, Vorlesungen über Topologie I. (Berlin, 1923), p. 189.

$< \varepsilon$ du centre. Nous déterminons une transformation topologique à indicatrice invariable de chaque surface de la suite en la surface suivante de telle facon que point et image soient à une distance $< \varepsilon$. Après cela, nous prenons entre deux surfaces consécutives S et S' de la première suite une deuxième suite de surfaces dont deux consécutives ont un écart $< \frac{\varepsilon}{2}$ et nous déterminons une transformation de deux surfaces consécutives telle que point et image soient à une distance $< \frac{\varepsilon}{2}$ et que le produit de toutes ces transformations soit le même que la transformation de S en S' déterminée à propos de la première suite. En continuant ainsi, nous obtenons un ensemble T_t de transformations de la surface extérieure S_1 sur les surfaces S_t $(1 > t > 0)$ qui dépendent continuement de t. L'image d'un point de S_1 par toutes les transformations T_t est un arc simple joignant ce point de S_1 au centre en coupant chaque surface S_t en un seul point.

Alors nous transformons la surface S_1 en une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Soit P un point arbitraire intérieur à S_1, soit S_t la surface à laquelle P appartient et P_1 le point de S_1 qui est transformé en P par la transformation T_t. Alors nous transformons le point P en le point aux coordonnées

$$\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$$

ou x, y, z sont les coordonnées du point de la sphère correspondant à P_1.

Ainsi, nous avons obtenu une transformation topologique de la surface S_1 et de son intérieur en la région $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ par laquelle les surfaces S_t de la famille sont transformées en les sphères concentriques $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Il y a lieu de remarquer que la condition pour le théorème ci-dessus est équivalente à la suivante:

Étant donné un point P, il y a un voisinage V_P de P tel que si les régions $r_1, r_2, \ldots$ sur les surfaces de la famille situées entièrement dans V_P ont pour frontière chacune une courbe c_i simple et fermée, ces courbes convergeant vers un seul point Q de V_P, les régions $r_1, r_2, \ldots$ convergent aussi vers le même point Q.

Sous cette forme, la condition s'applique aussi aux familles de surfaces ouvertes et y donne *la condition nécéssaire et suffisante pour que la famille soit équivalente au voisinage d'un point P à une famille de plans parallels.*

L'extension de ces résultats à plus de trois dimensions ne dépend que de l'extension du théorème de Tietze aux sphères à n dimensions.

Über konjugierte Kegelschnitt-tripel.

Von L. KLUG in Budapest.

Drei Kegelschnitte, welche die Lage haben, dass je zwei derselben in bezug auf den dritten Polargebilde von einander sind, bilden einen Tripel konjugierter Kegelschnitte. Die wichtigsten Eigenschaften derselben sollen hier auf synthetischem Wege bewiesen werden.

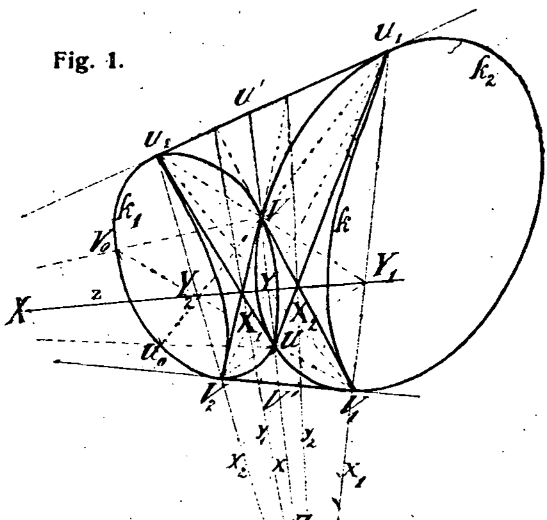
1. Dazu gehen wir von zwei in vierfacher Weise perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 aus, die wir in folgender Weise konstruieren können (Fig. 1.). Das Viereck $U_1U_2V_1V_2$ habe die Diagonalpunkte $X=(U_1U_2, V_1V_2)$, $Y=(U_1V_2, U_1V_2)$, $Z=(U_1V_1, U_2V_2)$. Trifft die Diagonale $z=XY$ die Viereckseiten U_1V_1, U_2V_2 in den Punkten Y_1, Y_2, so liegen die Punkte $V=(U_1Y_2, U_2Y_1)$, $U=(V_1Y_2\ V_2Y_1)$ auf der Diagonale $x=YZ$, und die Punkte X,

$X_1=(U_2U\ V_2V)$,

$X_2=(UU_1, V_1V)$,

trennen je zwei der drei Punkte Y, Y_1, Y_2 vom dritten harmonisch. Also sind XY, X_1Y_1, X_2Y_2 zugeordnete Punkte einer Involution I_0, deren konjugiert-imaginären Doppelpunkte II' mit jedem dieser Punktpaare aequianharmonische

Fig. 1.



Würfe bilden. Die zwei Punkttripel XX_1X_2, YY_1Y_2 bilden noch in dreifacher Weise Involutionen J, J_1, J_2, in welchen $XY.X_1Y_2.X_2Y_1$, $XY_2.X_1Y_1.X_2Y$, $XY_1.X_1Y.X_2Y_2$ zugeordnete Punkte sind.

Die Dreiecke

$$\begin{array}{cccc} UU_1U_2 & UU_1U_2 & UU_1U_2 & UU_1U_2 \\ VV_1V_2 & VV_2V_1 & V_2V_1V & V_1VV_2 \end{array}$$

sind perspektiv in bezug auf die Kollineationsmittelpunkte und Achsen

$$Z, z = XY, \quad Y, y = ZX, \quad Y_1, y_1 = ZX_1, \quad Y_2, y_2 = ZX_2,$$

und von diesen bilden die drei letzteren eine zyklische Perspektivität.

Durch je zwei homologe Eckpunkte der Dreiecke der ersten Perspektivität kann man einen Kegelschnitt legen, welcher in diesen Eckpunkten von homologen Dreieckseiten berührt wird. Denn umschreibt man z. B. dem Viereck $U_1U_2V_1V_2$ den Kegelschnitt k, welcher die Dreieckseite $u_2 = U_1U$ berührt, so berührt k auch die Dreieckseiten $u_1 = U_2U$, $v_2 = V_1V$, $v_1 = V_2V$, welche von jener durch die Eckpunkte und Gegenseiten des Diagonaldreieckes XYZ des Viereckes harmonisch getrennt sind.

Ebenso ist der Kegelschnitt k_1 dem Viereck U_2UV_2V umschrieben und (wenn $u = U_1U_2$, $v = V_1V_2$ ist) dem Vierseit u_2uv_2v einbeschrieben, und der Kegelschnitt k_2 dem Viereck UU_1VV_1 umschrieben, dem Vierseit uu_1vv_1 aber einbeschrieben, weil X_1Y_1Z und X_2Y_2Z das Diagonaldreieck des ersten, bzw. des zweiten Viereckes und Vierseits ist.

Für alle drei Kegelschnitte k, k_1, k_2 ist z die Polare des Punktes Z um die gemeinsame Sehnen der Kegelschnittpaare k_1k_2, k_2k, kk_1 sind bzw. $x = ZY$, y; $x_1 = ZY_1$, y_1; $x_2 = ZY_2$, y_2 auf welche die Kontingenzpunkte jener Kegelschnittpaare X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 liegen, woraus dann folgt, dass ZII' ein gemeinsames Polardreieck ist für alle drei Kegelschnitte, während J, J_1, J_2 bzw. die Involutionen der konjugierten Pole der Kegelschnitte k, k_1, k_2 sind.

Die Projektion der Involution $J_0 = XY.X_1Y_1.X_2Y_2$ aus dem Punkte U_2 des Kegelschnitts k_1 auf diesen ist eine Involution, deren Achse y_2 ist und deren Pol Y auf der Geraden $UV = x$ liegt. y_2 ist eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte k_1k, y aber eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte k_1k_2, also bilden die Treffpunkte dieser gemeinsamen Sehnen y_2, y mit k_1 oder was dasselbe ist: zwei der Treffpunkte der Kegelschnitte k_1k, und zwei der Treffpunkte der Kegelschnitte k_1k_2 auf k_1 einen aequianharmonischen Wurf.

Projiziert man aber die nämlich Involution J_0 aus dem Punkte U auf den nämlichen Kegelschnitt k_1, so ist die Achse der erhaltenen Involution y, der Pol aber der auf $U_2V_2 = x_2$ liegender Punkt Y_2. Nun ist wie früher, y eine gemeinsame Sehne für k_1k, und x_2 eine gemeinsame Sehne für k_1k; also bilden die Treffpunkte der zwei anderen gemeinsamen Sehnen dieser Kegelschnitte mit k_1, oder was dasselbe ist, die zwei anderen Treffpunkte der Kegelschnitte k_1k und k_1k_2 ebenfalls einen aequianharmonischen Wurf.

D. h. Die reellen Treffpunkte eines beliebigen der drei Kegelschnitte k, k_1, k_2 mit einem zweiten und die konjugiert-imaginäre Treffpunkte des ersten und dritten Kegelschnitts bilden einen aequianharmonischen Wurf.

Man findet auch leicht, dass der Polarkegelschnitt eines beliebigen der drei Kegelschnitte in bezug auf einen zweiten der dritte Kegelschnitt ist. Denn z. B. sind die Polaren und Pole der Punkte $U_1V_1\,UV$ und der Tangenten $u\,v\,u_1\,v_1$ des Kegelschnitts k_2 in bezug auf k_1: die Tangenten $u_1\,v_1\,u_2\,v_2$ und Punkte $U_2\,V_2\,U_1\,V_1$ des Kegelschnitts k.

Alles zusammengefasst können wir sagen.

Sind zwei Dreiecke in vierfacher Weise perspektiv, so sind von diesen Perspektivitäten drei zyklisch. Durch je zwei Paar homologer Eckpunkte der Dreiecke der vierten Perspektivität kann man Kegelschnitte legen, welche in diesen Eckpunkten zwei Paar homologe Dreieckseiten berühren, und es gibt also drei solche Kegelschnitte; sie bilden ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

Je zwei derselben haben nur zwei reelle gemeinsame Sehnen, welche sich im Kollineationsmittelpunkt Z der vierten Perspektivität treffen, aber nur auf einer Sehne jedes Paares haben sie reelle Punktpaare. Ebenso haben je zwei dieser Kegelschnitte nur zwei reelle Kontingenzpunkte auf der Kollineationsachse der früheren Perspektivität aber nur von einem derselben strahlen reelle Tangenten aus und sie sind mit jenen gemeinsamen Sehnen inzident. Die Involution der drei Paar Kontingenzpunkte ist eine besondere, indem die Kontingenzpunktpaare mit den Doppelpunkten der Involution aequianharmonische Würfe bilden; und die Doppelpunkte und Z sind die Eckpunkte eines Polardreieckes der drei Kegelschnitte.

Jeder der drei Kegelschnitte wird von jedem der zwei anderen in zwei reellen und in zwei konjugiert-imaginären Punkten getroffen; die zwei reelle Treffpunkte des einen und die zwei konjugiert-imaginäre Treffpunkte des anderen bilden auf dem ersten Kegelschnitt aequianharmonische Würfe.

Endlich sind je zwei der drei Kegelschnitte in bezug auf den dritten Polargebilde von einander.

2. Wir wollen jetzt zwei Kegelschnitte bestimmen, die einen gegebenen Kegelschnitt k_1 zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzen.

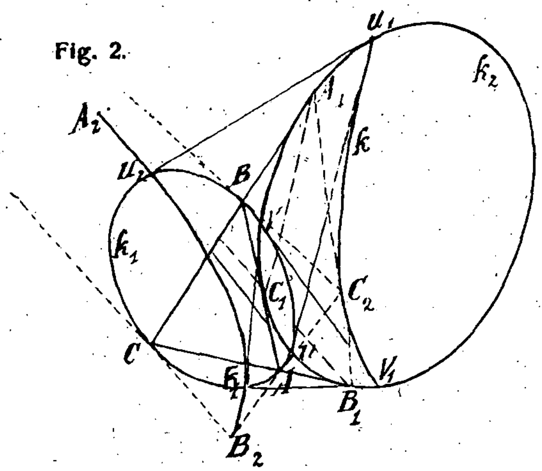
Es sei (Fig. 1.) XY_2Z ein beliebiges Polardreieck von k_1, der Eckpunkt Y_2 ein innerhalb k_1 liegender Punkt. Die Seite Y_2Z des Polardreieckes habe mit k_1 die Punkte U_2, V_2 gemeinsam, und die Geraden, welche Z von U_2, Y_2 und V_2, Y_2 harmonisch trennen mögen k_1 in den Punkten V_0V, bzw. U_0U treffen. Dann bilden bekanntlich die Punkttripel UU_0U_2, VV_0V_2 auf k_1 in vierfacher Weise Involutionen. Wählt man die Bezeichung so, dass der Sinn jener Tripel entgegengesetzt sei, dann ist Y_2 der Mittelpunkt und XZ die Achse für eine jener Involutionen, und die Projektionen jener Tripel aus V (und auch aus U) auf die Gerade Y_2X sind die vierfach involutorische Punkttripel YY_2Y_1, X_2XX_1, so dass YX_2; Y_2X, Y_1X_1 konjugierte Pole sind von k_1.

Da die Punktwürfe U_0VUU_2, V_0UVV_2 auf k_1 harmonisch sind, so geht die Gerade U_0V durch den Pol U_1 der Geraden UU_2, und die Gerade V_0U durch den Pol V_1 von VV_2, und diese Pole liegen mit Y_1 auf die Polare des Punktes X_1 bezüglich k_1. Wir haben jetzt zwei vierfach perspektive Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2, welche ein Tripel konjugierter Kegelschnitte bestimmen (1), und einer derselben ist k_1, da dieser durch die vier Eckpunkte UVU_2V_2 jener Dreiecke geht und die Gegenseiten derselben berührt. Da nun der Kegelschnitt k_1, ∞^3 Polardreiecke hat und man nach Obigem mit Hilfe eines Polardreieckes (XY_2Z) nur noch vier Kegelschnittpaare findet, welche mit k_1 ein konjugiertes Tripel bilden, so hat man:

Es giebt ∞^3 Kegelschnittpaare, welche einen gegebenen Kegelschnitt zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzen.

3. Wir sahen, dass die Tangenten in den zwei Treffpunkten von zwei beliebigen der Kegelschnitte eines konjugierten Tripels $k\,k_1\,k_2$ (Fig. 1. und 2.) durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der zwei Kegelschnitte gehen. Wir können daher jede Seite der vierfach perspektiven Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2, deren Eckpunkte die reellen gemeinsame Punkte jener Kegelschnitte sind (1. u. 2.), als ein dem einen Kegelschnitt umschriebenes und einem anderen einbeschriebenes verkümmertes Dreieck auffassen. So z. B. sind die Tangenten des Kegelschnitts k_2 in den Punkten U, U_1 zwei diesen umschriebene Dreiecke UU_2U_2, $U_1U_2U_2$, von welchen das erste dem Kegelschnitt k_1, das zweite dem Kegelschnitt k einbeschrieben ist. Wenn man aber einem Kegelschnitt **ein** Dreieck umschreiben kann, welches einem zweiten Kegelschnitt einbeschrieben ist, so giebt es deren unendlich viele. Also kann man jedem der Kegelschnitte eines konjugierten Tripels Dreiecke umschreiben, die einem zweiten Kegelschnitt des Tripels einbeschrieben sind.

Fig. 2.



Es sei nun ABC ein allgemeines dem Kegelschnitt k_2 umschriebenes und dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenes Dreieck (Fig. 2.). k_2 und k sind in bezug auf k_1 Polarkegelschnitte, also liegen die Pole A_2, B_2, C_2 der Seiten BC, CA, AB des Dreieckes (als Tangenten von k_2 in den Punkten A_1, B_1, C_1) nach k_1 auf k. Die Seiten B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 des Dreieckes $A_2B_2C_2$ als Polaren der Punkte A, B, C nach k_1 berühren diesen; also ist das Dreieck $A_2B_2C_2$ dem Kegelschnitt k_1 umschrieben und dem Kegelschnitt k einbeschrieben.

Da das Dreieck ABC dem Kegelschnitt k_1 einbeschrieben und dem Kegelschnitt k_2 umschrieben ist, so ist es ein Polardreieck von k, denn wäre die Polare von A in bezug auf k von BC verschieden, so gingen aus A vier Tangenten zu k_2; und ebenso ist das dem k einbeschriebenes und dem k_1 umschriebenes Dreieck $A_2B_2C_2$ ein Polardreieck von k_2.

Polarisiert man schliesslich k_1 mit dem umschriebenen und einbeschriebenen Dreieck $A_2B_2C_2$, bzw. ABC, von welchen das erste auch dem zweiten Dreieck umschrieben ist, in bezug auf k_2, so geht $A_2B_2C_2$ in sich selbst über, das Dreieck ABC in $A_1B_1C_1$, und der Kegelschnitt k_1 in k. Also ist das Dreieck $A_2B_2C_2$ dem Dreieck $A_1B_1C_1$ einbeschrieben, und die Seiten des letzteren berühren k in den Eckpunkten des ersteren, und $A_1B_1C_1$ ist ein Polardreieck von k_1.

Da die Eckpunkte BC des dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenen Dreieckes ABC konjugierte Pole sind von k, so trifft die Tangente BC des Kegelschnitts k_2 die beiden anderen Kegelschnitte des Tripels in einem harmonischen Punktwurf. Ebenso bilden die aus dem Punkte A ausstrahlenden Tangenten von k und k_2 einen harmonischen Strahlenwurf. Man hat daher:

Ein Tripel konjugierter Kegelschnitte hat die Eigenschaft, dass man jedem der Kegelschnitte ∞^1 *Dreiecke einschreiben kann, welche einem zweiten umschrieben und Polardreiecke des dritten sind. Nimmt man einen Eckpunkt A eines Dreieckes auf einem ersten der drei Kegelschnitte beliebig an, so trifft seine Polare in bezug auf einem zweiten der Kegelschnitte diesen ersten in den zwei anderen Eckpunkten B, C des dem ersten einbeschriebenen und dem dritten Kegelschnitt umschriebenen Dreieckes, und die Berührungspunkte dieser Seiten sind die Eckpunkte eines Polardreieckes $A_1B_1C_1$ des ersten Kegelschnitts. Das Tangentendreieck $A_2B_2C_2$ mit den Berührungspunkten A, B, C des ersten Kegelschnitts ist dem Dreieck $A_1B_1C_1$ und dem zweiten Kegelschnitt einbeschrieben und Polardreieck des dritten Kegelschnitts.*

Bewegt sich der Punkt A auf dem ersten Kegelschnitt, so bewegen sich mit ihm alle Eckpunkte der einander zyklisch einbeschriebenen Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ auf dem entsprechenden ersten, dritten und zweiten Kegelschnitt; die Eckpunkte dieser ∞^1 *Dreiecke bilden auf jedem Kegelschnitt eine kubische Involution.*

Jeder der Kegelschnitte ist der Ort der Strahlen, welche die zwei anderen Kegelschnitte in harmonischen Punktwürfen treffen, und zugleich der Ort der Punkte, von welchen die zu diesen zwei Kegelschnitten ausstrahlenden Tangenten harmonische Strahlenwürfe bilden.

Man kann die drei Kegelschnitte eines Tripels auch aus einem beliebigen Kegelschnitt k_1 und ein dem beliebig einbeschriebenen Dreieck ABC kontruieren. Die Tangenten der Eckpunkte des Dreieckes ABC bilden das Dreieck $A_2B_2C_2$ und die Projektion der Eckpunkte des Dreieckes ABC aus einem beliebigen Punkte D des Kegelschnitts k_1 auf die Gegenseiten sind die Eckpunkte eines dritten Dreieckes $A_1B_1C_1$. Der Kegelschnitt k_2 ist nun dem Dreieck $A_1B_1C_1$ umschrieben und dem Dreieck ABC einbeschrieben, während der dritte Kegelschnitt k dem Dreieck $A_2B_2C_2$ umschrieben und dem Dreieck $A_1B_1C_1$ einbeschrieben ist.

Daraus ergeben sich als Beispiele:

Schreibt man einem Dreieck die Hyperbel ein, welche zwei Seiten in ihren unendlichfernen Punkten, also die dritte in der Mitte berührt, und umschreibt man dem Dreieck eine Ellipse, welche die dritte Seite zum Durchmesser hat: dann giebt es eine Parabel, welche die zu den zwei anderen Dreieckseiten parallelen Ellipsendurchmesser dort berührt, wo sie die Ellipsentangenten der Gegeneckpunkte treffen. Die so erhaltene Ellipse, Hyperbel und Parabel bilden nun ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

Oder specialisiert:

Ein Kreis, der durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel geht und seinen Mittelpunkt auf der Hyperbel hat, dann eine Parabel, welche die Hyperbeltangente des Kreismittelpunktes zur Leitlinie und den Hyperbelmittelpunkt zum Brennpunkt hat, und die gleichseitige Hyperbel selbst — geben ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

4. *In jedem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei konjugiert-imaginären Grundpunkten giebt es zwei Kegelschnitte, welche durch einen dritten zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzt werden können.*

Es seien Z der Treffpunkt der zwei reellen Sehnen eines solchen Büschels, U, V die reellen Grundpunkte desselben, und Y sei der Treffpunkt der Polaren z des Punktes Z bezüglich der Kegelschnitte des Büschels mit der Sehne UV, X aber der Treffpunkt mit der anderen Sehne. Trennen nun die Punkte Y, U', das Punktpaar ZV, und die Punkte Y, V' das Punktpaar ZU harmonisch, so giebt es im Büschel zwei Kegelschnitte k_1, k_2, welche die Geraden XU', XV' in den Punkten U_2, U_1, bzw. V_2, V_1 berühren, und wie aus den vierfach perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 ersichtlich ist, sind diese die zwei Kegelschnitte des Büschels, welche durch einen dem Viereck $U_1U_2V_1V_2$ umschriebenen Kegelschnitt k zu einem Tripel ergänzt werden (Fig. 1).

Daraus kann man folgern:

„Zwei Kreise, deren Halbmesser gleich sind und deren Treffpunkte mit dem Halbmesser gleichen Abstand haben, dann eine Hyperbel, deren Brennpunkte in den Mittelpunkten jener Kreise liegen und deren Hauptachse mit dem Halbmesser der Kreise gleich ist und die daher durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten jener Kreise geht, bilden ein Tripel konjugierter Kegelschnitte".

Die affine Darstellung dieser Figur giebt den Satz:

„Verschiebt man eine Ellipse, bis sie mit der verschobenen Ellipse eine Sehne gemein hat, die halb so gross ist, wie der zur Verschiebungrichtung konjugierte Durchmesser, so bilden die zwei Ellipsen mit derjenigen Hyperbel, welche durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten gehend in diesen von den Tangenten der gemeinsamen Punkte der Ellipsen berührt wird, ein Tripel konjugierter Kegelschnitte".

Bildet man aber von den zwei Kreisen und der Hyperbel des früheren Satzes eine zentrisch-kollineare Figur u. z. in der Weise, dass man den Kollineationsmittelpunkt in der gemeinsamen Sehne UV der Kreise, und die Verschwindungslinie zu der Zentralachse der Kreise parallel annimmt, so gehen die zwei Kreise in zwei bezüglich der Sehne UV symmetrische Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln über, die Hyberbel aber geht über in eine Hyperbel die mit sich selbst bezüglich derselben Sehne symmetrisch liegt.

Wir wollen aber diese Figuren, d. h. solche Tripel konjugierter Kegelschnitte konstruieren, von welchen zwei bezüglich einer Achse des dritten Kegelschnitt symmetrisch liegen, — aber unabhängig von Kreispaar und der Hyperbel.

5. Es sei k_1 ein Kegelschnitt, g eine Gerade seiner Ebene; man bestimmte eine zu dieser parallele Sehne von k_1 so, dass k_1 und das Spiegelbild k_2 desselben bezüglich der Sehne und noch ein dritter Kegelschnitt ein konjugiertes Tripel bilden sollen.

Sind U_2A, V_2B, die zwei zu g parallele und bei den Punkten U_2, V_2 normale Sehnen von k_1, UV eine mit diesen parallele Sehne von der halben Grösse derselben (oder, wenn die Punkte U_2, A verschiedenen Ästen einer Hyperbel angehören von doppelter Grösse derselben), und ist der Sinn von UV und AU_2 der nämliche, dann geht die Pascalgerade des Sechseckes AU_2U_2VUU durch den Punkt $E = (U_2V, AU)$ parallel mit der Sehne UV, und trifft die Tangente des Punktes U_2 in einem zu diesem bezüglich der Sehne UV symmetrischen Punkte U_1 so, dass $UU_1 = UU_2$ und UU_1 den Kegelschnitt in U berührt. Ist dann V_1 der Pol der Kegelschnittssehne VV_2, so folgt wie früher, dass $VV_1 = VV_2$. Also sind k_1 und sein Spiegelbild k_2 in bezug auf die Sehne UV, zwei Kegelschnitte eines konjugierten Tripels. Daher:

Sind zwei Kegelschnitte Spiegelbilder von einander bezüglich einer Sehne derselben die halb so gross ist, wie die zu ihr parallele normale Sehne derselben, so können sie durch einen dritten Kegelschnitt zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzt werden.

Als besondere Fälle hat man:

„Stehen die Achsen von zwei kongruenten Parabeln in ihren gemeinsamen Scheiteln aufeinander senkrecht, so bilden dieselben mit der Hyperbel, deren Asymptoten die Parabelachsen sind und welche von den Tangenten des anderen gemeinsamen Punktes der Parabeln in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten derselben berührt wird, und deren Hauptachse also dem Parameter der Parabeln gleich ist: ein Tripel konjugierter Kegelschnitte."

„Nimmt man ein regelmässiges Sechseck an und legt durch je zwei Nachbareckpunkte und ihre Gegeneckpunkte gleichseitige Hyperbeln, so erhält man ein Tripel konjugierter Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben und deren Brennpunkte auf dem dem Sechseck umschriebenen Kreis liegen."

Die sechs Hyperbelbögen über den sechs Seiten des regelmässigen Sechseckes geben eine aus dekorativem Gesichtspunkte gefälligere Figur, als wenn sie durch Kreisbögen mit derselben Konkavität ersätzt wären.

6. Die Eckpunkte von zwei vierfach perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 liegen auf einem Kegelschnitt $\varkappa$ und die Seiten derselben berühren ebenfalls einen Kegelschnitt $\varkappa'$. Dies folgt daraus, dass eine der Perspektivitäten zentrisch-involutorisch ist.

Da die Diagonaldreiecke XYZ, X_1Y_1Z, X_2Y_2Z der Vierecke $U_1U_2V_1V_2$, U_2UV_2V, UU_1VV_1 Polardreiecke von $\varkappa$ sind, so geht $\varkappa$ durch die imaginäre Doppelpunkte II' der Involutien $J_0 = XY \,.\, X_1Y_1 \,.\, X_2Y_2$ und wird in diesen Punkten von den Strahlen ZI, ZI' berührt.

Dasselbe kann man auch von $\varkappa'$ sagen, voraus dann folgt, dass sich $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den Punkten I, I' berühren.

Die Tangenten des Kegelschnitts $\varkappa$ in den Eckpunkten der zwei Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2 trennen die Dreieckseitenpaare von Z harmonisch und treffen sich paarweise in den Punkten X, X_1, X_2, und die Berührungspunkte der Dreieckseiten mit $\varkappa'$ trennen die Eckpunktpaare von $z = XY$ harmonisch, und liegen paarweise auf den Geraden ZY, ZY_1, ZY_2.

Da der Kegelschnitt k des durch die Dreiecke bestimmten Tripels mit $\varkappa$ die vier Punkte $U_2U_2V_1V_2$, mit $\varkappa'$ die Tangenten dieser Punkte gemein hat, und ausserdem die Polaren U_1U_2 und V_1V_2 der Punkte U und V von $\varkappa$ nach k, den Kegelschnitt $\varkappa'$ berühren, so sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ Polarfiguren von einander bezüglich k, und ebenso bezüglich den zwei anderen Kegelschnitten k_1, k_2 des konjugierten Tripels.

Es giebt aber noch zwei andere Kegelschnitte k_r und k_i, welche $\varkappa$ und $\varkappa'$ in einander polarisieren. Für den ersten Kegelschnitt der reell ist, sind die Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2 Polarfiguren von einander; für den zweiten der imaginär ist, sind dieselben Polardreiecke. Beide Kegelschnitte aber haben mit $\varkappa$ und $\varkappa'$ eine doppelte imaginäre Berührung in den Punkten II'.

Die Kegelschnitte k_r und k_i haben auch mit jedem Kegelschnitt des Tripels eine doppelte Berührung und polarisieren jeden derselben in sich selbst.

Denn z. B. sind für k_i und k_r die Polaren der zwei Punkte (U_1U_2, VV_1), (V_1V_2, UU_1), die sich in Y_1 treffende Geraden VU_2, UV_2; somit gehen beide Kegelschnitte durch diejenigen reellen Punkte von y_1, welche jene zusammengehörige Pole und Polaren harmonisch trennen, und werden in diesen von den sich in Y_1 treffenden Strahlen berührt. Ebenso sind die Polaren der Punkte U_1, V_1 bezüglich k_1 und k_i die Geraden U_2U, V_2V; daher gehen beide Kegelschnitte durch die konjugiert-imaginären Punkte der Geraden $x_1 = U_1V_1$, welche jene zusammengehörige Pole und Polaren harmonisch trennen und die konjugiert-imaginäre Tangenten dieser Punkte treffen sich in dem reellen Punkt X_1.

Ferner sind die Polaren des Punktes U von k_1 bezüglick k_r und k_i die Geraden V_1V_2, bzw. U_1U_2 und diese berühren den Kegelschnitt k_1, somit ist auch die letzte Behauptung bewiesen.

Alles zusammengefallt können wir daher sagen:

Die sechs Eckpunkte von zwei vierfach perspektiven Dreiecken liegen auf einem Kegelschnitt $\varkappa$ und die Seiten derselben berühren einen Kegelschnitt $\varkappa'$; diese berühren einander auf einer der Kollineationsachsen der perspektiven Dreiecke in zwei konjugiert-imaginären Punkten II'.

Diese zwei Kegelschnitte sind Polarfiguren von einander in bezug auf einen reellen und einen imaginären Kegelschnitt k_r, bzw. k_i; für k_r sind die zwei angenommenen Dreiecke Polarfiguren von einander, für k_i sind jene Dreiecke Polardreiecke; beide berühren die Kegelschnitte $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den Punkten II' und bezüglich beide sind diese Kegelschnitte Polarfiguren von einander.

$\varkappa$ und $\varkappa'$ sind aber auch Polarfiguren von einander in bezug auf jeden Kegelschnitt des konjugierten Tripels den die zwei vierfach perspektiven Dreiecke bestimmen (1). *Anderseits polarisieren die Kegelschnitte k_r und k_i jeden Kegelschnitt des konjugierten Tripels in sich selbst.*

Ausserdem hat man:

Die konjugierten Kegelschnitte eines Tripels werden von einem reellen und einem imaginären Kegelschnitt k_r, bzw. k_i doppelt berührt. Die Berührungssehnen dieser Kegelschnitte k_r, k_i mit jedem Kegelschnitt des Tripels sind die zwei gemeinsamen Sehnen der zwei anderen Kegelschnitte des Tripels; u. z. berührt jener erste Kegelschnitt des Tripels den reellen (imaginären) Kegelschnitt k_r (k_i) auf derjenigen gemeinsamen Sehne, auf welchen die zwei konjugiert-imaginären (reellen) Punkte der zwei anderen Kegelschnitte des Tripels liegen.

Das vollständige Fokalsystem einer ebenen algebraischen Kurve.

Von Marcel Grossmann in Zürich.

Plücker[1]) nannte *Brennpunkt* einer algebraischen ebenen Kurve einen Punkt, dessen isotrope Geraden Tangenten der Kurve sind. Demnach hat eine algebraische Kurve n^{ter} Klasse n reelle Brennpunkte, auch dann, wenn die Kurve keine reellen Züge aufweist, aber ihre Gleichung reelle Koeffizienten hat. Denn von den beiden absoluten Kreispunkten der Kurvenebene kann man zwei Büschel von je n Tangenten an die Kurve ziehen, sofern die Kurve keine besondere Lage zum Unendlichen hat. Diese $2n$ isotropen Tangenten zerfallen in n Paare konjugiert imaginärer Geraden, deren n reelle Schnittpunkte die n reellen Brennpunkte der Kurve sind.

Man weiss wenig von den Fokaleigenschaften der höheren ebenen algebraischen Kurven. Zum Teil aus dem Grunde, weil die Plückersche Definition der Brennpunkte unvollständig ist. Sie gibt nur für $n = 2$ das volle Fokalsystem der Kurve. Im Folgenden soll diese Definition des Fokalsystems vervollständigt werden.

Es liege also eine Kurve n^{ter} Klasse $C^{(n)}$ vor. Um die allgemeinen Begriffe zu entwickeln, werde vorausgesetzt, dass diese Kurve zum Absoluten der Ebene keine ausgezeichneten Beziehungen habe, wie dies ja auch bei der Plückerschen Theorie getan werden muss.

Von den n Plückerschen Brennpunkten aus kann man an die Kurve noch $n.(n-2)$ weitere, nicht isotrope Tangenten ziehn. Diese umhüllen und bestimmen eine andere Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Klasse $C^{(n-2)}$, die der gegebenen Kurve $C^{(n)}$ *metrisch-assoziiert* heisse. Denn es gilt der Satz:

---

[1]) J. f. Math. 10 (1832).

Wenn von den n^2 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven n^{ter} Klasse $n \,.\, p$ $(p < n)$ einer Kurve p^{ter} Klasse angehören, so gehören die übrigen $n \,.\, (n-p)$ einer Kurve $(n-p)^{\text{ter}}$ Klasse an.[2])

Wendet man diesen Satz an auf die gegebene Kurve $C^{(n)}$ & die $n \cdot$ Brennpunktsbüschel derselben, so enthalten die n^2 gemeinsamen Tangenten dieser beiden Kurven n^{ter} Klasse $2n$ isotrope Geraden, die, als dem Absoluten angehörend, $p = 2$ ergeben.

Die so bestimmte Kurve $C^{(n-2)}$ hat ihrerseits wieder $(n-2)$ Brennpunkte im Sinne Plückers. Diese will ich die $(n-2)$ reellen Brennpunkte *zweiten Ranges* der ursprünglichen Kurve $C^{(n)}$ nennen, in Gegenüberstellung zu den n reellen Brennpunkten ersten Ranges der Kurve $C^{(n)}$, die nichts anderes sind als die Plückerschen Brennpunkte der Kurve.

In diesem Reduktionsprozess kann man weitergehen: von den $(n-2)$ Brennpunkten zweiten Ranges gehen noch $(n-4)$ nicht isotrope Tangenten an die Kurve $C^{(n-2)}$, die wieder eine neue Kurve $C^{(n-4)}$ umhüllen & der gegebenen Kurve $C^{(n)}$ zuordnen. Ist die Klasse der gegebenen Kurve eine gerade Zahl, $n = 2k$, so wird man zuletzt zwei Brennpunkte k^{ten} Ranges finden; ist dagegen $n = 2k - 1$, so endet das Verfahren bei einem einzigen Brennpunkt k^{ten} Ranges.

Hieraus ergibt sich unmittelbar eine einfache kanonische Darstellung der Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten:

Es gehören nämlich einer linearen Mannigfaltigkeit von Kurven n^{ter} Klasse an die drei Kurven: die gegebene Kurve $C^{(n)}$, die ihr metrisch-assoziierte Kurve $C^{(n-2)}$, ergänzt durch die beiden isotropen Strahlbüschel & endlich die Kurve n^{ter} Klasse, welche in die n Strahlbüschel zerfällt, deren Scheitel die n Brennpunkte ersten Ranges sind. Denn diese drei Kurven n^{ter} Klasse haben n^2 gemeinsame Tangenten.

Bezeichnet man also mit $C^{(n)}$ & $C^{(n-2)}$ die linken Seiten der Liniengleichung der ebenso bezeichneten Kurven & ist

$$\psi = \xi^2 + \eta^2 = 0$$

die Liniengleichung des Absoluten, während a_{i1} & b_{i1} die cartesischen Koordinaten des i^{ten} der n Brennpunkte ersten Ranges

[2]) Siehe die Ausführungen über den dualen Schnittpunktsatz bei Berzolari, Theorie der höheren algebraischen Kurven, Art. III. C 4 der Enzyklopädie der math. Wiss, insbesondere Anm. 366.

sind, so muss die lineare Abhängigkeit bestehen

$$C^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}\,\xi + b_{i1}\,\eta + 1) + \lambda_1\,\psi\,C^{(n-2)},$$

wo λ_1 ein wohlbestimmter Parameter ist, wenn die Kurve $C^{(n)}$ gegeben ist.

Aus dem nämlichen Grunde schliesst man weiter, dass

$$C^{(n-2)} = \prod_{i=1}^{n-2} (a_{i2}\,\xi + b_{i2}\,\eta + 1) + \lambda_2\,\psi\,C^{(n-4)},$$

wobei a_{i2} & b_{i2} die cartesischen Koordinaten des i^{ten} der $(n-2)$ Brennpunkte zweiten Ranges sind. So schliesst man weiter & verwendet dieses System von Rekursionsgleichungen zur sukkzessiven Elimination der Polynome $C^{(n-2)}, C^{(n-4)}, \ldots$ & erhält schliesslich, z. B. im Falle $n = 2k$

$$C^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}\,\xi + b_{i1}\,\eta + 1) + \lambda_1\,\psi \prod_{i=1}^{n-2} (a_{i2}\,\xi + b_{i2}\,\eta + 1) + \ldots + \lambda_k\,\psi^k = 0.$$

Für den Fall $n = 2k - 1$ lautet die Gleichung analog.

Die k Parameter $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ mögen die *Fokalparameter* der Kurve heissen.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ergibt sich, wenn man sie durch $(-1)^n\,\psi^k$ dividiert. Dann lautet sie

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i1}\,\xi + b_{i1}\,\eta + 1}{-\psi^{1/2}} + \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i2}\,\beta + b_{i2}\,\eta + 1}{-\psi^{1/2}} + \ldots + \lambda_k = 0.$$

Nun ist

$$\frac{a_{ir}\,\xi + b_{ir}\,\eta + 1}{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

die Entfernung des i^{ten} Brennpunkts r^{ten} Ranges von der Kurventangente, deren Plückersche Linienkoordinaten ξ, η sind. Diese Entfernung möge mit d_{ir} bezeichnet werden. Somit lässt sich die obige Kurvengleichung in der Form schreiben

$$\prod_{i=1}^{n} d_{i1} + \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-2} d_{i2} + \ldots + \lambda_k = 0.$$

Diese Eigenschaft der Tangenten einer Kurve findet sich schon bei Salmon-Fiedler,[3]) ohne dass die Bedeutung der Abstände der Kurventangente dort erkannt worden wäre.

Eine algebraische Kurve n^{ter} Klasse ist durch ihr vollständiges Fokalsystem, d. h. durch die Angabe aller ihrer Brennpunkte &

[3]) Siehe Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 2. A., S. 157.

die Angabe ihrer Fokalparameter eindeutig bestimmt. Die Fokalparameter individualisieren die Kurve im System der konfokalen. Denn die Abzählung der Bedingungen, die diesen Daten gleichwertig sind, ergibt z. B. für den Fall $n=2k$:

n	Brennpunkte	1.	Ranges erfordern	$2.n$	Konstante,
$n-2$	„	2.	„ „	$2.(n-2)$	„
$n-4$	„	3.	„ „	$2.(n-4)$	„
.....					
2	„	k.	„ „	2.2	„

Die Zahl dieser Bedingungen ist also

$$2.(2+4+6+\ldots+(n-2)+n)=2k.(k+1).$$

Dazu kommen noch die k Fokalparameter, so dass die Gesammtzahl der Bedingungen ist

$$2k.(k+1)+k=n.(n/2+1)+n/2=1/2.n.(n+3),$$

d. h. gerade so viel, als zur Bestimmung einer Kurve n^{ter} Klasse nötig sind.

Es ist zu erwarten, dass die höheren algebraischen Kurven auch kanonischen Relationen der Brennpunktsentfernungen ihrer *Punkte* genügen. Frei von Willkür wird eine solche Relation sein, wenn in ihr das *vollständige* Fokalsystem der Kurve auftritt & wenn die Brennpunkte des nämlichen Ranges gleichwertig in sie eintreten.

Zürich, im November 1925.

Zur Anwendung des Variationsprinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von Kornel Lanczos in Frankfurt a/M.

Bekanntlich können die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation aus einem Wirkungsprinzip abgeleitet werden, indem man die Variation eines bestimmten Wirkungsintegrals gleich Null setzt. Soweit es sich um die Feldgleichungen im Vakuum handelt, ist das in Frage kommende Wirkungsprinzip von rein geometrischer Natur. Man hat als Integranden des Wirkungsintegrals einfach die skalare Riemannsche Krümmung R zu nehmen, bezw. noch eine universelle Konstante λ hinzuzufügen, um die „kosmologischen" Gleichungen Einsteins zu finden.

Das Wirkungsprinzip lautet also:

$$\delta I = \delta \int (R + \lambda)\, dv = 0 \tag{1}$$

wenn mit dv das Volumelement bezeichnet wird. Zu variieren sind dabei die g_{ik} Komponenten des metrischen Fundamentaltensors, die als gegebene Funktionen von 4 Koordinaten zu gelten haben. Damit wir für das Folgende einen besseren Anhalt haben, sei die kleine Rechnung auch explizite angeführt. Für die Variation der g_{ik} wollen wir die Bezeichnung γ_{ik}, für die Variation der R_{ik} die Bezeichnung ϱ_{ik} einführen, setzen also:

$$\begin{aligned} \delta g_{ik} &= \gamma_{ik} \\ \delta R_{ik} &= \varrho_{ik} \end{aligned} \tag{2}$$

Nun haben wir für die Variation des Integranden:

$$\delta R = \delta R_{ik} g^{ik} = g^{ik} \delta R_{ik} + R_{ik} \delta g^{ik} \tag{3}$$

Indem wir die Gleichung:

$$g^{is} g_{ks} = \eta_k^i \tag{4}$$

(η_k^i der gemischte Einheitstensor) variieren, können wir die Variation der g^{ik} leicht auf die Variation der g_{ik} zurückführen und finden:

$$\delta g^{ik} = - g^{ir} g^{ks} \delta g_{rs} = - \gamma^{ik} \tag{5}$$

Es wird also die Variation von R:

$$\delta R = g^{ik} \varrho_{ik} - R^{ik} \gamma_{ik} \tag{6}$$

Ausserdem sind die g_{ik} auch im Volumelement dv enthalten, denn es ist ja:

$$dv = \sqrt{g}\, d x_1 \ldots d x_4 \tag{7}$$

und somit:

$$\delta\, dv = \delta \sqrt{g}\, d x_1 \ldots d x_4 = \frac{\delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}}\, dv = \frac{1}{2} (\gamma_{ik} g^{ik})\, dv \tag{8}$$

Die gesamte Variation unseres Wirkungsintegrals können wir also nunmehr folgendermassen hinschreiben:

$$\delta I = \int \varrho_{ik} g^{ik}\, dv - \int \left[R^{ik} - \frac{1}{2} (R + \lambda) g^{ik}\right] \gamma_{ik}\, dv \tag{9}$$

Der Ausdruck für ϱ_{ik} — also die Veränderung der Krümmungskomponenten bei einer unendlich schwachen Deformation des metrischen Feldes — wird in der Theorie der unendlich schwachen Felder abgleitet. Ich habe ihn in der Formel (16) einer anderen Arbeit explizite angegeben.[1]) Bilden wir an Hand dieser Formel den Skalar $\varrho_{ik} g^{ik}$, so erkennen wir leicht, dass nur die beiden ersten Terme von 0 verschieden übrig bleiben, da die letzten 3 Terme sich in ihrer Summe aufheben. Die in Frage kommenden Terme lassen sich aber in Form einer Divergenz eines Vektors hinschreiben und bekanntlich kann dann unmittelbar die Gauss-sche Integraltransformation angewandt werden. Das erste Volumenintegral lässt sich also in ein Randintegral umwandeln. Betrachten wir den vorgegebenen Bereich der ganzen Welt als eine endliche, in sich geschlossene, randlose Mannigfaltigkeit, so fällt dieses Integral überhaupt weg, falls wir noch hinzufügen, dass die g_{ik} samt ihren ersten Ableitungen überall stetige Funktionen der Koordinaten seien.

Was uns also im weiteren überhaupt interessiert, ist nur das zweite Integral der Gleichung (9), also:

$$\delta I = - \int \left[R_{ik} - \frac{1}{2} (R + \lambda) g_{ik}\right] \gamma^{ik}\, dv \tag{10}$$

---

[1]) „Zum Problem der unendlich schwachen Felder in der Einsteinschen Gravitationstheorie", ZS. f. Physik, *31*, 112—132, 1915, S. 117.

Betrachten wir nun die γ_{ik} als frei wählbare Funktionen, — abgesehen von den allgemeinen Stetigkeitsbedingungen, — so muss offenbar der Faktor von γ_{ik} verschwinden und auf diese Weise gelangen wir, wie üblich, zu den Gleichungen:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}(R+\lambda)g_{ik} = 0 \tag{11}$$

oder, wie wir auch sagen können, zu der Gleichung:

$$T_{ik} = 0 \tag{12}$$

wenn T_{ik} den Tensor der Materie bedeutet. Nach der EINSTEINschen Theorie besteht nämlich zwischen dem Krümmungstensor und dem Materietensor ganz allgemein folgender Zusammenhang:

$$T_{ik} = \varkappa\,[R_{ik} - \frac{1}{2}(R+\lambda)g_{ik}], \tag{13}$$

wo $\varkappa$ eine universelle, von der Wahl der Masseinheiten abhängige Konstante bedeutet. Wir können sie bei entsprechender Wahl der Masseneinheit auch $=1$ setzen.

So scheint uns also ein rein geometrisches Wirkungsprinzip nur die Feldgleichungen für das reine Vakuum ergeben zu können und für das Innere der Materie, insbesondere auch für das elektromagnetische Feld, keine Anhaltspunkte zu gewähren. Bekanntlich hat man sich aus diesem Grunde veranlasst gefühlt, die allgemeinen Grundlagen der RIEMANNschen Geometrie zu erweitern, von dem Wunsche geführt, auch für die elektromagnetischen Felder eine geometrische Interpretation zu finden (WEYL, EDDINGTON, EINSTEIN).

Wir wollen nun in Bezug auf die freie Variation der g_{ik} auf einen Umstand hinweisen, der noch nicht bemerkt zu sein scheint, obwohl ihm u. E. eine grosse Tragweite zukommt und auch für das Problem des Vektorpotentials einen ganz neuen, im Wesen der Sache begründeten Gesichtspunkt liefert.

Denken wir uns die gegebenen x_i Koordinaten durch eine unendlich schwache Transformation in neue: x'_i übergeführt, indem wir setzen:

$$x'_i = x_i + \varepsilon f_i(x_1 \dots x_4) \tag{14}$$

Es wird dann offenbar das Linienelement nur unendlich wenig modifiziert: die neuen g'_{ik} sind von den g_{ik} nur unendlich wenig verschieden. Eine leichte Rechnung zeigt, dass wir haben:

$$g'_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} g_{sk} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} g_{si}\right) \tag{15}$$

Offenbar können wir diese Modifikation auch als eine mögliche Variation der g_{ik} betrachten, wobei hier zu setzen ist:

$$\gamma_{ik} = \varepsilon \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} g_{sk} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} g_{si} \right). \tag{16}$$

Nun würde man im ersten Augenblick meinen, dass durch eine blosse Transformation der Koordinaten sicher keine Modifikation des Wirkungsintegrals eintreten kann. Sowohl der Integrand, wie auch das Volumelement sind ja invariant gegenüber Transformationen, also muss es auch das Integral sein. Betrachten wir aber andererseits die Formal (10), so erkennen wir, dass für die Variation des Integrals die spezielle Form (16) der γ_{ik} durchaus keine exzeptionelle Rolle spielt und dass sehr wohl ein von 0 verschiedenes Resultat herauskommen kann. Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist in folgendem zu suchen.

Führen wir in unserem Wirkungsintegral irgend welche neue Koordinaten ein, so bekommen wir das Integral:

$$\int (R' + \lambda)\, dv'$$

wo der Strich andeuten soll, dass die neuen Koordinaten eingesetzt wurden. Es ist offenbar:

$$\int (R' + \lambda)\, dv' = \int (R + \lambda)\, dv \tag{17}$$

wobei aber diese Gleichung zur Voraussetzung hat, dass die Integrale links und rechts über *entsprechende* Gebiete erstreckt werden, also beim Integral linker Hand Grenzen einzusetzen sind, die den neuen Variabeln entsprechen. Berechnen wir aber die Differenz der beiden Integrale, *aufgefasst als Variation*, so bilden wir den Ausdruck:

$$\int [(R' + \lambda)\, dv' - (R + \lambda)\, dv]$$

und integrieren hierbei über den *alten* Bereich der Variabeln. Wir bilden also hier das erste Integral nicht für den neuen Bereich der transformierten Variabeln, sondern für den ursprünglichen. Dann ergibt sich natürlich eine Variation des Wirkungsintegrals, aber offenbar nicht als Folge davon, als hätten wir den Integranden variiert, sondern allein durch eine *Variierung der Grenzen des Bereiches.*

Wir kommen somit zu folgendem interessanten Resultat. *In einer freien Variation der g_{ik} sind zwei wesentlich von einander* *verschiedene Prozesse gemeinsam enthalten. Einerseits eine wirkliche Variation des Integranden, andererseits eine blosse Variation der Integrationsgrenzen.*

Wir haben es also, um zur Erläuterung ein Beispiel anzuführen, mit einem analogen Fall zu tun, als suchten wir die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten, wobei aber auch noch die Lage des einen Endpunktes variiert werden müsste. Eine solche Forderung geht offenbar zu weit. In allen Anwendungen des HAMILTONschen Prinzips in der Physik sind wir gewohnt, die Variation des Wirkungsintegrals unter Voraussetzung eines *festen*, vorgegebenen Gebietes auszuführen. Auch bei der Anwendung des HAMILTONschen Prinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie wird es eine durchaus plausible Forderung sein, nur solche Variationen in Betracht zu ziehen, die einer wirklichen Variation des Wirkungsintegrals entsprechen, nicht aber einer Variation des Integrationsbereiches.

Es fragt sich nur, wie wir die letzteren, nicht erwünschten Variationen ausschalten sollen. Es sind dies offenbar diejenigen γ_{ik}-Felder, die durch eine blosse unendlich schwache Transformation der Koordinaten hervorgerufen werden. Prinzipiell sind ja beliebige Transformationen zulässig. Nur müssten wir dann auch den Integrationsbereich entsprechend transformieren und bleibt dann das Wirkungsintegral überhaupt unverändert. Die Ausführung einer Koordinatentransformation ist also jedenfalls überflüssig, und, da wir bei unserem ursprüchlichen Integrationsbereich bleiben wollen, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit Transformationen der Koordinaten und dadurch hervorgerufene γ-Felder a priori ausschliessen.

Wie wir dabei vorzugehen haben, darüber gibt uns die Theorie der unendlich schwachen Felder eindeutigen Aufschluss. Auch hier empfinden wir es als störenden Umstand, dass durch blosse Transformation unendlich schwache Zusatzfelder erzeugt werden können, die offenbar nur als „Scheinfelder" zu betrachten sind, da sie nicht einem tatsächlichen Hineinbringen von Materie entsprechen. W r schalten diese Scheinfelder aus, indem wir dem γ-Feld folgende vektorielle Bedingung vorschreiben:

$$\operatorname{div}\left(\gamma_{ik} - \frac{1}{2}\gamma g_{ik}\right) = 0 \qquad (\gamma = \gamma_s^s) \tag{19}$$

oder ausgeschrieben, wenn wir für eine „tensorielle Differentiation" das Symbol „ϑ" in Anwendung bringen:

$$\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2} \frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} = 0. \tag{20}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird es möglich, die Veränderung des Masstensors aus der Veränderung der Krümmungskomponenten, also man kann sagen aus der hineingebrachten Materie, eindeutig zu bestimmen.

Infolge der Bedingung (20) werden tatsächlich die durch blosse Koordinatentransformation erzeugten Scheinfelder ausgeschaltet. Ein solches Scheinfeld lässt sich nämlich in folgender Form schreiben:

$$\gamma_{ik} = \frac{\vartheta \varphi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \varphi_k}{\vartheta x_i}. \tag{21}$$

Der Umstand, dass diese Felder auf einen beliebig zu wählenden, wenn nur samt allen ersten und zweiten Ableitungen stetigen Vektor φ_i zurückgeführt werden können, entspricht der Tatsache, dass uns bei der Transformation (14) die 4 frei wählbaren Funktionen $f_i(x_1 \ldots x_4)$ zur Verfügung stehen.

Setzen wir die Form (21) in die Gleichung (20) ein, so erhalten wir für den Vektor φ_i folgende Bedingungsgleichung:

$$\Delta \varphi_i - R_i^s \varphi_s = 0. \tag{22}$$

Wir haben es hier mit einem homogenen linearen Differentialausdruck für einen Vektor zu tun. Falls es sich nicht gerade um ein Gebiet handelt, wo „Eigenlösungen" vorhanden sind, dürfen wir voraussetzen, dass diese Gleichung keine von 0 verschiedene Lösung besitzt, die samt allen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig wäre. Felder von der Form (21) werden also tatsächlich durch die Forderung (20) ausgeschlossen.

Dass andererseits die Bedingung (20) nicht *zu weit* geht, erkennen wir folgendermassen. Ein jedes Variationsfeld γ_{ik} lässt sich als Superposition von 2 Feldern betrachten, derart, dass das eine die Bedingung (2) erfüllt, während, das andere von der Form (21) ist. Die letztere Variation geht aber auf eine blosse Variation des Gebietes hinaus, während die erstere eine tatsächliche Variation der Wirkungsfunktion darstellt.

So haben wir also in der Bedingung (20) eine Mittel in der Hand, die beiden Arten von Variationen: eine wirkliche Variation des Integranden einerseits, eine blosse Variation des Bereiches andererseits, scharf von einander zu trennen. Wollen wir uns auf die wirklichen Variationen beschränken, und die Variation des Gebietes ausschalten, so brauchen wir nur zu fordern, dass die γ_{ik} nicht mehr beliebige Funktionen seien, sondern solche, die der Bedingung (20) Genüge leisten.

Diese Einschränkung, die durchaus im Wesen der Sache begründet liegt, führt zu weittragenden Kensequenzen. Wir haben es jetzt mit einem „Variationsproblem mit Nebenbedingungen" zu tun, dessen Lösung nach den bekannten Methoden der Variationsrechnung unschwer gegeben werden kann. Wir müssen die Nebenbedingung mit einem LAGRANGEschen Faktor multipliziert zum Wirkungsintegral addieren und dann das Problem so behandeln, wie ein „freies" Problem. In unserem Fall, wo die Nebenbedingung von vektorieller Art ist, tritt als LAGRANGEscher Multiplikator ein *Vektor* auf, den wir mit Φ_i bezeichnen wollen.

Unser zu lösendes Variationsproblem können wir also jetzt in folgender Form hinschreiben:

$$\delta I = -\int \left[T_{ik}\gamma^{ik} + 2\,\Phi^i \left(\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2}\frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} \right) \right] dv = 0. \qquad (23)$$

Im zweiten Term führen wir in bekannter Weise eine partielle Integration aus. Wir können setzen:

$$\Phi^i \left(\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2}\frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} \right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x_s}\left(\Phi^i \gamma_i^s - \frac{1}{2}\gamma\,\Phi^s \right) - \left(\gamma_i^s - \frac{1}{2}\gamma\,\eta_i^s \right)\frac{\vartheta \Phi^i}{\vartheta x_s}. \qquad (24)$$

Die Integration über den ersten Ausdruck lässt sich dann wieder unter Anwendung des GAUSSschen Satzes in ein Berandungsintegral überführen, so dass für das Volumintegral nur der zweite Ausdruck übrig bleibt, wo die γ_{ik}-Grössen nur noch als blosse Faktoren auftreten. Die Einführung in die Formel (23) ergibt:

$$-\int \left[T_{ik} - \left(\frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \Phi_k}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^s}{\vartheta x_s} g_{ik} \right) \right] \gamma^{ik}\, dv = 0. \qquad (25)$$

Da jetzt die γ_{ik} bereits frei wählbare Funktionen sind, müssen ihre Koeffizienten überall verschwinden und wir erhalten für den Materietensor folgende Beziehung:

$$T_{ik} = \frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \Phi_k}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^s}{\vartheta x_s} g_{ik}. \qquad (26)$$

Der Materietensor verschwindet also nicht mehr, sondern wird auf einen Vektor Φ_i zurückgeführt.

Dass dieser Vektor tatsächlich den Charakter eines Potentials besitzt, erkennen wir, wenn wir die Divergenzgleichung für die Materie bilden, also die Gleichung:

$$\operatorname{div} T_{ik} = 0. \tag{27}$$

Das ergibt nach einer leicht auszuführenden Rechnung folgende Bedingungsgleichung für Φ_i:

$$\Delta \Phi_i - R_i^s \Phi_s = 0. \tag{28}$$

Diese Gleichung ist praktisch nur sehr wenig von der üblichen Gleichung des Vektorpotentials:

$$\Delta \Phi_i = 0 \tag{29}$$

verschieden, weil die Krümmungskomponenten R_{ik} im allgemeinen sehr kleinen Grössen sind.

Nun ist ja die Gleichung (28) dieselbe, wie die früher für den Vektor φ_i gefundene [vrgl. Gl. (22)]. Wir setzten voraus, dass sie keine von 0 verschiedene reguläre Lösung besitzt und schlossen gerade daraus auf das Verschwinden von φ_i. Dieselbe Schlussweise auf den Vektor Φ_i angewandt würde auch sein identisches Verschwinden nach sich ziehen. Wir dürfen aber Φ_i nicht als eine überall reguläre vektorielle Funktion betrachten. Sie muss nur als überall endlich vorausgesetzt werden, wobei aber singuläre Stellen vorhanden sein dürfen, wo Diskontinuitäten in Form eines Sprunges der Komponenten oder deren ersten Ableitungen auftreten. Es ist offensichtlich, wo wir diese Diskontinuitäten des Vektorpotentials suchen werden müssen: an den Begrenzungsflächen der Elektronen und Protonen, die auf diese Weise als *singuläre Stellen des Vektorpotentials* aufzufassen sind.

So gelangen wir an Hand unserer durchaus naturgemäss begründeten Einschränkung in der freien Variation der g_{ik} nicht nur zu einer organischen Einführung eines vektoriellen Potentials in die Einsteinsche Gravitationstheorie, sondern auch zu einer neuen Auffassung über das Wesen der Materie. Die Materie erscheint nicht mehr als singuläre Stelle des metrischen Feldes, vielmehr bleibt der metrische Fundamentaltensor überall endlich und stetig und das gilt sogar auch noch von allen seinen ersten Ableitungen. Die Materie ist überall in volumenhafter Verteilung vorhanden und wird durch das Vektorpotential bestimmt. Die

Grenzen des regulären Feldes, also die Weltschläuche der Elektronen und Protonen, sind an den Sprungstellen des Vektorpotentials zu suchen. Wir haben es da aber zugleich mit *Sprungstellen der Materie* zu tun, da der Materietensor offenbar unstetig wird, wenn in den ersten Ableitungen des Vektorpotentials Unstetigkeiten auftreten. Wir wissen, dass solche Unstetigkeiten in der Tat zulässig sind, ohne, dass dadurch im Masstensor selber, oder in seinen ersten Ableitungen Unstetigkeiten bedingt würden. Es bestehen hier analoge Verhältnisse, wie etwa beim Potential einer homogenen Vollkugel, das an der Berandung samt allen ersten Ableitungen ebenfalls stetig bleibt, trotzdem die Materiedichte hier von einem bestimmten konstanten Wert plötzlich auf Null fällt.

Wichtig ist aber zu bemerken, dass die Unstetigkeiten der Materie nicht beliebig vorgeschrieben werden können, sondern einer bestimmten vektoriellen Bedingung genügen müssen. Es muss der Vektor $T_{is}\nu^s$, wo ν_i die Flächennormale bedeutet, stetig durch eine Diskontinuitätsfläche hindurchgehen.[2]) Wenn wir einen Sprung durch die Bezeichnung $[\ ]_2^1$ andeuten, so muss also sein:

$$[T_{is}]_2^1\,\nu^s = 0 \tag{30}$$

Das bedeutet für den Sprung in den Ableitungen des Vektorpotentials eine ganz bestimmte vektorielle Bedingung, nämlich:

$$\left[\frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_s} + \frac{\vartheta \Phi_s}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^\sigma}{\vartheta x_\sigma} g_{is}\right]_2^1 \nu^s = 0. \tag{31}$$

Von der Potentialtheorie, beziehungsweise von der Theorie der Integralgleichungen her ist es bekannt, dass eine Potentialfunktion (gleichviel, ob skalarer oder vektorieller Art), im Innern eines regulären Gebietes aus den Randwerten eindeutig bestimmt werden kann. Die Singularitätsflächen der Weltschläuche grenzen nun ein inneres Gebiet vollständig von einem äusseren ab. Wir dürften also von vornherein die Randwerte des Vektorpotentials sowohl für die Innenseite, wie für die Aussenseite frei vorschreiben. (Statt den Randwerten selber können ebenso gut auch die beiderseitigen Ableitungen nach der Normale in Frage kommen). So hätten wir also in jedem Punkt der Singularitätenfläche zwei frei wählbare Vektoren zur Verfügung. Infolge der Randbedingung (31) werden aber diese beiden Vektoren auf einander zurückgeführt,

[2]) s. meine Arbeit: „Flächenhafte Verteilung der Materie in der EINSTEINschen Gravitationstheorie", Ann. d. Phys. *74*, 519—540, 1924, S. 536.

so dass nur noch einer frei verfügbar bleibt, während der andere mit Hilfe einer inhomogenen Integralgleichung bereits durch diesen festgelegt wird. Die noch übrig bleibende Freiheit in der Wahl der Randwerte, sowie dem Verlauf der Singularitätsflächen kann durch die Feldgleichungen allein nicht weiter eingeschränkt werden. Hier tritt das „dynamische HAMILTONsche Prinzip" als weiteres regulierendes Prinzip in Wirkung.

Wir wollen noch bemerken, dass die Integration der Differentialgleichung (28), also die Bestimmung des Vektorpotentials aus den Randwerten, insofern nicht ohne weiteres möglich ist, als hierbei die g_{ik} nicht als a priori gegebene Funktionen gelten können, sondern von der Verteilung der Materie abhängen, die ihrerseits wieder erst durch das Vektorpotential bestimmt wird. Auch hier, wie bei allen ähnlichen Problemen der allgemeinen Relativitätstheorie, gelangt man aber zum Ziel durch die Methode der sukzessiven Integration, indem man eine Reihenentwicklung nach einem variablen Parameter $\varkappa$ vornimmt und so eine beliebig starke Modifikation eines gegebenen Grundfeldes auf eine unendlich schwache Modifikation zurückführt.

Das ganze hier behandelte Variationsproblem kann auch noch von einer anderen Seite her in Angriff genommen werden.[3]) Man kann bei der Anwendung des Wirkungsprinzips die *Materie* als den eigentlichen Ursprung des Feldes betrachten und dementsprechend nicht die g_{ik}, sondern die Krümmungskomponenten R_{ik} als die ursprünglich zu variirenden Grössen auffassen, während die Veränderung der g_{ik} durch eine Integration auf die Veränderung der R_{ik} zurückgeführt wird. Hier dient die Nebenbedingung (20), wie bereits bemerkt, dazu, um das Problem eindeutig zu machen. Es sind nun aber auch die Komponenten des Materietensors keine frei wählbaren Funktionen, sie müssen vielmehr der Divergenzbedingung (27) genügen. Auch hier tritt also eine vektorielle Nebenbedingung und dementsprechend ein vektorieller LAGRANGEscher Multiplikator Ψ_i auf. Die Feldgleichungen, die jetzt resultieren, können wieder in die Form (26) gebracht werden, wobei unser früheres Vektorpotential Φ_i mit dem Multiplikator Ψ_i folgendermassen zusammenhängt:

$$\Phi_i = \Delta \Psi_i - R_i^s \Psi_s. \qquad (32)$$

[3]) Siehe meine in der „Zeitschrift für Physik" 32, 163—172, 1925 erschienene Arbeit: „Zum Wirkungsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie."

Wir erkennen hier besonders deutlich, dass das Vektorpotential in der Tat keine überall stetige Funktion zu sein braucht. Denn selbst wenn wir Ψ_i samt allen ersten Ableitungen als überall stetig voraussetzen, können in den zweiten Ableitungen, durch welche das Δ bestimmt wird, Diskontinuitäten auftreten.

Auf weitere Folgerungen wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen. Die logische Notwendigkeit des Aufbaues lässt aber kaum einen Zweifel darüber übrig, dass das hier organisch in die Einsteinsche Gravitationstheorie eingeführte Vektorpotential mit dem elektromagnetischen Vektorpotential in enger Beziehung steht und dass die vielgesuchte Verschmelzung von Gravitation und Elektromagnetismus auf dem hier entdeckten Wege möglicherweise seiner Verwirklichung entgegengeführt wird.

Frankfurt a. Main, März 1925.

Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen.

Von J. v. Neumann in Budapest.

ERSTE MITTEILUNG.

Einleitung.

Mit Hilfe der von Herrn Prüfer [1]) eingeführten sogenannten „idealen Zahlen“ können die Teilbarkeitätsverhältnisse in einem algebraischen Körper ebensogut untersucht werden, wie mit den Dedekindschen Idealen; sie haben aber diesen gegenüber den Vorteil, einen Ring zu bilden: d. h. es ist für sie ausser der Multiplication und einer Division auch die Addition und Subtraktion definiert. Dabei entspricht auch jeder wirklichen algebraischen Zahl eine besondere ideale Zahl, und nicht (wie bei den Idealen) bloss jeder Klasse assoziierter algebraischer Zahlen. Jedem Dedekindschen Ideal entspricht eine Klasse assoziierter idealer Zahlen, aber nicht umgekehrt. (Was unter diesem „Entsprechen“ gemeint ist, soll später präzisiert werden.)

Das System der idealen Zahlen ist nämlich wesentlich grösser, als das der Ideale: auch wenn wir von der idealen Zahl 0 und von den Nullteilern absehen (diesen können ja offenbar keine Ideale entsprechen), gibt es noch immer ideale Zahlen, denen keine Ideale entsprechen. Prüfer bezeichnet die letzteren als unendliche ideale Zahlen, und die übrigen (ausser der 0 und den Nullteilern) als endliche ideale Zahlen.

Für die endlichen Zahlen beweist Prüfer (entsprechend dem analogen Satze für Ideale) den Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren. Die Dedekindsche Theorie der Ideale wird

[1]) H. Prüfer: Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Ann., Bd. 94 (1925), Seite 198—243.

von Prüfer nicht benützt, er zeigt im Gegenteil, wie diese aus seiner Theorie gewonnen werden kann. Ihre wesentlichsten Grundtatsachen beweist er aber am Anfang der Arbeit als „Sätze über Moduln", da ohne dieselben die Untersuchung der idealen Zahlen unmöglich ist.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit soll die Prüferschen Resultate aus einem anderen Gesichtspunkte beleuchten. Prüfer führt die idealen Zahlen als „ideale Lösungen" unendlicher Congruenzsysteme ein; wir werden durch ein Verfahren zu ihnen gelangen, das der Cantorschen Einführung der reellen Zahlen und noch mehr der Kürschákschen[2]) resp. Bauerschen[3]) Einführung der von Hensel geschaffenen rationalen und algebraischen p-adischen Zahlen analog ist.

Die Resultate Prüfers über die Struktur der idealen Zahlen werden so auf anderem Wege gewonnen. In einer Richtung gelangen wir sogar noch weiter: wir beschränken uns nämlich bei der Untersuchung der multiplikativen Zerlegung nicht auf die endlichen idealen Zahlen, und wir gewinnen dabei den Satz von der eindeutigen Möglichkeit dieser Zerlegung in einer wesentlich allgemeineren Form. Es zeigt sich nämlich, dass alle idealen Zahlen (nicht nur die endlichen und unendlichen, sondern auch die Nullteiler und die 0) als Produkte von Primfaktoren dargestellt werden können. Die endlichen idealen Zahlen unterscheiden sich nur dadurch von den übrigen, dass man dabei mit einer endlichen Anzahl von Faktoren auskommt. Wenn unendlich viele Primfaktoren auftreten, so ist die Zahl unendlich; wenn sogar ein und derselbe Primfaktor unendlich oft auftritt, so ist sie ein Nullteiler; und wenn alle Primfaktoren vorkommen, und alle unendlich oft, so ist sie die Null.

Damit das Wesentliche unserer Gedankengänge besser hervortrete, setzen wir die Dedekindsche Theorie der Ideale durchweg als bekannt voraus.

Während sich die Untersuchungen des ersten Teiles (ebenso wie die Prüferschen) immer auf algebraische Zahlen eines (durch

[2]) J. Kürschák: Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Journal für Math., Bd. 142 (1913). Die p-adischen rationalen Zahlen behandeln §§ 19—23, Seite 229—232.

[3]) M. Bauer: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen, und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper, Math. Zeitschrift, Bd. 14 (1922), Seite 244—249.

die Zahl ϑ erzeugten) Körpers $K(\vartheta)$ beziehen, wird im zweiten Teile die Übertragung der Theorie auf den Körper *aller* algebraischen Zahlen versucht.

Hier sind wir auf das Verfahren von PRÜFER (unendliche Congruenzsysteme) angewiesen. Das im ersten Teile benützte Verfahren versagt; und zwar im wesentlichen darum, weil es keine Primideale (genauer: Primidealpotenzen) im Körper aller algebraischen Zahlen gibt. Die Primidealpotenzen müssen vielmehr durch den komplizierteren Begriff der „Idealfolgen" ersetzt werden, der von Herrn M. BAUER[4]) aufgestellt wurde. Und während es in einem Körper $K(\vartheta)$ bloss abzählbar viele Primidealpotenzen gibt, gibt es, wie wir zeigen werden, kontinuum-viele BAUERsche Idealfolgen.

Die hier herrschenden Verhältnisse charakterisiert der folgende (im zweiten Teile zu beweisende) Satz:

Jedes DEDEKINDsche Ideal kann in einem geeignet gewählten Körper in beliebig viele, paarweise relativ-prime und von der Einheit verschiedene, Idealfaktoren zerlegt werden.

Dies gilt natürlich nur im Körper *aller* algebraischen Zahlen, wenn hier *alle* DEDEKINDschen Ideale zulassen; in einem Körper $K(\vartheta)$ gilt, wie aus der Zerlegbarkeit in Primfaktoren folgt, das Gegenteil.

ERSTER TEIL.

I. Bezeichnungen.

Sei ϑ eine algebraische Zahl, die im Folgenden als fest gegeben angenommen wird; l sei der Grad von ϑ, $K=K(\vartheta)$ der durch ϑ bestimmte Körper, d. h. die Menge aller Zahlen

$$r_0 \,.\, \vartheta^{l-1} + r_1 \,.\, \vartheta^{l-2} + \ldots + r_{l-2} \,.\, \vartheta + r_{l-1}$$

wo $r_0, r_1, \ldots, r_{l-2}, r_{l-1}$ alle rationalen Zahlen durchlaufen. Die zu $K(\vartheta)$ gehörenden Zahlen nennen wir *reale Zahlen* (im Gegensatze zu dem später zu definierenden idealen Zahlen).

Wir werden die folgenden Bezeichnungen anwenden: ganze rationale Zahlen bezeichnen wir mit dem Buchstaben $m, n, \ldots$;

---

[4]) M. BAUER: Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper, Math. Zeitschrift, Bd. 19 (1924), Seite 308–312. Auf die zitierten Arbeiten wurde ich durch Herrn Professor J. KÜRSCHÁK aufmerksam gemacht und so zu meinen Untersuchungen angeregt.

reale Zahlen mit $\alpha, \beta, \ldots$ oder $\xi, \eta, \ldots$ Ideale des Körpers K bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$; Primideale mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$; Folgen realer Zahlen bezeichnen wir mit $R, S, \ldots$; die (später zu definierenden) idealen Zahlen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$

Unter $\alpha \mid \beta$, bzw. $\mathfrak{a} \mid \beta$, bzw. $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ verstehen wir, (wie es allgemein üblich ist) dass die Zahl $\frac{\beta}{\alpha}$ algebraisch ganz ist, bzw. dass die Zahl β zum Ideal $\mathfrak{a}$ gehört, bzw. dass das Ideal $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ ganz ist. Dasjenige Ideal, welches der grösste gemeinsame Teiler der realen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ist, bezeichnen wir mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

II. Grundlegende Definitionen.

Definition 1. α sei eine reale Zahl, m eine ganze rationale Zahl, $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Wir sagen, dass α *den Faktor* $\mathfrak{p}^m$ *enthält* (oder *hat*) wenn es eine durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbare (reale) algebraisch ganze Zahl ξ gibt, sodass $\alpha\xi$ durch $\mathfrak{p}^m$ teilbar ist.[5])

Wenn $\alpha \neq 0$ ist, so liesse sich diese Definition offenbar auch so fassen: wir bringen das Ideal (α) auf die Form

$$\mathfrak{p}^m \cdot \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{m_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ sind von $\mathfrak{p}$ und voneinander verschiedene Primideale, m und $m_1, m_2, \ldots, m_r$ gleich $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); α enthält den Faktor $\mathfrak{p}^n$ dann und nur dann, wenn $n \leqq m$ ist. Gelegentlich ist diese Fassung der Definition die besser verwendbare.

Satz 1. Wenn α den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat, und $n \leqq m$ ist, so hat es auch den Faktor $\mathfrak{p}^n$.

Wenn α den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat, und $\alpha \mid \beta$ ist, so hat auch β den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

---

5) Dieser Begriff des „Enthaltens eines Faktors", der im wesentlichen schon bei Hensel eine fundamentale Rolle spielt, wird uns gestatten sämmtliche ideale Zahlen auf einmal einzuführen, wärend Prüfer vorerst nur die ganzen idealen Zahlen definiert und die gebrochenen idealen Zahlen sodann durch formale Division einführt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass trotz $\mathfrak{p}^0 = \mathfrak{q}^0$ ($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zwei verschiedene Primideale) es etwas anderes ist, den Factor $\mathfrak{p}^0$ zu enthalten, als den Factor $\mathfrak{q}^0$ zu enthalten. Wenn z. B. α eine zu $\frac{(1)}{\mathfrak{q}}$ aber nicht zu (1) gehörige reale Zahl ist, so hat α wohl den Factor $\mathfrak{p}^0$, aber nicht den Factor $\mathfrak{q}^0$.

Wenn α und β den Faktor $\mathfrak{p}^m$ haben, so hat auch $\alpha \pm \beta$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Wenn α den Faktor $\mathfrak{p}^m$ und β den Faktor $\mathfrak{p}^n$ hat, so hat $\alpha\beta$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m+n}$.

Wenn $\mathfrak{p}^m \mid \alpha$ ist, so hat α den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Wenn α algebraisch ganz ist, so gilt auch die Umkehrung.

Wenn $\alpha\beta$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m+n}$ hat, und β den Faktor $\mathfrak{p}^{n+1}$ nicht hat, so enthält α den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Beweis: Klar.

Definition 2. $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ sei eine Folge realer Zahlen. Wir nennen R eine *Fundamentalfolge* wenn für jedes $\mathfrak{p}$ und m fast alle[6]) Differenzen α_r α_{r+1} den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten.

Definition 3. $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ und $S = [\beta_1, \beta_2, \ldots]$ seien Folgen realer Zahlen. Wir nennen R und S *äquivalent,* in Zeichen: $R \sim S$, wenn für jedes $\mathfrak{p}$ und m fast alle Differenzen $\alpha_r - \beta_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten.

Satz 2. Es ist stets $R \sim R$.

Aus $R \sim S$ folgt $S \sim R$.

Aus $R \sim S$ und $S \sim T$ folgt $R \sim T$.

Beweis: Klar.

Infolge des Satzes 2. zerfällt die Menge der Folgen realer Zahlen in paarweise elementefremde Klassen untereinander äquivelenter Folgen. D. h.: eine Folge R gehört zu einer und nur einer Klasse, und diese umfasst alle mit R äquivalenten Folgen.

Satz 3. Wenn $R \sim S$ ist, so sind entweder beide Folgen R, S fundamental, oder keine von ihnen.

Beweis: Klar.

Aus Satz 3 folgt, dass jede unserer Aequivalenzklassen entweder lauter Fundamentalfolgen enthält, oder keine einzige.

Definition 4. Eine Aequivalenzklasse, die lauter Fundamentalfolgen enthält, nennen wir eine *ideale Zahl.*[7])

Definition 5. Wenn die Fundamentalfolge R zur Aequivalenzklasse (idealen Zahl) $\mathfrak{A}$ gehört, so sagen wir, $\mathfrak{A}$ und R gehören zu einander, in Zeichen: $\mathfrak{A} \sim R$.

---

[6]) Unter „gültig für fast alle r“ verstehen wir (wie es allgemein üblich ist): „gültig für alle r mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.“

[7]) Wir definieren die ideale Zahl als die aus den zu ihr gehörigen Fundamentalfolgen gebildete Menge selbst; natürlich könnte man sie auch als ein dieser Menge zugeordnetes ideales Element betrachten.

Satz 4. Jede Fundamentalfolge R gehört zu einer einzigen idealen Zahl, und zu jeder idealen Zahl $\mathfrak{A}$ gehören (unendlich viele) Fundamentalfolgen.

Beweis: Klar.

Satz 5. Aus $\mathfrak{A} \sim R, R \sim S$ folgt $\mathfrak{A} \sim S$; aus $\mathfrak{A} \sim R, \mathfrak{A} \sim S$ folgt $R \sim S$; aus $\mathfrak{A} \sim R$, $\mathfrak{B} \sim R$ folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Beweis: Klar.

Wir bemerken noch:

Satz 6. Wenn R eine Fundamentalfolge ist, und S eine Teilfolge von R, mit beliebiger Reihenfolge der Elemente, so ist auch S fundamental, und es ist $R \sim S$.

Beweis: Nach Satz 3. genügt es die zweite Behauptung zu beweisen. Es sei also $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$, $S = [\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \ldots]$; $\mathfrak{p}$ und m seien beliebig gegeben.

Wir wählen p so, dass aus $r \geqq p$ folgt, dass $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat. Da schliesst man sofort, dass für $r \geqq p$, $s \geqq p$ auch $\alpha_r - \alpha_s$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat.

Wir wählen weiter q so, dass aus $r \geqq q$ stets $n_r \geqq p$ folgt. Dann folgt aus $r \geqq \mathrm{Max}(p, q)$ offenbar $r \geqq p$, $n_r \geqq p$, also muss $\alpha_r - \alpha_{n_r}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten. D. h. es ist $R \sim S$.

III. Grundoperationen.

Satz 7. Wenn die Folgen $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ und $S = [\beta_1, \beta_2, \ldots]$ fundamental sind, so sind es auch die Folgen $[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots]$, $[\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots]$, $[\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \ldots]$.

Beweis: Für die Folgen $[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots]$ und $[\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots]$ ist die Behauptung klar. Für die Folge $[\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \ldots]$ aber stellen wir die folgende Überlegung an:

$\mathfrak{p}$ sei ein Primideal, m ein ganz-rationaler Exponent. Da für fast alle r die Differenz $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^0$ enthält, und ebenso für fast alle r die Differenz $\beta_r - \beta_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^0$ enthält, so findet auch für fast alle r beides zugleich statt. Wir können also p so wählen, dass für $r \geqq p$ sowohl $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ als auch $\beta_r - \beta_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^0$ enthält. Wir nehmen ferner n so an, dass sowohl α_p als β_p den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthält. Dies ist leicht durchzuführen: wir bringen (α_p), (β_p) auf die Form

$$(\alpha_p) = \mathfrak{p}^s \cdot \mathfrak{p}_1^{s_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{s_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{s_n}, \quad (\beta_p) = \mathfrak{p}^t \cdot \mathfrak{p}_1^{t_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{t_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{t_n}$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{p}$ und voneinander verschiedene Primideale) und wählen $n \leqq \mathrm{Min}\,(s, t)$. (Wenn α_p oder $\beta_p = 0$ ist, so versagt zwar dieses Verfahren, dann sind wir aber in der Wahl von s bzw. t ganz frei.) Setzen wir insbesondere $n = \mathrm{Min.}\,(0, s, t)$, so haben α_p, β_p den Faktor $\mathfrak{p}^n$; und auch jedes $\alpha_r - \alpha_{r+1}, \beta_r - \beta_{r+1}$ für $r \geqq p$. Also haben alle α_r, β_r für $r \geqq p$ diesen Faktor.

Für fast alle r enthält $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m-n}$, und für fast alle r enthält $\beta_r - \beta_{r+1}$ denselben Faktor. Ferner sahen wir, dass für fast alle r α_r, β_{r+1} den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthalten (nämlich für $r \geqq p$). Für fast alle r gelten demnach alle drei Bedingungen zugleich.

Für diese r enthalten aber die Zahlen $\beta_{r+1}(\alpha_r - \alpha_{r+1})$ und $\alpha_r(\beta_r - \beta_{r+1})$ beide den Faktor $\mathfrak{p}^{(m-n)+n}$, d. h. $\mathfrak{p}^m$, also enthält ihn auch ihre Summe $\alpha_r\beta_r - \alpha_{r+1}\beta_{r+1}$.

Definition 6. Die im Satz 7. erwähnten Fundamentalfolgen bezeichnen wir bzw. mit $R+S$, $R-S$, RS.

Satz 8. Aus $R' \sim R''$, $S' \sim S''$ folgt $R'+S' \sim R''+S''$, $R'-S' \sim R''-S''$, $R'S' \sim R''S''$.

Beweis: Es sei

$$R' = [\alpha_1', \alpha_2', \ldots], \quad S' = [\beta_1', \beta_2', \ldots],$$
$$R'' = [\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots], \quad S'' = [\beta_1'', \beta_2'', \ldots].$$

Die Behauptungen

$$[\alpha_1', \alpha_2', \ldots] + [\beta_1', \beta_2', \ldots] \sim [\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots] + [\beta_1'', \beta_2'', \ldots]$$
$$[\alpha_1', \alpha_2', \ldots] - [\beta_1', \beta_2', \ldots] \sim [\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots] - [\beta_1'', \beta_2'', \ldots]$$

sind offenbar trivial. Es bleibt nur übrig

$$[\alpha_1', \alpha_2', \ldots] \cdot [\beta_1', \beta_2', \ldots] \sim [\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots] \cdot [\beta_1'', \beta_2'', \ldots]$$

zu beweisen.

Es sei also $\mathfrak{p}$ und m gegeben. Wir wählen n, p so, dass so oft $r \geqq p$ ist, α_r' und β_r'' den Faktor $\mathfrak{p}^n$ immer enthalten. (Dass es solche n, p gibt, und wie sie zu konstruieren sind, wurde beim Beweise des Satzes 7. gezeigt.)

Da nun $R' \sim R''$ und $S' \sim S''$ ist, so enthalten fast alle $\alpha_r' - \alpha_r''$ sowie fast alle $\beta_r' - \beta_r''$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m-n}$. Ausserdem sahen wir soeben, dass fast alle α_r' und fast alle β_r'' den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthalten. Also sind für fast alle r alle vier Bedingungen zugleich erfüllt. Wenn sie aber für ein r sämtlich erfüllt sind, so werden die beiden Produkte $\beta_r''(\alpha_r' - \beta_r')$, $\alpha_r'(\alpha_r'' - \beta_r'')$ den Faktor $\mathfrak{p}^{(m-n)+n}$, d. h. $\mathfrak{p}^m$ enthalten. Also enthält ihn auch ihre Summe $\alpha_r'\alpha_r'' - \beta_r'\beta_r''$.

Damit ist $R' \cdot S' \sim R'' \cdot S''$ bewiesen.

Wenn also $\mathfrak{A} \sim R$, $\mathfrak{B} \sim S$ ist, so hängen die bzw. zu $R+S$, $R-S$, $R.S$ gehörigen idealen Zahlen nur von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (und nicht von R, S) ab.

D e f i n i t i o n 7. Die soeben erwähnten idealen Zahlen bezeichnen wir bzw. mit $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$.

S a t z 9. Für die durch Definition 7 beschriebene Addition, Subtraktion, und Multiplikation gelten die kommutativen, assoziativen, und distributiven Gesetze, und die Subtraktion ist die inverse Operation der Addition.

Beweis: Für reale Zahlen sind alle diese Gesetzte natürlich gültig. Hieraus folgen sie aber, mit Hilfe der Definition 6., sofort für Fundamentalfolgen; und mit Hilfe der Definition 7. für ideale Zahlen.

S a t z 10. Die Folge $[\alpha, \alpha, \ldots]$ ist stets fundamental.

Beweis: Klar.

D e f i n i t i o n 8. Die zur Folge $[\alpha, \alpha, \ldots]$ gehörende ideale Zahl bezeichnen wir mit $\overline{\alpha}$.

S a t z 11. Es ist stets

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}, \quad \overline{\alpha}-\overline{\beta}=\overline{\alpha-\beta}, \quad \overline{\alpha}\,.\,\overline{\beta}=\overline{\alpha\,.\,\beta}.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{A}+\overline{0}=\mathfrak{A}-\overline{0}=\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}-\mathfrak{A}=\overline{0}, \quad \mathfrak{A}\,.\,\overline{1}=\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}\,.\,\overline{0}=\overline{0}.$$

Beweis: Klar.

IV. Ganze ideale Zahlen und Teilbarkeit.

D e f i n i t i o n 9. Wir nennen eine ideale Zahl $\mathfrak{A}$ *ganz*, wenn es unter den zu ihr gehörigen Fundamentalfolgen $[\alpha_1, \alpha_2 \ldots]$ mindestens eine solche gibt, bei der alle α_r algebraisch ganz sind.[8])

S a t z 12. Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ganze ideale Zahlen sind, so sind auch die idealen Zahlen $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ ganz.

Beweis: Klar.

S a t z 13. $\overline{\alpha}$ ist dann und nur dann ganz, wenn α algebraisch ganz ist.

Beweis: Wenn α algebraisch ganz ist, so ist $\overline{\alpha}$ auch ganz, da $[\alpha, \alpha, \ldots]$ zu $\overline{\alpha}$ gehört. Wenn hingegen α nicht ganz ist, so schliessen wir folgendermassen:

[8]) Eine andere Fassung der Definition der ganzen idealen Zahl ist die folgende: $\mathfrak{A}$ ist ganz, wenn es alle Factoren $\mathfrak{p}^0$ enthält. Die Aequivalenz der beiden Definitionen wird im Satze 56. ausgesprochen.

Das Ideal

$$(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{m_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{m_n}$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sind voneinander verschiedene Primideale) ist auch nicht ganz, folglich ist mindestens einer der Exponenten $m_1, m_2, \ldots, m_n$ negativ. Es sei etwa $m_\nu < 0$. Dann hat α gewiss nicht den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^0$.

Nun sei $\overline{\alpha} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$. Dann ist $[\alpha, \alpha, \ldots] \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ und also muss ein $\alpha - \alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^0$ haben. Da α ihn nicht hat, so hat ihn auch α_r nicht. Also kann auch nicht $\mathfrak{p}_\nu^0 \mid \alpha_r$, d. h. $1 \mid \alpha_r$ sein. Folglich ist α_r nicht algebraisch ganz. Da das für alle zu $\overline{\alpha}$ gehörigen $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ gilt, kann auch $\overline{\alpha}$ nicht ganz sein.

Nachdem wir den Begriff der ganzen idealen Zahl definiert, haben, können wir zur Definition der Teilbarkeit bei idealen Zahlen übergehen.

Definition 10. Wenn es zu den zwei idealen Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ eine ganze ideale Zahl $\mathfrak{C}$ gibt, sodass $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}$ ist, so sagen wir, dass $\mathfrak{B}$ *durch* $\mathfrak{A}$ *teilbar ist*, in Zeichen $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$.

Satz 14. Aus $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}$.

Aus $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}_2$ folgt $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}_1 \pm \mathfrak{B}_2$.

Es ist stets $\mathfrak{A} \mid \overline{0}$ und $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$. $\overline{1} \mid \mathfrak{A}$ ist damit gleichbedeutend, dass $\mathfrak{A}$ ganz ist.

Beweis: Klar.

Satz 15. $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$ ist mit $\alpha \mid \beta$ (im Sinne der gewöhnlichen Teilbarkeit) gleichbedeutend.

Beweis: Aus $\alpha \mid \beta$ folgt: $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ganz, also auch $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}$ ganz, und wegen $\overline{\alpha} \cdot \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \overline{\left(\alpha \cdot \dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \overline{\beta}$ ist dann $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$.

Aus $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$ hingegen folgt: $\overline{\alpha} \cdot \mathfrak{C} = \overline{\beta}$, wobei $\mathfrak{C}$ ganz ist, also $\mathfrak{C} \sim [\gamma_1, \gamma_2, \ldots]$ mit lauter algebraisch ganzen γ_r ist. Folglich ist:

$$\overline{\alpha} \cdot \mathfrak{C} \sim [\alpha, \alpha, \ldots] \cdot [\gamma_1, \gamma_2, \ldots] = [\alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2, \ldots]$$

$$\overline{\beta} \sim [\beta, \beta, \ldots]$$

$$[\alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2, \ldots] \sim [\beta, \beta, \ldots]$$

Wenn α den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat, so haben ihn auch alle $\alpha\gamma_r$ (weil alle ganz sind); und da mindestens ein $\alpha\gamma_r - \beta$ auch diesen Faktor hat, so hat ihn auch β. Hieraus folgt aber $\alpha \mid \beta$, denn wenn wir α und β in der Form

$$(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{s_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{s_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{s_n}, \quad (\beta) = \mathfrak{p}_1^{t_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{t_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{t_n}$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ voneinander verschiedene Primideale) schreiben, so sehen wir: α hat jeden der Faktoren $\mathfrak{p}_v^{s_v}$ also auch β; also muss stets $s_v \leqq t_v$ sein, folglich ist $\alpha \mid \beta$. (Eigentlich müssten die Fälle $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ noch für sich erledigt werden. Im Falle $\beta = 0$ ist aber offenbar $\alpha \mid \beta$; und wenn $\alpha = 0$ ist, so muss auch $\beta = 0$ sein, was wieder $\alpha \mid \beta$ ergibt. Dass aus $\alpha = 0$, $\beta = 0$ folgt, sieht man folgendermassen ein: α enthält alle Faktoren $\mathfrak{p}^m$, wäre nun $\beta \neq 0$, so hätte (β) die Form $\mathfrak{p}_1^{t_1} . \mathfrak{p}_2^{t_2} \ldots \mathfrak{p}_n^{t_n}$ es enthielte also z. B. den Faktor $\mathfrak{p}_1^{t_1+1}$ nicht.)

Jetzt definieren wir noch für ideale Zahlen, das „Enthalten eines (Primidealpotenz-) Faktors".

Satz 16. Sein $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ und $S = [\beta_1, \beta_2, \ldots]$ Fundamentalfolgen, u. zw. sei $R \sim S$; $\mathfrak{p}$ bedeute ein Primideal. Unter diesen Voraussetzungen enthalten dann und nur dann fast alle α_r den Faktor $\mathfrak{p}^m$, wenn fast alle β_r denselben enthalten.

Beweis: Klar.

Also enthalten bei einer idealen Zahl $\mathfrak{A}$ entweder für jede zu $\mathfrak{A}$ gehörige Fundamentalfolge R fast alle α_r den Faktor $\mathfrak{p}^m$, oder für keine einzige solche Fundamentalfolge.

Definition 11. Wenn für jede zu $\mathfrak{A}$ gehörige Fundamentalfolge $R = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ fast alle α_r den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten, so sagen wir, $\mathfrak{A}$ *enthält den Faktor* $\mathfrak{p}^m$.[9])

Satz 17. Wenn $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält und $n \leqq m$ ist, so enthält es auch den Faktor $\mathfrak{p}^n$.

Wenn $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält, und $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ ist, so enthält auch $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält, so enthält auch $\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Wen $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ und $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthält, so enthält $\mathfrak{A} . \mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m+n}$.

Beweis: Klar.

Satz 18. $\bar{\alpha}$ enthält den Faktor $\mathfrak{p}^m$ dann und nur dann (im Sinne der Definition 11.) wenn ihn α enthält (im Sinne der Definition 1.).

Beweis: Klar.

---

[9]) Auch hier gilt die Bemerkung am Ende der Fussnote [5]).

Bemerkung.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch eins feststellen.

In allen Operationen und Relationen, die wir sowohl für reale, als auch für ideale Zahlen definiert haben, u. zw. unter Benützung desselben Zeichens (das sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Teilbarkeit, und das Enthalten eines Faktors $\mathfrak{p}^m$), spielt die reale Zahl α und die ideale Zahl $\bar{\alpha}$ genau dieselbe Rolle. (Vergl. die Sätze 11, 13, 15, 18.) Ausserdem gilt der folgende Satz:

Satz 19. $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$ ist mit $\alpha=\beta$ gleichbedeutend.

Beweis: Aus $\alpha=\beta$ folgt jedenfalls $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$. Ist umgekehrt $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$, so ist

$$\overline{\alpha-\beta}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}=\bar{0}$$

also gilt für jedes $\bar{\gamma}$ die Beziehung $\bar{\gamma}\,|\,\overline{\alpha-\beta}$, d. h. $\gamma\,|\,\alpha-\beta$. Folglich muss $\alpha-\beta=0$, $\alpha=\beta$ sein.

Es besteht demnach kein zwingender Grund α und $\bar{\alpha}$ voneinander zu unterscheiden; wir werden deshalb im Folgenden den Querstrich stets fortlassen, und die ideale Zahl $\bar{\alpha}$ kurz mit α bezeichnen.

V. Der Limes.

Definition 12. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ und $\mathfrak{A}$ seien beliebige ideale Zahlen.

Wir sagen, dass die Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ gegen $\mathfrak{A}$ *konvergiert*, in Zeichen: $\mathfrak{A}_r \to \mathfrak{A}$ für $r \to \infty$, wenn für jedes $\mathfrak{p}$ und m fast alle $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten.[10])

Satz 20. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann $=0$, wenn es alle $\mathfrak{p}^m$ als Faktoren enthält.

Beweis: Wegen $\mathfrak{p}^m\,|\,0$ enthält 0 alle $\mathfrak{p}^m$ als Faktoren. Wenn umgekehrt $\mathfrak{A}$ alle $\mathfrak{p}^m$ als Faktoren enthält, so sei $\mathfrak{A} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$. Dann ist jedes $\mathfrak{p}^m$ in fast allen α_r, also in fast allen $\alpha_r - 0$ als Faktor enthalten. Also ist $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ mit $[0, 0, \ldots]$ äquivalent, also $\mathfrak{A} \sim [0, 0, \ldots]$. Wegen $0 \sim [0, 0, \ldots]$ muss demnach $\mathfrak{A}=0$ sein.

Satz 21. Wenn $\mathfrak{A}_r \to \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_r \to \mathfrak{B}$ für $r \to \infty$, so ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$.

---

[10]) Diese Definition des Limes ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der Prüferschen Definition der Summe von unendlich vielen idealen Zahlen. Das Multiplizieren mit einem Generalnenner erübrigt sich hier infolge der Anwendung des Begriffes des „Faktor-Enthalten"-s.

Beweis: Für jedes $\mathfrak{p}$ und m muss es ein r geben, sodass sowohl $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_r$ als auch $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält. Also enthält ihn auch $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_r)-(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}_r)$. Da dies für alle $\mathfrak{p}, m$ gilt, muss nach dem soeben bewiesenen Satze $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ sein.

Definition 13. Wir nennen eine Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ idealer Zahlen *konvergent*, wenn eine Zahl $\mathfrak{A}$ existiert, zu der sie konvergiert. In diesem Falle existiert aber auch nur eine solche Zahl (wegen Satz 21.), und diese bezeichnen wir mit $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{A}_r$.

Satz 22. Seien die Folgen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ beide konvergent. Dann sind auch die Folgen $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_2 \ldots$; $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2, \ldots$; $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2, \ldots$ konvergent.

Dabei gelten die Gleichungen

$$\lim_{r \to \infty} (\mathfrak{A}_r \pm \mathfrak{B}_r) = \lim_{r \to \infty} \mathfrak{A}_r + \lim_{r \to \infty} \mathfrak{B}_r$$

$$\lim_{r \to \infty} (\mathfrak{A}_r \quad \mathfrak{B}_r) = \lim_{r \to \infty} \mathfrak{A}_r \cdot \lim_{r \to \infty} \mathfrak{B}_r$$

Beweis: Wenn wir $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{A}_r$ und $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{B}_r$ mit $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bezeichnen, so müssen wir zeigen, dass aus $\mathfrak{A}_r \to \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ für $r \to \infty$ immer $(\mathfrak{A}_r \pm \mathfrak{B}_r) \to (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{A}_r . \mathfrak{B}_r) \to (\mathfrak{A} . \mathfrak{B})$ für $r \to \infty$ folgt.

Die beiden ersten Behauptungen sind trivial; die letzte beweisen wir folgendermassen:

Das Primideal $\mathfrak{p}$ und der ganze rationale Exponent m seien beliebig gegeben. Es sei $\mathfrak{A} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$, $\mathfrak{B} \sim [\beta_1, \beta_2, \ldots]$. Es wurde beim Beweise des Satzes 8. gezeigt, dass es ein n gibt, sodass fast alle α_r und β_r den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthalten. Dann enthält auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^n$.

Ferner enthält für fast alle r die Differenz $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_s$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m-n}$, und für fast alle r enthält die Differenz $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^{\mathrm{Max}\,(m-n,\,n)}$. Also gilt auch für fast alle r all dies zugleich.

Für jedes derartige r enthält also $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^{m-n}$; ferner enthält $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^n$, also enthält ihn auch $\mathfrak{B}_r$. Und schliesslich enthält $\mathfrak{A}$ auch den Faktor $\mathfrak{p}^n$ Folglich enthalten die Zahlen $\mathfrak{B}_r(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_r)$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_r)$ beide den Faktor $\mathfrak{p}^{(m-n)+n}$, d. h. $\mathfrak{p}^m$, also enthält ihn auch ihre Summe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}_r\mathfrak{B}_r$.

Satz 23. Wenn $\mathfrak{p}_1^{m_1}, \mathfrak{p}_2^{m_2}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{m_n}$ beliebig gegebene Primidealpotenzen sind, und $\mathfrak{A}$ eine ideale Zahl, so gibt es eine reale Zahl α, sodass $\mathfrak{A}-\alpha$ jeden der Faktoren $\mathfrak{p}_1^{m_1}, \mathfrak{p}_2^{m_2}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{m_n}$ enthält.

Wenn insbesondere $\mathfrak{A}$ ganz ist, so kann auch α (algebraisch) ganz gewählt werden.

Beweis: Wenn $\mathfrak{A} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ ist, so enthalten fast alle α_r den Faktor $\mathfrak{p}_1^{m_1}$, fast alle den Faktor $\mathfrak{p}_2^{m_2}, \ldots$, und fast alle den Faktor $\mathfrak{p}_n^{m_n}$. Also gibt es ein r für welches alle n Bedingungen erfüllt sind, entsprechend unserer Behauptung.

Wenn $\mathfrak{A}$ ganz ist, so können wir $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ so wählen, dass alle α_r ganz sind.

S a t z 24. Wenn zu jeder Primidealpotenz $\mathfrak{p}^m$ ein algebraisch ganzes α existiert, sodass $\mathfrak{A}-\alpha$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält, dann ist $\mathfrak{A}$ selbst ganz.

Beweis: Die abzählbar vielen Primideale schreiben wir in einer Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$

Wir können für jedes r ein System von algebraisch ganzen $\beta_1^{(r)}, \beta_2^{(r)}, \ldots, \beta_s^{(r)}$ angeben, sodass $\mathfrak{A}-\beta_s^{(r)}$ allgemein den Faktor $\mathfrak{p}_s^r$ enthält. Wir bestimmen nun eine weitere algebraisch ganze Zahl α_r derart, dass sie den Kongruenzen

$$\alpha_r \equiv \beta_1^{(r)} \pmod{\mathfrak{p}_1^r}$$
$$\alpha_r \equiv \beta_2^{(r)} \pmod{\mathfrak{p}_2^r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_r \equiv \beta_r^{(r)} \pmod{\mathfrak{p}_r^r}$$

genügt, was offenbar möglich ist. Dann ist für jedes $s=1,2,\ldots,r$ $\mathfrak{p}_s^r \mid \alpha_r - \beta_s^{(r)}$, d. h. $\alpha_r - \beta_s^{(r)}$ enthält den Faktor $\mathfrak{p}_s^r$; folglich enthält $\mathfrak{A}-\alpha_r$ alle Faktoren $\mathfrak{p}_1^r, \mathfrak{p}_2^r, \ldots, \mathfrak{p}_r^r$.

Nun bilden wir die Folge $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$. Wir werden beweisen, dass sie fundamental ist und zu $\mathfrak{A}$ gehört; da alle α_r ganz sind, folgt hieraus, dass $\mathfrak{A}$ ganz ist.

Es sei $\mathfrak{A} \sim [\beta_1, \beta_2, \ldots]$; dann genügt es

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots] \sim [\beta_1, \beta_2, \ldots]$$

zu zeigen.

Da für fast alle s die Differenz $\beta_s - \beta_{s+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}_1^r$ enthält, für fast alle s dieselbe den Faktor $\mathfrak{p}_2^r$ enthält, ..., für fast alle s den Faktor $\mathfrak{p}_r^r$ enthält; so gelten auch für fast alle s sämtliche r Bedingungen zugleich. Wir können also $u = u(r)$ so wählen, dass aus $s \geqq u(r)$ stets folgt, dass $\beta_s - \beta_{s+1}$ alle Faktoren $\mathfrak{p}_1^r, \mathfrak{p}_2^r, \ldots, \mathfrak{p}_r^r$ enthält. Hieraus schliessen wir leicht, das für $s \geqq u(r)$, $t \geqq u(r)$ auch $\beta_s - \beta_t$ diese Faktoren enthält.

Nun sei die Primidealpotenz $\mathfrak{p}^m$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ fest gegeben. Es sei $r \geqq \text{Max.}\,(m, n)$. Dann enthält

$$\mathfrak{A}-\alpha_r \sim [\beta_1, \beta_2, \ldots] - [\alpha_r, \alpha_r, \ldots] = [\beta_1 - \alpha_r, \beta_2 - \alpha_r, \ldots]$$

den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Also muss für fast alle s die Differenz $\beta_s - \alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalten. Also auch für ein $s \geqq u$ (Max. (m, n)), da aber für $s \geqq u$ (Max. (m, n)), $t \geqq u$ (Max. (m, n)) die Differenz $\beta_s - \beta_t$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ stets enthält, ist das für alle $\beta_t - \alpha_r$, $t \geqq u$ (Max. (m, n)) der Fall. Wenn also insbesondere $r \geqq$ Max. (Max. (m, n), u (Max. (m, n))) ist, so enthält $\beta_r - \alpha_r$ auch den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Da diese Relation für fast alle r gilt, ist damit unsere Behauptung bewiesen.

Satz 25. Wenn alle Glieder einer konvergenten Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ ganz sind, so ist es auch $\lim\limits_{r \to \infty} \mathfrak{A}_r$.

Beweis: Wir können r so wählen, dass $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält, und da $\mathfrak{A}_r$ ganz ist, α so dass $\mathfrak{A}_r - \alpha$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält. Dann enthält auch $\mathfrak{A} - \alpha = (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_r) + (\mathfrak{A}_r - \alpha)$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Da dies für alle $\mathfrak{p}$ und m gilt, muss $\mathfrak{A}$ ganz sein.

Satz 26. Die Folge $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ ist dann und nur dann konvergent, wenn für jede Primidealpotenz $\mathfrak{p}^m$, für fast alle r die Differenz $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält.

Beweis: Wenn $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ konvergent ist, so enthält $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_r$ für fast alle r den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Also gilt dasselbe für fast alle r von $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{r+1}$. Folglich findet für fast alle r auch beides zugleich statt. Für solche r aber enthält auch $\mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_{r+1} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{r+1}) - (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_r)$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Nun wollen wir umgekehrt aus unserer Bedingung die Konvergenz von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ herleiten.

Wir bezeichnen die Folge der Primideale wieder mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ Wir wählen die Zahl α_r allgemein so, dass $\mathfrak{A}_r - \alpha_r$ die Faktoren $\mathfrak{p}_1^r, \mathfrak{p}_2^r, \ldots, \mathfrak{p}_r^r$ enthält; und dann bilden wir die Folge $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

Diese Folge ist fundamental. Es sei nämlich eine Primidealpotenz $\mathfrak{p}^m$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ gegeben. Ferner bestimmen wir p so, dass für $s \geqq p$ $\mathfrak{A}_s - \mathfrak{A}_{s+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält. Für $r \geqq$ Max. (m, n, p) enthält dann $\mathfrak{A}_r - \alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}_n^r$, also auch den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Ebenso enthält $\mathfrak{A}_{r+1} - \alpha_{r+1}$ diesen Faktor, und auch $\mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_{r+1}$; folglich enthält ihn

$$\alpha_r - \alpha_{r+1} = (\mathfrak{A}_{r+1} - \alpha_{r+1}) - (\mathfrak{A}_r - \alpha_r) + (\mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_{r+1})$$

ebenfalls.

Die zu $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ gehörende ideale Zahl sei $\mathfrak{A}$. Wir behaupten nun: es ist $\mathfrak{A}_r \to \mathfrak{A}$ für $r \to \infty$.

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ und m seien wie vorhin. Für $r \geqq \text{Max.}\,(m, n)$ (d. h. für fast alle r) hat $\mathfrak{A}_r - \alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Ferner hat wegen $\mathfrak{A} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ auch $\mathfrak{A} - \alpha_r$ für fast alle r diesen Faktor. Folglich findet für fast alle r beides zugleich statt, und für solche r hat auch $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_r = (\mathfrak{A} - \alpha_r) - (\mathfrak{A}_r - \alpha_r)$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

VI. Unendliche Summen und Produkte.

Definition 14. Für

$$\mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_{m+1} + \ldots + \mathfrak{A}_n \text{ und } \mathfrak{A}_m \cdot \mathfrak{A}_{m+1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{A}_n \ (m \leqq n)$$

schreiben wir kurz $\sum_{m}^{n}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ bzw. $\prod_{m}^{n}{}_r\, \mathfrak{A}_r$.

Definition 15. Wir sagen, dass die unendliche Summe $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ oder das unendliche Product $\prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ *konvergiert*, wenn die Folge $\sum_{m}^{m}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \sum_{m}^{m+1}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \sum_{m}^{m+2}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \ldots$ bzw. $\prod_{m}^{m}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \prod_{m}^{m+1}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \prod_{m}^{m+2}{}_r\, \mathfrak{A}_r, \ldots$ konvergiert. Unter $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ bzw. $\prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ verstehen wir in diesem Falle die Zahlen $\lim\limits_{s \to \infty} \sum_{m}^{m+s-1}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ bzw. $\lim\limits_{s \to \infty} \prod_{m}^{m+s-1}{}_r\, \mathfrak{A}_r$.

Satz 27. Wenn die Summe $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ konvergiert, so konvergiert auch die Summe $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}_r)$; es ist

$$\sum_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}_r) = \mathfrak{C} \sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r.$$

Wenn die Summen $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ und $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{B}_r$ konvergieren, so konvergieren auch die Summen $\sum_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{A}_r \pm \mathfrak{B}_r)$; es ist

$$\sum_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{A}_r \pm \mathfrak{B}_r) = \sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r \pm \sum_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{B}_r.$$

Wenn die Produkte $\prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ und $\prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{B}_r$ konvergieren, so konvergiert auch das Produkt $\prod_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{B}_r)$; es ist

$$\prod_{m}^{\infty}{}_r\, (\mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{B}_r) = \prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r \prod_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{B}_r.$$

Beweis: Klar auf Grund des Satzes 22.

Satz 28. Die Summe $\sum\limits_{m}^{\infty}{}_r\, \mathfrak{A}_r$ konvergiert dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}_r \to 0$ für $r \to \infty$.

Beweis: Nach Satz 26. ist es notwendig und hinreichend, dass für fast alle s die Differenz

$$-\sum_{m}^{m+(s+1)-1}{}_r\, \mathfrak{A}_r + \sum_{m}^{m+s-1}{}_r\, \mathfrak{A}_r = -\mathfrak{A}_{m+s}$$

den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthalte d. h. dass $\mathfrak{A}_{m+s}$ den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthalte. Das ist damit gleichbedeutend, dass $\mathfrak{A}_t$ für fast alle t diesen Faktor enthält: und dies ist nichts anderes, als unsere Bedingung $\mathfrak{A}_t \to 0$ für $t \to \infty$.

VII. Ein Hilfssatz über Systeme von Faktor-Bedingungen.

Ehe wir weitergehen, müssen wir einen Satz über Systeme von Bedingungen von der Form

$$\beta \cdot \xi - \alpha \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}^m \; (\beta \neq 0)$$

beweisen. In den später folgenden Konstruktionen idealer Zahlen wird es nämlich meistens auf die Lösung derartiger Bedingungen herauskommen.

Unser Satz lautet folgendermassen:

Satz 29. Ein System von Bedingungen

$$\beta_1 \cdot \xi - \alpha_1 \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_1^{r_1} \; (\beta_1 \neq 0)$$
$$\beta_2 \cdot \xi - \alpha_2 \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_2^{r_2} \; (\beta_2 \neq 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_u \cdot \xi - \alpha_u \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_u^{r_u} \; (\beta_u \neq 0)$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_u$ voneinander verschiedene Primideale) ist immer lösbar.

Wenn für jedes $v = 1, 2, \ldots, u$ alle Faktoren $\mathfrak{p}_v^r$, $r \leq r_v$ die in β_v enthalten sind, auch in α_v enthalten sind, so ist es sogar durch ein algebraisch ganzes ξ lösbar.

Beweis: Wir zeigen zuerst, wie der erste Teil unseres Satzes auf den zweiten zurückgeführt werden kann.

Zu jeder Zahl $\gamma \neq 0$ und jedem Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es ein s sodass γ den Faktor $\mathfrak{p}^s$ noch enthält, den Faktor $\mathfrak{p}^{s+1}$ aber nicht mehr: wir brauchen bloss das Ideal (γ) auf die Form eines Primidealpotenzproduktes bringen, und für s den Exponenten von $\mathfrak{p}$ zu wählen (0, wenn $\mathfrak{p}$ nicht vorkommt), dieser leistet das Gewünschte.

Für die β_ν seien diese Exponenten s_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, u)$. Die Prämisse des zweiten Teiles unseres Satzes ist offenbar die, dass α_ν stets den Faktor $\mathfrak{p}^{\text{Min.}(s_\nu, r_\nu)}$ hat.

Wenn nun dieser Teil des Satzes bewiesen ist, so verfahren wir so:

Wir wählen die t_ν so, dass α_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{t_\nu}$ enthält, und setzen dann $x_\nu = s_\nu - t_\nu$. Sodann bestimmen wir die Zahl ϱ so, dass sie jeden der Faktoren $\mathfrak{p}_\nu^{x_\nu}$ enthalte, aber keinen der Faktoren $\mathfrak{p}_\nu^{x_\nu+1}$

Dies ist unschwer durchführbar: nach einem bekannten Satze der Idealtheorie gibt es ja eine Zahl ϱ, für die

$$\frac{(\varrho)}{\mathfrak{p}_1^{x_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_u^{x_u}}$$

ganz ist, und mit jedem der Ideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_u$ relativ prim. ϱ erfüllt offenbar unsere Bedingung.

Aus der genannten Eigenschaft des ϱ folgt aber, dass $\beta_\nu \cdot \xi - \alpha_\nu$ sicher den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{r_u}$ enthält, wenn

$$\varrho\,(\beta_\nu \cdot \xi - \alpha_\nu) = \beta_\nu \cdot (\varrho \xi) - \varrho \alpha_\nu$$

den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{r_\nu + x_\nu}$ enthält. D. h. unser System ist lösbar, wenn es das folgende System ist:

$\beta_\nu \;\; \eta - \varrho \alpha_\nu$ enthält den Faktor $\mathfrak{p}^{r_\nu + x_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, u$. (Dann können wir wegen $\varrho \neq 0$ offenbar $\xi = \dfrac{\eta}{\varrho}$ setzen.)

Dieses System fällt aber unter den zweiten Teil unseres Satzes. Denn wenn β_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^r$ enthält, so ist $r \leqq s_\nu$; und da ϱ den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{x_\nu}$ und α_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{t_\nu}$ enthält, so enthält $\alpha \varrho_\nu$ den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{t_\nu + x_\nu}$, d. h. $\mathfrak{p}_\nu^{s_\nu}$, also auch $\mathfrak{p}_\nu^r$.

Wir können also zum Beweise des zweiten Teiles übergehen. s_ν bedeute dasselbe, wie vorhin, nach Annahme enthält also α_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{\text{Min.}(s_\nu, r_\nu)}$. Unter ξ verstehen wir von nun an eine (algebraisch) ganze Zahl.

$\beta_\nu \cdot \xi - \alpha_\nu = \beta_\nu \cdot \left(\xi - \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ enthält sicher den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{r_\nu}$, wenn

$\xi - \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{r_\nu - s_\nu}$ enthält (da β_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{s_\nu}$ enthält).

Da $\alpha_\nu = \beta_\nu \cdot \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ den Faktor $\mathfrak{p}^{\text{Min.}(s_\nu, r_\nu)}$ enthält, und β_ν den Faktor $\mathfrak{p}^{s_\nu+1}$ nicht enthält, muss $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{\mathrm{Min.}(s_\nu, r_\nu) - s_\nu}$ enthalten.

Wir haben also ein System von Bedingungen der folgenden Form:

$\xi - \alpha'_\nu$ enthält den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{r'_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, u$, wobei α'_ν den Faktor $\mathfrak{p}_\nu^{\mathrm{Min.}(0, r'_\nu)}$ enthält. (Diese Bedingungen haben wir nur als *hinreichend* erkannt, sie sind zwar auch notwendig, was uns aber hier nicht interessiert.) Hier genügt es aber zu zeigen, dass jede dieser u Bedingungen für sich allein lösbar ist: denn wenn sie bzw. die ganzen Lösungen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u$ haben, so ist ein ξ sicher eine gemeinsame Lösung aller, welches den folgenden Kongruenzen genügt:

$$\xi \equiv \xi_1 \pmod{\mathfrak{p}_1^{r'_1}}$$
$$\xi \equiv \xi_2 \pmod{\mathfrak{p}_2^{r'_2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi \equiv \xi_u \pmod{\mathfrak{p}_u^{r'_u}}$$

Und dieses System von Kongruenzen ist offenbar durch ein ganzes ξ lösbar.

Es bleibt also noch übrig, zu zeigen, dass der Bedingung

$$\xi - \alpha \text{ hat den Faktor } \mathfrak{p}^r$$

wobei α den Faktor $\mathfrak{p}^{\mathrm{Min.}(0, r)}$ hat, durch ein ganzes ξ genügt werden kann.

Für $r \leqq 0$ ist dies trivial: wegen Min. $(0, r) = r$ hat α den Faktor $\mathfrak{p}^r$, also kommt die Bedingung darauf heraus, dass ξ den Faktor $\mathfrak{p}^r$ enthalte. Und wegen $r \leqq 0$ ist das für jedes ganze ξ der Fall.

Für $r > 0$ ist Min. $(0, r) = 0$, d. h. α enthält den Faktor $\mathfrak{p}^0$. Also ist $\alpha = \frac{\varkappa}{\lambda}$, wobei $\varkappa, \lambda$ algebraisch ganz sind, und λ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Wir können deshalb die Kongruenz

$$\lambda \eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r}$$

(durch ein ganzes η!) lösen. $\lambda \eta$ ist durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar und dabei ganz, also enthält es den Faktor $\mathfrak{p}^1$ nicht. Folglich enthält $\xi - \alpha$ den Faktor $\mathfrak{p}^r$, wenn

$$\lambda\eta (\xi - \alpha) = \lambda\eta \,.\, \xi - \varkappa\eta$$

ihn enthält. Da aber aus $\lambda\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r}$ die Kongruenz

$$\lambda\eta \,.\, \varkappa\eta \equiv \varkappa\eta \pmod{\mathfrak{p}^r}$$

folgt, enthält $\lambda\eta \,.\, \varkappa\eta - \varkappa\eta$ sicher den Faktor $\mathfrak{p}^r$. Also ist $\xi = \varkappa\eta$ eine, offenbar ganze, Lösung.

VIII. $\mathfrak{p}$-adische Zahlen.

Definition 16. $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal. Wir nennen eine ideale Zahl $\mathfrak{A}$ eine *$\mathfrak{p}$-adische Zahl,* wenn für jedes von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{q}$ und für jedes m die Zahl $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{q}^m$ enthält.

Satz 30. $\mathfrak{A}$ sei eine ideale Zahl, $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal. Es gibt dann eine und nur eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl $\mathfrak{B}$, sodass $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ für alle m den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält.

Beweis: Dass es höchstens ein solches $\mathfrak{B}$ geben kann, sehen wir sofort. Denn wenn $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ diese Eigenschaften haben, so ist jeder Faktor $\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, wegen der $\mathfrak{p}$-adizität von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{B}_1$ und in $\mathfrak{B}_2$ enthalten, also auch in $\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2$. Und jeder Faktor $\mathfrak{p}^m$ ist in $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}_1$ und in $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}_2$ enthalten, also auch in $\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2=(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}_1)$. Nach Satz 20. ist also $\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2=0$, d. h. $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2$.

Wir müssen nun zeigen, dass es ein solches $\mathfrak{B}$ gibt.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primideale irgendwie in einer Folge $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ Sodann wählen wir die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ so, dass allgemein $\mathfrak{A}-\alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^r$ enthalte (nach Satz 23.); und die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ so, dass allgemein ξ_r den Bedingungen

$$\begin{array}{ll} \xi_r & \text{enthält den Faktor } \mathfrak{q}_1^r \\ \xi_r & \text{enthält den Faktor } \mathfrak{q}_2^r \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \xi_r & \text{enthält den Faktor } \mathfrak{q}_r^r \\ \xi_r-\alpha_r & \text{enthält den Faktor } \mathfrak{p}^r \end{array}$$

genügt (nach Satz 29.). Wir behaupten nun: die Folge $[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ ist fundamental und die zu ihr gehörige Zahl $\mathfrak{B}$ genügt den Bedingungen des Satzes.

Um nachzuweisen, dass $[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ fundamental ist, betrachten wir zuerst die Faktoren $\mathfrak{p}^m$. Für $r \geqq m$ hat $\xi_r-\alpha_r$ den Faktor $\mathfrak{p}^r$, also auch den Faktor $\mathfrak{p}^m$; ebenso hat auch $\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}$ diesen Faktor. Ferner hat $\mathfrak{A}-\alpha_r$ ebenfalls den Faktor $\mathfrak{p}^r$, d. h. $\mathfrak{p}^m$; und $\mathfrak{A}-\alpha_{r+1}$ dessgleichen. Also hat auch

$$\xi_r-\xi_{r+1}=(\xi_{r+1}-\alpha_{r+1})-(\xi_r-\alpha_r)+(\mathfrak{A}-\alpha_r)-(\mathfrak{A}-\alpha_{r+1})$$

den Faktor $\mathfrak{p}^m$.

Zweitens betrachten wir die Faktoren $\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_n$;

für $r \geqq \text{Max.}\,(m, n)$ haben ξ_r, ξ_{r+1} und mit ihnen $\xi_r - \xi_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{q}_n^r$, d. h. $\mathfrak{q}^r$, also auch den Faktor $\mathfrak{q}^m$

Es bleibt noch zu zeigen, dass für $\mathfrak{B} \sim [\xi_1, \xi_2, \ldots]$ die Zahl $\mathfrak{B}$ jeden Faktor $\mathfrak{q}_n^m$ und die Zahl $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ jeden Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat. Es ist aber

$$\mathfrak{B} \sim [\xi_1, \xi_2, \ldots];$$

und wenn $s \geqq \text{Max.}\,(m, n)$ ist, so hat ξ_s den Faktor $\mathfrak{q}_n^s$, also auch $\mathfrak{q}_n^m$, woraus die erste Behauptung folgt. Ferner ist

$$\alpha_r - \mathfrak{B} \sim [\alpha_r, \alpha_r, \ldots] - [\xi_1, \xi_2, \ldots] = [\alpha_r - \xi_1, \alpha_r - \xi_2, \ldots].$$

Nun hat $\alpha_m - \xi_m = -(\xi_m - \alpha_m)$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$, und für $s \geqq m$ hat auch $\xi_s - \xi_{s+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$; also haben für $s \geqq m$ alle Differenzen $\alpha_m - \xi_s$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Folglich hat $\alpha_m - \mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$, und da $\mathfrak{A} - \alpha_m$ ihn auch hat, so muss $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} - \alpha_m) + (\alpha_m - \mathfrak{B})$ denselben ebenfalls enthalten. Damit ist auch die zweite Bahauptung bewiesen.

D e f i n i t i o n 17. Die im Satze 30. erwähnte $\mathfrak{p}$-adische Zahl nennen wir *die $\mathfrak{p}$-adische Komponente von* $\mathfrak{A}$, und bezeichnen sie mit $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$.

S a t z 31. Wenn die idealen Zahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ dieselbe $\mathfrak{p}$-adische Komponente haben, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Beweis: Für alle $\mathfrak{p}$ und m hat sowohl $\mathfrak{A} - (\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ als auch $\mathfrak{B} - (\mathfrak{B})_\mathfrak{p}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$. Wegen $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{B})_\mathfrak{p}$ aber ist $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} - (\mathfrak{A})_\mathfrak{p}) - (\mathfrak{B} - (\mathfrak{B})_\mathfrak{p})$, sodass auch $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ hat. Nach Satz 20 ist also $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

D e f i n i t i o n 18. Die (abzählbar vielen) Primideale seien irgendwie in eine Folge geordnet, die wir mit $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots$ bezeichnen werden.

S a t z 32. Die Zahl $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ sei $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adisch, $m = 1, 2, \ldots$. Dann ist die Summe $\sum_1^\infty {}_m \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ konvergent.

Beweis: Nach Satz 28. müssen wir beweisen, dass $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]} \to 0$ für $m \to \infty$. Es sei irgendein $\mathfrak{p}^m$ gegeben, $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}_n$. Für alle $r \neq n$ ist $\bar{\mathfrak{p}}_r \neq \bar{\mathfrak{p}}_n$. $\mathfrak{A}_r^{[\bar{\mathfrak{p}}_r]}$ ist $\bar{\mathfrak{p}}_r$-adisch, also hat $\mathfrak{A}_r^{[\bar{\mathfrak{p}}_r]}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_n^m$, d. h. $\bar{\mathfrak{p}}^m$. Hieraus folgt unsere Behauptung.

S a t z 33. Die Zahl $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ sei $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adisch, $m = 1, 2, \ldots$ Dann ist $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ die $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adische Komponente von $\sum_1^\infty {}_m \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$.

Beweis: Da $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ gewiss $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adisch ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass $\sum_1^\infty{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]} - \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ jeden der Faktoren $\bar{\mathfrak{p}}_m^p$ enthält.

Wegen $\sum_1^r{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]} \rightarrow \sum_1^\infty{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]}$ für $r \rightarrow \infty$ gibt es ein $r \geqq p$, so dass $\sum_1^\infty{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]} - \sum_1^r{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_m^p$ hat. Also müssen wir zeigen, dass $\sum_1^r{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]} - \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ diesen Faktor hat. Nun ist

$$\sum_1^r{}^n \mathfrak{A}_n^{[\bar{\mathfrak{p}}_n]} - \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]} = \mathfrak{A}_1^{[\bar{\mathfrak{p}}_1]} + \ldots + \mathfrak{A}_{m-1}^{[\bar{\mathfrak{p}}_{m-1}]} + \mathfrak{A}_{m+1}^{[\bar{\mathfrak{p}}_{m+1}]} + \ldots + \mathfrak{A}_r^{[\bar{\mathfrak{p}}_r]}.$$

Jeder Summand ist $\bar{\mathfrak{p}}_n$-adisch, $n \neq m$, d. h. $\bar{\mathfrak{p}}_n \neq \bar{\mathfrak{p}}_m$, hat also den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_m^p$; folglich hat ihn auch die Summe.

Satz 34. Jeder Folge $\mathfrak{A}_1^{[\bar{\mathfrak{p}}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\bar{\mathfrak{p}}_2]}, \ldots$ ($\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ ist $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adisch) entspricht eine einzige ideale Zahl $\mathfrak{A}$, für die $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_m} = \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ ist; nämlich die Zahl $\mathfrak{A} = \sum_1^\infty{}^m \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$.

Beweis: Folgt aus den Sätzen 31, 32 und 33.

Definition 19. Wenn $\mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ allgemein $\bar{\mathfrak{p}}_m$-adisch ist für $m = 1, 2, \ldots$, so schreiben wir für $\sum_1^\infty{}^m \mathfrak{A}_m^{[\bar{\mathfrak{p}}_m]}$ auch $\{\mathfrak{A}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\}$.

IX. $\mathfrak{p}$-adische Komponenten und die Grundoperationen.

Satz 35. Wenn die Zahlen $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ und $\mathfrak{B}^{[\mathfrak{p}]}$ beide $\mathfrak{p}$-adisch sind, so sind es auch die Zahlen $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} \pm \mathfrak{B}^{[\mathfrak{p}]}$.

Wenn $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ $\mathfrak{p}$-adisch ist, und $\mathfrak{C}$ eine beliebige ideale Zahl ist so ist auch $\mathfrak{C} . \mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ $\mathfrak{p}$-adisch.

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial; die zweite sehen wir folgendermassen ein:

Wir gezeigt, beim Beweise des Satzes 22 dass für jede ideale Zahl und jedes Primideal $\mathfrak{q}$ ein Faktor $\mathfrak{q}^n$ in der Zahl enthalten sein muss. Wenn nun eine Primidealpotenz $\mathfrak{q}^m$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, gegeben ist, so enthält $\mathfrak{C}$ einen Faktor $\mathfrak{q}^n$, während $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ den Faktor $\mathfrak{q}^{m-n}$ enthält. Folglich enthält $\mathfrak{C} . \mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ den Faktor $\mathfrak{q}^{n+(m-n)}$, d. h. $\mathfrak{q}^m$

Satz 36. Wenn die Zahlen $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ und $\mathfrak{B}^{[\mathfrak{q}]}$ $\mathfrak{p}$-adisch bezw. $\mathfrak{q}$-adisch sind, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, dann ist $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} . \mathfrak{B}^{[\mathfrak{q}]} = 0$.

Beweis: Nach Satz 35. mus $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} . \mathfrak{B}^{[\mathfrak{q}]}$ sowohl $\mathfrak{p}$-adisch als auch $\mathfrak{q}$-adisch sein. Da jedes Primideal $\mathfrak{r}$ unbedingt $\neq \mathfrak{p}$ oder $\neq \mathfrak{q}$ ist, so enthält $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} . \mathfrak{B}^{[\mathfrak{q}]}$ jeden Faktor $\mathfrak{r}^m$. Nach Satz 20. ist es also $=0$.

Satz 37. Es gelten die Gleichungen:

$$\{\mathfrak{A}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\} \pm \{\mathfrak{B}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{B}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\} = \{\mathfrak{A}_1^{[\mathfrak{p}_1]} \pm \mathfrak{B}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\mathfrak{p}_2]} \pm \mathfrak{B}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\}$$
$$\{\mathfrak{A}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\} \cdot \{\mathfrak{B}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{B}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\} = \{\mathfrak{A}_1^{[\mathfrak{p}_1]} \cdot \mathfrak{B}_1^{[\mathfrak{p}_1]}, \mathfrak{A}_2^{[\mathfrak{p}_2]} \cdot \mathfrak{B}_2^{[\mathfrak{p}_2]}, \ldots\}.$$

Beweis: Es ist

$$\sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \pm \sum_1^m{}^r \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]} = \sum_1^m{}^r (\mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \pm \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]})$$
$$\sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \cdot \sum_1^m{}^r \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]} = \sum_1^m{}^r \left(\sum_1^m{}^s \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \quad \mathfrak{B}_s^{[\mathfrak{p}_s]}\right) = \sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \cdot \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]}$$

(das letztere wegen Satz 36.). Hieraus folgt aber

$$\lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r (\mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \pm \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]}) = \lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \pm \lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]}$$
$$\lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \cdot \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]} = \lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r \mathfrak{A}_r^{[\mathfrak{p}_r]} \cdot \lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r \mathfrak{B}_r^{[\mathfrak{p}_r]}$$

und damit (nach Definition 19.) die Behauptung.

Satz 38. Es gelten die Gleichungen:

$$(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{A})_\mathfrak{p} \pm (\mathfrak{B})_\mathfrak{p}, \quad (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{A})_\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{B})_\mathfrak{p}.$$

Beweis: Folgt aus Satz 37.

Satz 39. Wenn $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_m$, eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl ist, so ist

$$\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} = \{0, 0, \ldots, 0, \mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}, 0, \ldots\}$$

($\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$ steht an der m-ten Stelle.

Beweis: Für $r \geqq m$ ist offenbar

$$0 + 0 + \ldots + 0 + \mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]} + 0 + \ldots + 0 = \mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$$

(insgesamt r Glieder), folglich ist der Limes der linken Seite für $r \to \infty$ gleich $\mathfrak{A}^{[\mathfrak{p}]}$, und hieraus folgt die Behauptung.

Satz 40. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ganz, wenn es alle $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ sind.

Beweis: Wenn die $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ ganz sind, so ist es auch jedes $\sum_1^m{}^r (\mathfrak{A})_{\mathfrak{p}_r}$, und infolge dessen auch

$$\mathfrak{A} = \sum_1^\infty{}^r (\mathfrak{A})_{\mathfrak{p}_r} = \lim_{m \to \infty} \sum_1^m{}^r (\mathfrak{A})_{\mathfrak{p}_r}$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ ganz, so ist es auch jedes $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ aus folgendem Grunde: Für $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ hat $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p} - 0 = (\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ den Faktor $\mathfrak{q}^m$ (wegen der $\mathfrak{p}$-adizität); und wenn ein ganzes α so gewählt wird, dass $\mathfrak{A} - \alpha$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthalte, so enthält auch $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p} - \alpha = (\mathfrak{A} - \alpha) - - (\mathfrak{A} - (\mathfrak{A})_\mathfrak{p})$ diesen Faktor, weil $\mathfrak{A} - (\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ ihn enthält. Nach Satz 24. ist also $(\mathfrak{A})_\mathfrak{p}$ ganz.

Satz 41. Es gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \sum_{1}^{\infty}{}^{r} (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r} = \prod_{1}^{\infty}{}^{r} (1 + (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r})$$

Beweis: Die erste ist trivial. Die zweite verifizieren wir so:

$$\prod_{1}^{s}{}^{r}(1 + (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}) = \prod_{1}^{s}{}^{r}(1 + \{0, 0, \ldots, 0, (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, 0, \ldots\} =$$

$$= \prod_{1}^{s}{}^{r} (\{(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots\} + \{0, 0, \ldots, 0, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r} - (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, 0, \ldots\}) =$$

$$= \prod_{1}^{s}{}^{r} \{(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r-1}}, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r+1}}, \ldots\} =$$

$$= \{(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_s}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{s+1}}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{s+2}}, \ldots\} =$$

$$= \{(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots\} + \sum_{1}^{s}{}^{r} \{0, 0, \ldots, 0, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r} - (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, 0, \ldots\} =$$

$$= 1 + \sum_{1}^{s}{}^{r} \{0, 0, \ldots, 0, (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, 0, \ldots\} = 1 + \sum_{1}^{s}{}^{r} (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}.$$

Hieraus folgt aber:

$$\prod_{1}^{\infty}{}^{r} (1 + (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}}) = \lim_{s \to \infty} \prod_{1}^{s}{}^{r} (1 + (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}) = \lim_{s \to \infty} (1 + \sum_{1}^{s}{}^{r} (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} 1 + \lim_{s \to \infty} \sum_{1}^{s}{}^{r} (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}^{r} (\mathfrak{A} - 1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r} = 1 + (\mathfrak{A} - 1) = \mathfrak{A}.$$

X. Die Faktor-Zerlegung der idealen Zahlen.

Satz 42. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien zwei ideale Zahlen. Wenn zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ ein m angegeben werden kann, sodass $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}^m$ enthält, aber $\mathfrak{A}$ den Faktor $^{m+1}$ nicht; so ist $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$.

Beweis: Diejenigen Zahlen m, die zu den Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots$ im Sinne der Prämisse gehören, seien $m_1, m_2, \ldots$ Es sei $\mathfrak{A} \sim [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$, $\mathfrak{B} \sim [\beta_1, \beta_2, \ldots]$.

Da für fast alle r die Differenz $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}_1^{m_1+s}$ enthält, und auch den Faktor $\mathfrak{p}_2^{m_2+s}$ für fast alle r enthält, . . ., und auch den Faktor $\mathfrak{p}_s^{m_s+s}$ für fast alle r enthält; so gelten ebenfalls für fast alle r alle diese s Bedingungen zugleich. Wir wählen $u = u(s)$ so dass die Differenz $\alpha_r - \alpha_{r+1}$ für $r \geqq u(s)$ alle diese Faktoren enthalte. Dann wird offenbar für $r \geqq u(s)$, $t \geqq u(s)$ auch $\alpha_r - \alpha_t$ alle diese Faktoren enthalten. Da $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{p}_s^{m_s+1}$ nicht enthält, werden nicht fast alle α_r diesen Faktor enthalten. Also gibt es ein $r \geqq u(s)$ für welches α_r ihn nicht enthält. Folglich enthält ihn kein α_t mit $t \geqq u(s)$.

Ebenso können wir Zahlen $v = v(s)$ konstruieren, für die so oft $r \geqq v(s)$, $t \geqq v(s)$ ist, $\beta_r - \beta_t$ alle Faktoren $\mathfrak{p}_1^{m_1+s}, \mathfrak{p}_2^{m_2+s}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{m_s+s}$ enthält. Da $\mathfrak{B}$ den Faktor $\mathfrak{p}_s^{m_s}$ enthält, so enthalten ihn fast alle β_r, also auch eines mit $r \geqq v(s)$. Folglich enthalten ihn alle β_t mit $t \geqq v(s)$.

Wir stellen nun eine monoton wachsende Folge $w(1), w(2), \ldots$ auf, sodass allgemein $w(s) \geqq u(s)$, $w(s) \geqq v(s)$ ist. Dann ist:

$$\mathfrak{A} \sim [\alpha_{w(1)}, \alpha_{w(2)}, \ldots], \quad \mathfrak{B} \sim [\beta_{w(1)}, \beta_{w(2)}, \ldots].$$

Jetzt werde eine Folge ganzer Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ derart gewählt, dass ξ_r allgemein den folgenden Bedingungen genügt:

$$\alpha_{w(1)}\xi_r - \beta_{w(1)} \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_1^{m_1+r}$$
$$\alpha_{w(2)}\xi_r - \beta_{w(2)} \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_2^{m_2+r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{w(r)}\xi_r - \beta_{w(r)} \text{ enthält den Faktor } \mathfrak{p}_r^{m_r+r}$$

Nach Satz 29. ist jedes solche System von Bedingungen durch ein ganzzahliges ξ_r lösbar: denn wenn $\alpha_{w(s)}$ den Faktor $\mathfrak{p}_s^m$ enthält, so ist $m < m_s + 1$, $m \leqq m_s$, sodass auch $\beta_{w(s)}$ diesen Faktor enthält.

Wir behaupten nun: die Folge $[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ ist fundamental, und für die zu ihr gehörige ideale Zahl $\mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$. Da alle ξ_r ganz sind, ist es dann auch $\mathfrak{C}$, sodass wirklich $\mathfrak{A} \,|\, \mathfrak{B}$ ist.

Es sei also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$, und m beliebig gegeben.

Für $r \geqq$ Max. (m, n) haben die Ausdrücke

$$\alpha_{w(r)}\xi_r - \beta_{w(r)} \text{ und } \alpha_{w(r+1)}\xi_{r+1} - \beta_{w(r+1)}$$

den Faktor $\mathfrak{p}_m^{m_n+r}$, also auch den Faktor $\mathfrak{p}_m^{m_n+m}$. Ferner haben

$$\alpha_{w(r)} - \alpha_{w(r+1)} \text{ und } \beta_{w(r)} - \beta_{w(r+1)}$$

ebenfalls den Faktor $\mathfrak{p}_n^{m_n+r}$, also auch $\mathfrak{p}_n^{m_n+m}$. Da aber ξ_{r+1} ganz ist, folgt hieraus, dass

$$\{\alpha_{w(r+1)}\xi_{r+1} - \beta_{w(r+1)}\} - \{\alpha_{w(r)}\xi_r - \beta_{w(r)}\} +$$
$$+ \xi_{r+1}\{\alpha_{w(r)} - \alpha_{w(r+1)}\} - \{\beta_{w(r)} - \beta_{w(r+1)}\} = -\alpha_{w(r)}\{\xi_r - \xi_{r+1}\}$$

diesen Faktor ebenfalls hat. Und weil $\alpha_{w(r)}$ den Faktor $\mathfrak{p}_n^{m_n+1}$ nicht hat, so muss $\xi_r - \xi_{r+1}$ den Faktor $\mathfrak{p}_n^m$ haben. Damit ist die Fundamentalität von $[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ bewiesen.

Weiter ist

$$\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{C} \sim [\alpha_{w(1)} \, . \, \xi_1, \alpha_{w(2)} \, . \, \xi_2, \ldots], \ \mathfrak{B} \sim [\beta_{w(1)}, \beta_{w(2)}, \ldots]$$

und für beliebiges $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ und m folgt aus $r \geq \text{Max.}\,(m - m_n, n)$, dass $\alpha_{w(r)}\xi_r - \beta_{w(r)}$ den Faktor $\mathfrak{p}_n^{(m_n - n) + m_n}$, d. h. $\mathfrak{p}_m^n$ enthält. Folglich ist $[\alpha_{w(1)} \, . \, \xi_1, \alpha_{w(2)} \, . \, \xi_2, \ldots] \sim [\beta_{w(1)}, \beta_{w(2)}, \ldots]$, d. h. $\mathfrak{A} \, . \, \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$.

D e f i n i t i o n. 20. Wir nennen zwei ideale Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *assoziiert*, wenn $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}$ ist.

S a t z 43. Es ist stets $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}$ assoziiert.

Wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ assoziiert ist, so ist es auch $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$.

Wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}$ assoziiert ist, so ist es auch $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{C}$.

Beweis: Klar.

S a t z 44. Zwei assoziierte Zahlen sind entweder beide ganz, oder keine ist es.

Beweis: Klar.

S a t z 45. Wenn $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{B}''$ assoziiert ist, so ist es auch $\mathfrak{A}' . \mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{A}'' . \mathfrak{B}''$.

Beweis: Klar.

D e f i n i t i o n 21. $\mathfrak{A}$ ist eine *Einheit*, wenn es zu 1 assoziiert ist.

S a t z 46. Jede Einheit ist ganz.

± 1 sind Einheiten.

Wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ beide Einheiten sind, so ist es auch $\mathfrak{E} . \mathfrak{F}$.

Wenn $\mathfrak{E}$ eine Einheit ist, und $\mathfrak{F}$ ganz und $\mathfrak{F} \mid \mathfrak{E}$ ist, so ist $\mathfrak{F}$ auch eine Einheit.

Beweis: Klar.

D e f i n i t i o n 22. Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}_m$ werde irgendeine Zahl $\overline{\zeta}_m$ zugeordnet, die zu $\overline{\mathfrak{p}}_m$ gehört, aber zu $\overline{\mathfrak{p}}_m^2$ nicht.

D e f i n i t i o n 23. Die ideale Zahl $1 + (\zeta_m - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{P}}_m$.

Die Zahl $1 + (\zeta_m^s - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{P}}_m^s$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, die Zahl $1 - (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}$ mit $\mathfrak{P}_m^{+\infty}$.

S a t z 47. Es ist $\overline{\mathfrak{P}}_m^0 = 1$, $\overline{\mathfrak{P}}_m^1 = \overline{\mathfrak{P}}_m$.

Ferner ist stets (auch für s oder $t = +\infty$) $\overline{\mathfrak{P}}_m^{s+t} = \overline{\mathfrak{P}}_m^s \, . \, \overline{\mathfrak{P}}_m^t$.

Schliesslich ist $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{\mathfrak{P}}^s_m = \overline{\mathfrak{P}}^{+\infty}_m$.

Beveis: Die zwei ersten Behauptungen folgen aus der Definition von $\overline{\mathfrak{P}}^s_m$ sofort, wenn man beim Multiplizieren den Satz 38. benützt. Die dritte Bahauptung beweisen wir so:

Es ist $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{\mathfrak{P}}^s_m = \overline{\mathfrak{P}}^{+\infty}_m$, wenn für jedes $\mathfrak{p}$ und jedes n die Differenz $\overline{\mathfrak{P}}^{+\infty}_m - \overline{\mathfrak{P}}^s_m$ für fast alle s den Faktor $\mathfrak{p}^n$ enthält.

Nun ist

$$\overline{\mathfrak{P}}^{+\infty}_m - \overline{\mathfrak{P}}^s_m = (1-(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}) - (1+(\overline{\zeta}^s_m - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}) =$$
$$= -(\overline{\zeta}^s_m - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m} - (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_m} = (\overline{\zeta}^s_m)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}.$$

Wenn $\mathfrak{p} \neq \overline{\mathfrak{p}}_m$ ist, so hat $(\overline{\zeta}^s_m)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}$ für alle s den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}^n$, weil es $\overline{\mathfrak{p}}_m$-adisch ist. Wenn dagegen $\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{p}}$ ist, hat $(\overline{\zeta}^s_m) - (\overline{\zeta}^s_m)_{\overline{\mathfrak{p}}_m}$ stets den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}^n_m$, also müssen wir nur feststellen, wann $\overline{\zeta}^s_m$ den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}^n_m$ hat Das ist aber wegen $\overline{\mathfrak{p}}_m \mid \zeta_m$ sicher der Fall, sobald $s \geqq \mathrm{Max.}\,(0, n)$ ist.

Satz 48. Jedes Produkt $\prod\limits_1^\infty \overline{\mathfrak{P}}^{m_r}_r$ ist konvergent, dabei können die $m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ oder $+\infty$ sein.

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} = \{(\overline{\zeta}^{m_1}_1), (\overline{\zeta}^{m_2}_2), \ldots\}$. Dann ist

$$(\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = (\mathfrak{A})_{\overline{\mathfrak{p}}_r} - (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = (\overline{\zeta}^{m_r}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} - (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = (\overline{\zeta}^{m_r}_r - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r},$$
$$1 + (\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = 1 + (\overline{\zeta}^{m_r}_r - 1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = \overline{\mathfrak{P}}^{m_r}_r.$$

(Für $m_r = +\infty$ haben wir $\overline{\zeta}^{m_r}_r$ durch 0 zu ersetzen.) Nun ist $\prod\limits_1^\infty (1 + (\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r})$ nach Satz 41. sicher konvergent, u. zw. gleich $\mathfrak{A}$, also gilt dasselbe von $\prod\limits_1^\infty \overline{\mathfrak{P}}^{m_r}_r$.

Satz 49. *(Hauptsatz I.)* Jede ideale Zahl $\mathfrak{A}$ kann auf die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \,.\, \prod_1^\infty \overline{\mathfrak{P}}^{m_r}_r$$

gebracht werden, wobei $\mathfrak{E}$ eine Einheit ist und die $m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ oder $+\infty$ sind.

Beweis: Es ist zunächst

$$\mathfrak{A} = \prod_1^\infty (1 + (\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}).$$

Die Zahl $1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ ihrerseits hat, wie wir beim Beweise des Satzes 41. zeigten, die Form

$$\{(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r-1}}, (\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r+1}}, \ldots\}.$$

Nun sind zwei Fälle denkbar: entweder enthält $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_r^m$ für alle m, oder nicht.

In erstem Falle ist nach Satz 20. $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=0$, denn es enthält jeden Faktor $\bar{\mathfrak{p}}^m$ (wenn $\bar{\mathfrak{p}} \neq \bar{\mathfrak{p}}_r$ ist, zufolge der $\bar{\mathfrak{p}}_r$-adizität, und wenn $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}_r$ ist, nach der Annahme). Folglich ist

$$1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=\{(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_1}, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_2}, \ldots, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r-1}}, 0, (1)_{\bar{\mathfrak{p}}_{r+1}}, \ldots\}=$$
$$=1-(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=\overline{\mathfrak{P}}_r^{+\infty}$$

Im zweiten Falle stellen wir zuerst fest, dass es unbedingt ein m gibt, für welches $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_r^m$ enthält: das wurde bereits beim Beweise von Satz 22. bemerkt. Da es aber auch ein solches m gibt, für welches das nicht der Fall ist, so können wir ein $m=m_r$ finden, sodass $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$ hat, den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_r+1}$ aber nicht.

Betrachten wir nun die $\bar{\mathfrak{p}}_s$-adische Komponente von $1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ und diejenige von $\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$. Sie sind beide $=(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_s}$, wenn $s \neq r$ ist, und $=(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$, bzw. $(\bar{\zeta}_r^{m_r})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$, wenn $s=r$ ist. $1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ enthält den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_s^m$ sicher, wenn ihn seine $\bar{\mathfrak{p}}_s$-adische Komponente enthält, d. h. $(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_s}$ bzw. $(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$. Die erstere enthält nun $\bar{\mathfrak{p}}_s^0$ (weil sie ganz ist), die letztere $\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$.

Andererseits enthält $\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$ den Faktor $\bar{\mathfrak{p}}_s^m$ nur dann, wenn ihn seine $\bar{\mathfrak{p}}_s$-adische Komponente enthält, d. h. $(1)_{\bar{\mathfrak{p}}_s}$ bzw. $(\bar{\zeta}_r^{m_r})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$. Diese enthält den Faktor aber nur dann, wenn ihn 1 bzw. $\bar{\zeta}_r^{m_r}$ enthält. Die erstere enthält aber $\bar{\mathfrak{p}}_s^1$ nicht, die letztere $\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_r+1}$ nicht.

Damit sind die Prämissen von Satz 42. erfüllt: es muss $\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} \mid 1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}$ sein. Also ist

$$1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=\mathfrak{C}_r \cdot \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} \quad (\mathfrak{C}_r \text{ ganz})$$

$$(\mathfrak{A})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=(1+(\mathfrak{A}-1)_{\bar{\mathfrak{p}}_r})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=(\mathfrak{C}_r)_{\bar{\mathfrak{p}}_r} \cdot (\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}=(\mathfrak{C}_r)_{\bar{\mathfrak{p}}_r} \cdot (\bar{\zeta}_r^{m_r})_{\bar{\mathfrak{p}}_r}.$$

Also ist

$$1+(\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}=\{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_2},\ldots,(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}},(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}\cdot(\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}},\ldots\}=$$
$$=\{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_2},\ldots,(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}},(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}},\ldots\}\cdot\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}.$$

Dabei hat $(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^1$ nicht: denn dann hätte

$$(\mathfrak{A})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}=(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}\cdot(\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$$

den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r+1}$, entgegen unserer Annahme. $(\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\mathfrak{p}_r}$ hat nämlich den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$, weil $\overline{\zeta}_r^{m_r}$ ihn hat: denn da $\overline{\zeta}_r$ zu $\mathfrak{p}_r$ aber nicht zu $\mathfrak{p}_r^2$ gehört, ist

$$\overline{\zeta}_r=\mathfrak{p}_r\cdot\mathfrak{q}_1^{s_1}\cdot\mathfrak{q}_2^{s_2}\ldots\mathfrak{q}_n^{s_n}$$

($\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots\mathfrak{q}_n$ von $\mathfrak{p}_r$ und voneinander verschiedene Primideale)

$$\overline{\zeta}_r^{m_r}=\mathfrak{p}_r^{m_r}\cdot\mathfrak{q}_1^{m_r s_1}\cdot\mathfrak{q}_2^{m_r s_2}\ldots\mathfrak{q}_u^{m_r s_u}.$$

Also können wir beide Fälle so zusammenfassen:

Es ist

$$1+(\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}=\{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},\ldots,(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}},(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}},\ldots\}\cdot\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$$

wobei $(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ ganz ist und den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^1$ nicht enthält; und $m_r=0,\pm1,\pm2,\ldots,+\infty$ ist.

Also ist

$$\{(\mathfrak{E}_1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},(\mathfrak{E})_{\overline{\mathfrak{p}}_r},\ldots\}\cdot\prod_{r=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}=\prod_{r=1}^{\infty}\{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},\ldots,(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}},(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}},\ldots\}\cdot$$
$$\cdot\prod_{r=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}=\prod_{r=1}^{\infty}\{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r_1}},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r_2}},\ldots,(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}},(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r},(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}},\ldots\}\cdot\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}=$$
$$=\prod_{r=1}^{\infty}(1+(\mathfrak{A}-1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r})=\mathfrak{A}.$$

Wir sind also am Ziele, wenn wir noch beweisen, dass

$$\mathfrak{E}=\{(\mathfrak{E}_1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1},(\mathfrak{E}_2)_{\overline{\mathfrak{p}}_2},\ldots\}$$

eine Einheit ist.

Da alle $(\mathfrak{E})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}=(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ ganz sind, ist auch $\mathfrak{E}$ ganz, d. h. $1\mid\mathfrak{E}$. Da $(\mathfrak{E})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}=(\mathfrak{E}_r)_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^1$ nicht enthält, enthält ihn auch $\mathfrak{E}$ nicht. Hingegen enthält 1 den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r$ (weil 1 ganz ist), also können wir wieder den Satz 42. anwenden: es ist $\mathfrak{E}\mid 1$. D. h.: $\mathfrak{E}$ und 1 sind assoziiert, $\mathfrak{E}$ ist eine Einheit.

XI. Die Eindeutigkeit der Exponentenfolge.

Definition 23. Wenn

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \cdot \prod_{1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}, \quad \mathfrak{E} \text{ Einheit}, \quad m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, +\infty$$

ist, so nennen wir $m_1, m_2, \ldots$ eine *Exponentenfolge von* $\mathfrak{A}$.

Satz 50. $m_1, m_2, \ldots$ sei eine Exponentenfolge von $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ enthält den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^m$ dann und nur dann, wenn $m \leqq m_r$ ist.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$ enthält, und den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r+1}$ nicht, falls m_r endlich ist; und für $m = +\infty$, dass es alle Faktoren $\overline{\mathfrak{p}}_r^m$ enthält.

Da $\mathfrak{A}$ mit $\prod_{1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$ assoziiert ist, können wir an seiner Stelle dieses Produkt betrachten. Wenn wir $(\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ bzw. 0 (je nach dem m_r endlich oder $+\infty$ ist), kurz mit $\mathfrak{C}_r^{[\overline{\mathfrak{p}}_r]}$ bezeichnen, so ist

$$\prod_{1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} = \prod_{1}^{\infty} \{(1)_{\overline{\mathfrak{p}}_1}, \ldots, (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r-1}}, \mathfrak{C}_r^{[\overline{\mathfrak{p}}_r]}, (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_{r+1}}, \ldots\} = \{\mathfrak{C}_1^{[\overline{\mathfrak{p}}_1]}, \mathfrak{C}_2^{[\overline{\mathfrak{p}}_2]}, \ldots\}$$

Statt $\prod_{1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$ können wir natürlich seine $\overline{\mathfrak{p}}_r$-adische Komponente, $\mathfrak{C}_r^{[\overline{\mathfrak{p}}_r]}$, untersuchen.

Wenn m_r endlich ist, so ist zunächst $\mathfrak{C}_r^{[\overline{\mathfrak{p}}_r]} = (\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$, und wenn wir statt $(\overline{\zeta}_r^{m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ das hier völlig gleichwertige $\overline{\zeta}_r^{m_r}$ betrachten, so sehen wir:

$$\overline{\zeta}_r^{m_r} = \overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r} \cdot \overline{\mathfrak{q}}_1^{m_r s_1} \cdot \overline{\mathfrak{q}}_2^{m_r s_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{q}}_n^{m_r s_n}$$

(Vgl. Beweis von Satz 42.) und dieser Ausdruck enthält den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$, aber nicht den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r+1}$.

Wenn $m_r = +\infty$ ist, so ist $\mathfrak{C}_r^{[\overline{\mathfrak{p}}_r]} = 0$, es enthält also alle Faktoren $\overline{\mathfrak{p}}_r^m$.

Satz 51. *(Hauptsatz II.)* Jede ideale Zahl $\mathfrak{A}$ hat eine und nur eine Exponentenfolge.

Beweis: Dass es mindestens eine gibt, wissen wir aus Satz 48. Sind nun $m_1, m_2, \ldots$ und $n_1, n_2, \ldots$ zwei Exponentenfolgen von $\mathfrak{A}$, so ist nach Satz 50. $m \leqq m_r$ mit $m \leqq n_r$ (m endlich, m_r, n_r eventuell $+\infty$) gleichbedeutend. Also muss allgemein $m_r = n_r$ sein.

Satz 52. Jede Folge $m_1, m_2, \ldots$ ($m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, +\infty$) ist Exponentenfolge einer geeigneten idealen Zahl.

Beweis: Z. B. von $1 \cdot \prod_{1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$.

XII. Eigenschaften der Exponentenfolge.

Satz 53. 1 hat die Exponentenfolge $0, 0, \ldots$; 0 hat die Exponentenfolge $+\infty, +\infty, \ldots$

Beweis: Da für jedes $\mathfrak{p}_r$ der Faktor $\mathfrak{p}_r^m$ in der Zahl 0 enthalten ist, sind für 0 alle m_r gleich $+\infty$.

Bei der 1 hingegen ist:

$$1 \cdot \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^0 = 1 \cdot \prod_{r=1}^{\infty} 1 = 1 \cdot \lim_{s \to \infty} \prod_{r=1}^{s} 1 = 1 \cdot \lim_{s \to \infty} 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Satz 54. Die ideale Zahl $\mathfrak{A}$ besitze die Exponentenfolge $m_1, m_2, \ldots$, die ideale Zahl $\mathfrak{B}$ die Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots$ Dann hat $\mathfrak{A} . \mathfrak{B}$ die Exponentenfolge $m_1 + n_1,\ m_2 + n_2, \ldots$

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{F} . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r}$$

wobei $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ Einheiten sind; also ist

$$\mathfrak{A} . \mathfrak{B} = \mathfrak{E} . \mathfrak{F} . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r} = (\mathfrak{E} . \mathfrak{F}) . \prod_{r=1}^{\infty} (\overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} . \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r}) =$$

$$= (\mathfrak{E} . \mathfrak{F}) . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r + n_r}$$

und auch $\mathfrak{E} . \mathfrak{F}$ ist eine Einheit.

Satz 55. $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ ist mit $m_r \leqq n_r$ (für alle r) gleichbedeutend.

Beweis: Wenn $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ ist, so ist jeder in $\mathfrak{A}$ enthaltene Faktor $\mathfrak{p}_r^m$ auch in $\mathfrak{B}$ enthalten. Also folgt aus $m \leqq m_r$ auch $m \leqq n_r$ (m endlich, m_r, n_r eventuell $+\infty$). Folglich muss $m_r \leqq n_r$ sein.

Nun sei umgekehrt $m_r \leqq n_r$. Da $\mathfrak{E}$ eine Einheit ist, ist $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{G} = 1$, $\mathfrak{G}$ ganz; also ist auch $\mathfrak{G}$, und damit $\mathfrak{H} = \mathfrak{E} . \mathfrak{G}$ eine Einheit. Es ist $\mathfrak{E} . \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Für

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{H} . \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r - m_r}$$

ist offenbar $\mathfrak{A} . \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$. (Der Ausdruck $n_r - m_r$ ist für den Fall $m_r = +\infty$ eigentlich sinnlos; wir nehmen für $m_r = n_r = +\infty$ für $n_r - m_r$ irgendeinen Wert $\geqq 0$ an, einerlei welchen; der Fall n_r endlich und $m_r = +\infty$ ist durch die Voraussetzung $m_r \leqq n_r$ ausgeschlossen.)

Wir müssen nur noch zeigen, dass $\mathfrak{C}$ ganz ist, dann ist alles bewiesen.

$\mathfrak{H}$ ist Einheit, also ganz; es bleibt noch $\prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r - m_r}$ zu erledigen. $\prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r - m_r}$ ist nach Satz 40. ganz, wenn es alle seine $\overline{\mathfrak{p}}_r$-adischen Komponenten sind. Seine $\overline{\mathfrak{p}}_r$-adische Komponente ist aber für endliches $n_r - m_r$ gleich $(\zeta_r^{n_r - m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$, und für $n_r - m_r = +\infty$ gleich 0. (Vgl. Beweis von Satz 49.) 0 ist jedenfalls ganz; $(\overline{\zeta}_r^{n_r - m_r})_{\overline{\mathfrak{p}}_r}$ ist es auch, denn $\overline{\zeta}_r^{n_r - m_r}$ ist wegen $n_r - m_r \geqq 0$ ganz.

Satz 56. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann ganz, wenn alle $m_r \geqq 0$ sind.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann und nur dann assoziiert, wenn alle $m_r = n_r$ sind.

$\mathfrak{A}$ is dann und nur dann Einheit, wenn alle $m_r = 0$ sind.

Beweis: Folgt aus Satz 55. sowie 53.

Satz 57. *(Hauptsatz III.)* $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiges Ideal, es sei $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{p}}_1^{m_1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r}$ (natürlich alle $m_1, m_2, \ldots, m_r$ endlich). Wir bilden die ideale Zahl $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{P}}_1^{m_1} \cdot \overline{\mathfrak{P}}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}$.

Dann ist für jede reale Zahl α die Relation $\mathfrak{a} \mid \alpha$ mit $\mathfrak{A} \mid \alpha$ gleichbedeutend

Beweis: Schreiben wir die Primideal-Faktorenzerlegung von (α) an: (für $\alpha = 0$ ist ja alles klar)

$$(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r} \cdot \mathfrak{p}_{r+1}^{n_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{n_s}$$

α enthält offenbar die Faktoren $\mathfrak{p}_1^{n_1}, \mathfrak{p}_2^{n_2}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{n_s}, \mathfrak{p}_{s+1}^{0}, \mathfrak{p}_{s+2}^{0}, \ldots$ und es enthält die Faktoren $\mathfrak{p}_1^{n_1+1}, \mathfrak{p}_2^{n_2+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{s+1}^{1}, \mathfrak{p}_{s+2}^{1}, \ldots$ nicht. Nach Satz 50. ist also die Exponentenfolge von α gleich $n_1, n_2, \ldots, n_r, n_{r+1}, \ldots, n_s, 0, 0, \ldots$ Die von $\mathfrak{A}$ ist andererseits $m_1, m_2, \ldots, m_r, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots$ Nach Satz 55. ist also $\mathfrak{A} \mid \alpha$ mit

$$n_1 \geqq m_1, n_2 \geqq m_2, \ldots, n_r \geqq m_r \text{ und } n_{r+1} \geqq 0, \ldots, n_s \geqq 0$$

gleichbedeutend. Dies ist aber auch die notwendig und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{a} \mid (\alpha)$, d. h. $\mathfrak{a} \mid \alpha$ sei.

XIII. Der grösste gemeinsame Teiler.

Satz 58. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien zwei ideale Zahlen. Es gibt eine ideale Zahl $\mathfrak{C}$ derart, dass die Gleichungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{V}$$

mit ganzen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ bestehen.

Beweis: Wir setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \,.\, \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{F} \,.\, \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r}$$

wobei $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ Einheiten sind, also für ganze $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$

$$\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{G} = 1, \quad \mathfrak{F} \,.\, \mathfrak{H} = 1$$

gilt. Es sei nun

$$\mathfrak{C} = \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{\mathrm{Min.}\,(m_r,\, n_r)}$$

$\mathfrak{C}$ erfüllt unsere Bedingungen.

Erstens folgt aus Min. $(m_r, n_r) \leqq m_r$ und $\leqq n_r$ nach Satz 55. dass $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{B}$ ist, d. h.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{Y}.$$

Zweitens zerlegen wir die Folge $1, 2, \ldots$ in zwei Teilmengen $u_1, u_2, \ldots$ und $v_1, v_2, \ldots$ derart, dass jedes $r = 1, 2, \ldots$ entweder ein u_s oder ein v_s ist, und dass im ersten Falle stets Min. $(m_r, n_r) = m_r$ ist, im zweiten aber stets $= n_r$.

Wir bestimmen die Zahl $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{V}'$ so, dass

$$(\mathfrak{U}')_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = (1)_{\mathfrak{p}_r} \text{ für } r = u_s, \text{ und } = 0 \quad \text{für } r = v_s$$
$$(\mathfrak{V}')_{\overline{\mathfrak{p}}_r} = 0 \quad \text{für } r = u_s, \text{ und } = (1)_{\overline{\mathfrak{p}}_r} \text{ für } r = v_s$$

ist. Man sieht sofort, dass $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{V}'$ ganz sind, und dass

$$\mathfrak{U}' \,.\, \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{m_r} + \mathfrak{V}' \,.\, \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{n_r} = \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_r^{\mathrm{Min.}\,(m_r,\, n_r)}$$

ist Also ist für $\mathfrak{U} = \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{V}'$ wirklich

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{V}.$$

D e f i n i t i o n 24. $\mathfrak{C}$ ist *ein grösster gemeinsamer Teiler von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$, wenn $\vartheta \mid \mathfrak{C}$ damit gleichbedeutend ist, dass $\vartheta \mid \mathfrak{A}$ und $\vartheta \mid \mathfrak{B}$ ist.

S a t z 57. Zwei Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ haben stets grösste gemeinsame Teiler, diese bilden eine Klasse assozierter Zahlen.

Beweis: Betrachten wir das $\mathfrak{C}$ des Satzes 56. Aus $\vartheta \mid \mathfrak{C}$ folgt wegen $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \mid \mathfrak{B}$ hier $\vartheta \mid \mathfrak{A}$, $\vartheta \mid \mathfrak{B}$. Aus $\vartheta \mid \mathfrak{A}$, $\vartheta \mid \mathfrak{B}$ aber folgt $\vartheta \mid \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{U}$, $\vartheta \mid \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{V}$ also $\vartheta \mid \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{V}$, d. h. $\vartheta \mid \mathfrak{C}$. Also ist $\mathfrak{C}$ ein grösster gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Wenn $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ grösste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind, so ist $\vartheta \mid \mathfrak{C}'$ mit $\vartheta \mid \mathfrak{C}''$ gleichbedeutend. Wegen $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{C}'$ ist also $\mathfrak{C}' \mid \mathfrak{C}''$, und wegen $\mathfrak{C}'' \mid \mathfrak{C}''$ ist $\mathfrak{C}'' \mid \mathfrak{C}'$: also sind sie assoziiert.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{C}'$ grösster gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, und mit $\mathfrak{C}''$ assoziiert ist, so ist es auch $\mathfrak{C}''$: denn $\vartheta \mid \mathfrak{C}''$ ist mit $\vartheta \mid \mathfrak{C}'$ gleichbedeutend.

Satz 58. Jeder grösste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat die Form $\mathfrak{A} . \mathfrak{U} + \mathfrak{B} . \mathfrak{V}$ ($\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ganz), und die Exponentenreihe Min. (m_1, n_1), Min. $(m_2, n_2), \ldots$

Beweis: Für das $\mathfrak{C}$ des Satzes 56. trifft beides zu, und dieses $\mathfrak{C}$ ist ein grösster gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Alle anderen sind aber mit $\mathfrak{C}$ assoziiert, folglich gilt unser Satz auch für sie.

XIV. Die Einteilung der idealen Zahlen.

Definition 25. Wie wir wissen, ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann 0, wenn seine Exponentenfolge aus lauter $+\infty$ besteht.

Wenn die Exponentenfolge auch endliche m_r enthält, aber mindestens ein $+\infty$, so ist $\mathfrak{A}$ ein *Nullteiler.*[11])

Wenn die Exponentenfolge lauter endliche m_r enthält, aber unendlich oft $m_r \neq 0$ ist, so ist $\mathfrak{A}$ *unendlich.*[12])

Wenn die Exponentenfolge lauter endliche m_r enthält, und nur endlich oft $m_r \neq 0$ ist, so ist $\mathfrak{A}$ *endlich.*[12])

Satz 59. In einer Klasse assoziierter idealer Zahlen sind alle Elemente $=0$, oder alle Nullteiler, oder alle unendlich, oder alle endlich.

Beweis: Folgt aus Satz 56., da es sich um Aussagen über die Exponentenfolge handelt.

Satz 60. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann endlich, wenn es zwei reale Zahlen α, β gibt, sodass $\mathfrak{A} \mid \alpha, \beta \mid \mathfrak{A}$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ ist.

Beweis: Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist, so ist es offenbar gleich

$$\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_r^{m_r},$$

$\mathfrak{E}$ eine Einheit, wir können also das zu $\mathfrak{A}$ assoziierte Produkt

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_r^{m_r}$$

betrachten. Wenn wir α so wählen, dass es zu $\mathfrak{p}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{m_r}$ gehört, und dabei $\neq 0$ ist, so ist nach Satz 57.

$$\mathfrak{P}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_r^{m_r} \mid \alpha, \mathfrak{A}' \mid \alpha, \mathfrak{A} \mid \alpha.$$

---

11) Dass unsere „Nullteiler“ solche im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, zeigen wir in Satz 62.

12) PRÜFER defıniert die endlichen idealen Zahlen anders. Dass beide Definitionen gleichbedeutend sind, zeigen wir in Satz 60.

Ebenso können wir ein $\beta \neq 0$ so bestimmen, dass für

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{P}_1^{-m_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{-m_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_r^{-m_r}$$

$\mathfrak{B}' \mid \beta$, d. h. $\beta = \mathfrak{B}' . \mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$ ganz) sei. Nun ist offenbar $\mathfrak{A}' . \mathfrak{B}' = 1$,

$$\mathfrak{C} . \frac{1}{\beta} = 1 . \mathfrak{C} . \frac{1}{\beta} = \mathfrak{A}' . \mathfrak{B}' . \mathfrak{C} . \frac{1}{\beta} = \mathfrak{A}' . \beta . \frac{1}{\beta} =$$

$$= \mathfrak{A}' . 1 = \mathfrak{A}', \frac{1}{\beta} \mid \mathfrak{A}', \frac{1}{\beta} \mid \mathfrak{A}.$$

Nun sei umgekehrt $\mathfrak{A} \mid \alpha$, $\beta \mid \mathfrak{A}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$). Wenn wir

$$(\alpha) = \overline{\mathfrak{p}}_1^{m_1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_r^{m_r}, \quad (\beta) = \overline{\mathfrak{p}}_1^{n_1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_r^{n_r}$$

setzen, so hat offenbar α die Exponentenfolge $m_1, m_2, \ldots, m_r, 0, 0, \ldots$, und β die Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots, n_r, 0, 0, \ldots$ (Alle m_r, n_r sind endlich). Für die Exponentenfolge $p_1, p_2, \ldots$ von $\mathfrak{A}$ gilt folglich:

$$m_1 \leqq p_1 \leqq n_1, m_2 \leqq p_2 \leqq n_2, \ldots, m_r \leqq p_r \leqq n_r, \; p_{r+1} = 0, p_{r+2} = 0, \ldots$$

Also is $\mathfrak{A}$ endlich.

S a t z 61. Es gibt zu jedem Ideale $\mathfrak{a}$ eine ideale Zahl $\mathfrak{A}$, sodass $\mathfrak{a} \mid \alpha$ mit $\mathfrak{A} \mid \alpha$ gleichbedeutend ist.

Zu einer idealen Zahl $\mathfrak{A}$ kann hingegen ein solches Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann angegeben werden, wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist.

Beweis: Dass zu jedem α ein $\mathfrak{A}$ und zu jedem endlichen $\mathfrak{A}$ ein α existiert wurde bereits durch Satz 57. ausgesagt. Wir müssen noch zeigen, dass für nicht endliche $\mathfrak{A}$ kein α vorhanden ist.

Wenn in der Exponentenfolge von $\mathfrak{A}$ ein $+\infty$ vorkommt, also etwa $m_r = +\infty$ ist, so enthält $\mathfrak{A}$ alle Faktoren $\overline{\mathfrak{p}}_r^m$. Aus $\mathfrak{A} \mid \alpha$ folgt dann, dass auch α alle Faktoren $\overline{\mathfrak{p}}_r^m$ enthält, d. h. es muss $\alpha = 0$ sein. Ein Ideal, welches nur die 0 enthält, gibt es aber nicht.

Wenn alle m_r endlich sind, so müssen unendlich viele $\neq 0$ sein. (Sonst ist $\mathfrak{A}$ endlich.) Ist für unendlich viele m_r sogar $m_r > 0$, so ist in diesen Fällen $m_r \geqq 1$, d. h. $\mathfrak{A}$ enthält den Faktor $\overline{\mathfrak{p}}_r^1$. Wenn $\mathfrak{A} \mid \alpha$ ist, so muss also α unendlich viele Faktoren $\overline{\mathfrak{p}}_r^1$ enthalten, woraus wieder $\alpha = 0$ folgt.

Also können wir uns auf den Fall beschränken, dass fast alle $m_r \leqq 0$ und unendlich viele < 0 sind. Die r für die $m_r > 0$ ist, seien etwa $u_1, u_2, \ldots, u_t$, die r für die $m_r < 0$ ist, $v_1, v_2, \ldots$ Dann ist für jedes

$$\alpha_s = \overline{\mathfrak{p}}_{v_s}^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_1}^{m_1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_t}^{m_t}$$

offenbar $\mathfrak{A} \mid \alpha_s$. Aus

$$\overline{\mathfrak{p}}_{v_s}^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_1}^{m_1} \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_{u_t}^{m_t} \mid \alpha$$

folgt also $\mathfrak{A} \nmid \alpha$. Oder wenn wir

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha_1}^{m_1} \cdot \bar{\mathfrak{p}}_{\alpha_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \bar{\mathfrak{p}}_{\alpha_t}^{m_t} = \mathfrak{a}'$$

setzen: aus $\frac{\mathfrak{a}'}{\bar{\mathfrak{p}}_{\nu_s}} \mid \alpha$ folgt $\mathfrak{A} \mid \alpha$. Wäre nun $\mathfrak{A} \mid \alpha$ mit $\mathfrak{a} \mid \alpha$ gleichbedeutend, so müsste $\mathfrak{a} \mid \frac{\mathfrak{a}'}{\bar{\mathfrak{p}}_{\nu_s}}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{\nu_s} \mid \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}$ sein. D. h. $\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}$ hätte unendlich viele Primfaktoren, was unmöglich ist.

XV. Die Division.

Satz 62. Es sei $\mathfrak{A} . \mathfrak{B} = 0$. Dann ist entweder $\mathfrak{A} = 0$, oder $\mathfrak{B} = 0$, oder aber sind sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{B}$ Nullteiler.

Beweis: Die Exponentenfolge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $m_1, m_2, \ldots$ bzw. $n_1, n_2, \ldots$ $\mathfrak{A} . \mathfrak{B} = 0$ bedeutet, dass für alle r $m_r + n_r = +\infty$ ist, d. h. $m_r = +\infty$ oder $n_r = +\infty$ ist. Also sind entweder alle $m_r = +\infty$ oder alle $n_r = +\infty$, oder es gibt sowohl ein m_r als ein n_r, welches $+\infty$ ist. Das ist aber die Behauptung.

Satz 62. $\mathfrak{A}$ sei $\neq 0$ und kein Nullteiler. Die Gleichung $\mathfrak{A} . \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ hat dann eine und nur eine Lösung.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} . \prod_{r=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_r^{m_r}, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{F} . \prod_{r=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_r^{n_r}, \ \mathfrak{E}, \mathfrak{F} \text{ Einheiten.}$$

Wegen $\mathfrak{E} \mid \mathfrak{F}$ gibt es ein $\mathfrak{G}$, sodass $\mathfrak{E} . \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ ist.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{G} . \prod_{r=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{P}}_r^{n_r - m_r}$$

(alle m_r sind nach Annahme endlich) genügt dann den Anforderungen.

Aus $\mathfrak{A} . \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} . \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{B}$ folgt

$$\mathfrak{A} . \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{A} . \mathfrak{X}_2, \ \mathfrak{A} . \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{A} . \mathfrak{X}_2 = 0, \ \mathfrak{A} . (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2) = 0$$

und weil $\mathfrak{A}$ kein Nullteiler ist, $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 = 0$, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Definition 26. Die im Satze 62. erwähnte ideale Zahl bezeichnen wir mit $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$.

Satz 63. Wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Exponentenfolgen $m_1, m_2, \ldots$ bzw. $n_1, n_2, \ldots$ haben ($\mathfrak{A} \neq 0$ und kein Nullteiler), so hat $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ die Exponentenfolge $n_1 - m_1, n_2 - m_2, \ldots$

Beweis: Dies wurde beim Beweise von Satz 62. festgestellt.

Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.

Von Tibor Radó in Szeged.

Die vorliegende Arbeit ist im Anschluss an Untersuchungen entstanden, die Herr A. Haar über die direkte Lösung des Plateauschen Problems angestellt hat. Herr Haar betrachtete dabei von vornherein Funktionen, die nur einer Lipschitzbedingung genügen, und wurde dadurch auf gewisse Sätze geführt, die für speziellere Funktionenklassen bekannt oder unmittelbar beweisbar sind, welche aber unter den zu Grunde gelegten allgemeinen Voraussetzungen eine sorgfältige Behandlung erfordern. Ich werde im folgenden, auf Anregung von Herrn Haar, einige hieher gehörige Fragen beantworten.

§ 1.

Ein geometrischer Hilfssatz.

1. In der xy-Ebene sei eine *konvexe* Kurve C gegeben, von welcher wir noch voraussetzen, dass sie keine geradlinigen Bestandteile enthält, dass sie also mit keiner Geraden mehr als zwei getrennte Punkte gemein hat. Auf C sei eine stetige Wertefolge vorgegeben; mit Γ werde die Raumkurve bezeichnet, welche dadurch entsteht, dass man in jedem Punkte von C den zugehörigen Randwert als z-Koordinate aufträgt.

Wir sagen dann, dass die Randwertfolge auf C bzw. die dadurch erklärte Raumkurve Γ einer *Dreipunktebedingung* mit der Konstanten Δ genügen, wenn folgendes statthat. Für alle Ebenen

$$z = ax + by + c,$$

die mit der Raumkurve Γ wenigstens drei getrennte Punkte gemein haben, gilt die Ungleichung[1])

$$(a^2+b^2)^{1/2}\leqq\Delta.$$

In den bisherigen Untersuchungen über das PLATEAUsche Problem (LEBESGUE, S. BERNSTEIN, Ch. H. MÜNTZ)[2]) wird stets die Annahme zu Grunde gelegt, dass für die gegebenen Randwerte die Dreipunktebedingung erfüllt ist. Diese Bedingung tritt übrigens bereits in einer Note auf, in welcher HILBERT seine direkte Methode zur Lösung des DIRICHLETschen Problems skizziert.[3])

2. Sei $f(x, y)$ eine in und auf C stetige Funktion. Sie heisst, nach LEBESGUE, *monoton*, falls folgende Bedingung erfüllt ist. Ist G irgend ein Gebiet innerhalb der Randkurve C, und ist in allen Randpunkten von G

$$m\leqq f\leqq M,$$

so gilt dieselbe Ungleichung auch im Innern von G. Wenn nun $f(x,y)$ selbst, sowie auch alle Funktionen, die aus $f(x,y)$ durch Subtraktion einer linearen Funktion entstehen, also die Form

$$f(x,y)-ax-by-c$$

haben, monoton sind, so heisse die Funktion $f(x,y)$ eine *Sattelfunktion*, und die Fläche $z=f(x,y)$ eine *Sattelfläche.*

Zur Erläuterung dieser Bezeichnung werde bemerkt, dass unter der Annahme, dass $f(x,y)$ zweimal stetig differenzierbar ist,

---

[1]) Geometrisch bedeutet diese Bedingung folgendes. Ist θ derjenige feste Winkel zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$, für welchen

$$\operatorname{tg}\theta=\Delta$$

ist, und ist α der zwischen denselben Grenzen gelegene Winkel, welchen eine Ebene $z=ax+by+c$ mit der xy-Ebene einschliesst, so gilt $\alpha\leqq\theta$, sobald die betreffende Ebene wenigstens drei getrennte Punkte mit der Raumkurve Γ gemein hat.

[2]) LEBESGUE, Intégrale, longueur, aire (*Annali di Matematica,* serie III, t. VII, 1902, pp. 231—359, vgl. insbesondere pp. 342—359). S. BERNSTEIN, insb. in seinen Arbeiten: Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure,* t. 27, 1910, pp. 233—256) und Sur les équations du calcul des variations (ebendort, t. 29, 1912, pp. 431—485). Ch. H. MÜNTZ, Die Lösung des PLATEAUschen Problems über konvexen Bereichen (*Mathematische Annalen,* Bd. 94, 1925, S. 53—96).

[3]) HILBERT, Über das DIRICHLETsche Prinzip (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Bd. 8, 1900, S. 184—188).

die Fläche $z = f(x, y)$ dann und nur dann eine Sattelfläche im Sinne der soeben gegebenen Erklärung ist, wenn ihre GAUSSsche Krümmung nirgends positiv wird. Man sieht dann auch sofort, dass die hinreichend oft derivierbaren Extremalflächen von zweidimensionalen regulären Variationsproblemen der Form

$$\iint \Phi(p, q)\, dx\, dy = \text{minimum}$$

ebenfalls Sattelflächen sind. Denn sie genügen partiellen Differentialgleichungen, nämlich der LAGRANGEschen Gleichung des betreffenden Problems, wobei diese Gleichungen die Form

$$\Phi_{pp}\, r + 2\Phi_{pq}\, s + \Phi_{qq}\, t = 0$$

haben, mit $\Phi_{pp} \cdot \Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 > 0$. Durch einfache algebraische Umformung folgert man daraus, dass $rt - s^2 \leq 0$ ist, dass also die GAUSSsche Krümmung der Extremalfläche nirgends positiv wird.

3. Über die Sattelfunktionen gilt nun der folgende Satz, der in speziellerer Fassung bei HILBERT, LEBESGUE, S. BERNSTEIN und Ch. H. MÜNTZ eine wichtige Rolle spielt.[4]

Hilfssatz über Sattelfunktionen. *Die Funktion $f(x, y)$ sei in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Falls dann ihre Randwerte einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten $\varDelta$ genügen, so gilt für irgend zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) innerhalb C die Ungleichung*

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leq \varDelta.$$

Das Wesentliche an diesem Satze tritt besser hervor, wenn wir denselben etwas anders formulieren. Zunächst bemerken wir, dass nach diesem Satze die Funktion $f(x, y)$ einer LIPSCHITZbedingung genügt. Es gibt dann eine *kleinste* positive Zahl $L[f]$, die wir als die LIPSCHITZ*konstante* von $f(x, y)$ bezeichnen werden, so dass für irgend zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) innerhalb C die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leq L[f]$$

erfüllt ist. Der Hilfssatz über Sattelfunktionen kann dann wie folgt formuliert werden:

---

[4]) Vgl. l. c. [2]) und [3]).

Die Funktion $f(x, y)$ sei in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Falls dann ihre Randwerte einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen, so kann man erstens behaupten, dass $f(x, y)$ einer Lipschitz*bedingung genügt, und zweitens, dass ihre* Lipschitz*konstante nicht grösser ist als Δ, d. h. nicht grösser als eine Zahl, die nur von den Randwerten abhängt, also ohne Kenntnis des Gesamtverlaufes von $f(x, y)$ angegeben werden kann, sobald die Randwerte bekannt sind.*

Für die besonderen Fälle, wo die Fläche $z = f(x, y)$ eine Polyederfläche ist, oder aber hinreichend regulär und im Allgemeinen negativ gekrümmt ist, wurde dieser Hilfssatz durch Lebesgue bzw. S. Bernstein[5]) in einfacher Weise bewiesen und bei wichtigen Untersuchungen verwendet. Bei ihren einfachen Beweisen sind aber gerade die jeweiligen besonderen Verhältnisse ausschlaggebend; so bei Lebesgue der Umstand, dass die betrachteten Polyederflächen keine konvexe Ecken besitzen. Die Flächen, für welche Herr Haar den Hilfssatz benötigte und formulierte, weisen ebenfalls eine Besonderheit auf, sie genügen nämlich einer Lipschitzbedingung. Ich habe den Beweis ursprünglich für diesen Fall, der einige Erleichterungen gewährt, durchgeführt; im folgenden teile ich einen etwas längeren Beweis mit, bei welchem gar keine zusätzliche Annahme gemacht wird, wodurch die einfachen topologischen Gründe des Satzes klar hervortreten.

4. Es sei also $f(x, y)$ in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Sei $z = ax + by + c$ die Gleichung einer Ebene und es werde

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

gesetzt. Bei allen Werten von a, b, c ist dann $\delta(x, y)$ monoton. Ist also C' eine einfache geschlossene Kurve im Innern von C, und ist auf C' beständig $\delta(x, y) \leqq 0$, so gilt $\delta(x, y) \leqq 0$ auch im Innern von C'. Wir wollen diese Aussage für einen besonderen Fall verschärfen.

Es möge die Kurve C' aus zwei Teilbögen σ und γ bestehen, wobei σ eine *geradlinige Strecke* ist. Auf σ sei $\delta(x, y) \leqq 0$, auf γ aber, einschliesslich der beiden Endpunkte, $\delta(x, y) < 0$. Wir wollen zeigen: *ist (x_0, y_0) ein innerer Punkt von C', der mit den beiden*

---

[5]) Vgl. l. c. [2]).

Endpunkten der Strecke σ nicht in einer Geraden liegt, so ist

$$\delta(x_0, y_0) < 0.$$

Es seien nämlich (x_1, y_1), (x_2, y_2) die beiden Endpunkte der Strecke σ. Mit t bezeichnen wir einen reellen Parameter, und setzen

$$z_t(x, y) = t\,[(y_2 - y_1)\,x + (x_1 - x_2)\,y - x_1 y_2 + x_2 y_1]. \qquad \text{I.}$$

Dann bilden wir

$$\delta_t(x, y) = \delta(x, y) - z_t(x, y). \qquad \text{II.}$$

Diese Funktion $\delta_t(x, y)$ ist, bei jedem festen Werte von t, in der Form

$$f(x, y) - Ax - By - C$$

darstellbar, wo A, B, C Konstanten sind; folglich ist $\delta_t(x, y)$ monoton.

Am Bogen γ ist, einschliesslich Endpunkte, nach Voraussetzung $\delta(x, y) < 0$; wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ gibt es also eine positive Konstante ε, so dass am Bogen γ

$$\delta(x, y) \leqq -\varepsilon \qquad \text{III.}$$

gilt. Am Bogen γ ist nun, wie aus I. ersichtlich,

$$|z_t(x, y)| < \alpha\,|t|, \qquad \text{IV.}$$

wo α eine endliche, durch die Figur bestimmte Konstante ist. Sei nun t durch die Forderung

$$|t| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \qquad \text{V.}$$

eingeschränkt. Dann ist am Bogen γ, nach II—V,

$$\delta_t(x, y) < -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < 0.$$

Auf der Strecke σ ist, nach I, $z_t(x, y) = 0$, also $\delta_t(x, y) = \delta(x, y)$. Da hier nach Voraussetzung $\delta(x, y) \leqq 0$ ist, so ist hiernach auf σ auch $\delta_t(x, y) \leqq 0$. Auf der ganzen Kurve C' ist also $\delta_t(x, y) \leqq 0$, folglich gilt, wegen der Monotonität, im inneren Punkte (x_0, y_0) die Ungleichung

$$\delta_t(x_0, y_0) = \delta(x_0, y_0) - t\,[(y_2 - y_1)\,x_0 + (x_1 - x_2)\,y_0 - x_1 y_2 + x_2 y_1] \leqq 0,$$

also

$$\delta(x_0, y_0) \leqq t\,[(y_2 - y_1)\,x_0 + (x_1 - x_2)\,y_0 - x_1 y_2 + x_2 y_1], \qquad \text{VI.}$$

sofern V. erfüllt ist. Der Koeffizient von t in VI. ist von Null verschieden, da nach Voraussetzung die drei Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) nicht in einer Geraden liegen; es sei dieser Koeffizient etwa negativ. Wird dann $t > 0$ der Forderung V. entsprechend gewählt, so ergibt sich aus VI:

$$\delta(x_0, y_0) < 0,$$

was gezeigt werden sollte.

5. Sei wieder

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c.$$

Diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, in welchen $\delta(x, y) \neq 0$, bilden eine offene Punktmenge; eine solche zerfällt bekanntlich in höchstens abzählbar viele getrennte Gebiete. Ist G ein derartiges Gebiet, so soll dasselbe ein *vollständiges nullstellenfreies Gebiet* für $\delta(x, y)$ heissen. In G ist dann $\delta(x, y) \neq 0$; in G hat also $\delta(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen. Ist P ein Randpunkt von G, der im Innern der Randkurve C liegt, so ist P eine Nullstelle von $\delta(x, y)$.

Da nun innerhalb G die Funktion $\delta(x, y)$ nirgends gleich Null ist, so muss es auch solche Randpunkte von G geben, in welchen $\delta(x, y) \neq 0$ ist; sonst müsste die monotone Funktion $\delta(x, y)$ in G identisch verschwinden. Sei R ein solcher Randpunkt von G, in welchem $\delta(x, y)$ von Null verschieden ist. Nach einer obigen Bemerkung liegt R auf der Randkurve C. Einen derartigen Randpunkt von G, der also auf C liegt und in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ ist, wollen wir als einen *charakteristischen Randpunkt* von G bezeichnen.

Sei R ein solcher Randpunkt von G. Wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ kann man dann ein halbkreisförmiges Gebiet angeben, welches längs eines kleinen, den Punkt R enthaltenden Bogens an die Randkurve C stösst und in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ ist. Dieses halbkreisförmige Gebiet ist dann in G enthalten, da G ein vollständiges nullstellenfreies Gebiet ist. Daraus folgt: Sind G_1, G_2 getrennte vollständige nullstellenfreie Gebiete für $\delta(x, y)$, und sind R_1, R_2 charakteristische Randpunkte dieser Gebiete, so sind diese Punkte verschieden.

Sei γ einer der beiden Bögen, in welche C durch die Punkte R_1, R_2 zerlegt wird. Wir wollen zeigen: *es gibt auf γ wenigstens eine Nullstelle von $\delta(x, y)$.* Denn sei dies nicht der Fall. Dann wäre am Bogen γ, einschliesslich Endpunkte, $\delta(x, y) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ könnten wir dann einen den Bogen γ enthaltenden, etwas grösseren Bogen γ^* auf C angeben, und ein schmales, längs γ^* an C anstossendes kreiszweieckförmiges Gebiet G^* bestimmen, in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ wäre. Dieses Gebiet G^* wäre dann sowohl in G_1 wie auch in G_2 enthalten, da G_1 und G_2 vollständige nullstellenfreie Gebiete sind. Dann aber müssten G_1 und G_2 zusammenfallen. Aus diesem Widerspruche geht die Richtigkeit unserer Behauptung hervor, dass am Bogen γ wenigstens eine Nullstelle von $\delta(x, y)$ liegt. Da die Endpunkte von γ, als charakteristische Randpunkte, keine Nullstellen sind, so ist diese Nullstelle von den Endpunkten des Bogens γ gewiss verschieden.

6. Bisher haben wir von der Voraussetzung, dass die Randwerte von $f(x, y)$ einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten $\varDelta$ genügen, keinen Gebrauch gemacht; jetzt werden wir auch diese Voraussetzung berücksichtigen. Dieselbe soll in der folgenden aequivalenten Fassung zu Grunde gelegt werden. *Ist $z = ax + by + c$ die Gleichung einer Ebene und ist*

$$(a^2 + b^2)^{1/2} > \varDelta,$$

so hat die Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

höchstens zwei verschiedene Nullstellen auf der Randkurve C.

Wir wollen jetzt zeigen: wenn $(a^2 + b^2)^{1/2} > \varDelta$ ist, so kann es keine zwei getrennte vollständige nullstellenfreie Gebiete der Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

geben, in welchen diese Funktion *dasselbe Vorzeichen* hat. Mit anderen Worten: alle diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, wo $\delta(x, y)$ etwa positiv ist, bilden ein *einziges* Gebiet, vorausgesetzt, dass $(a^2 + b^2)^{1/2} > \varDelta$ ist.

Man setze nämlich voraus, dass zwei solche Gebiete G_1, G_2 vorhanden sind, in denen etwa $\delta(x, y) > 0$ ist. Seien R_1, R_2 charakteristische Randpunkte dieser Gebiete. Nach No 5 liegt dann auf jedem der beiden Bögen, in welche die Randkurve C durch die Punkte R_1, R_2 zerlegt wird, gewiss je eine Nullstelle von $\delta(x, y)$; seien Q_1, Q_2 diese Nullstellen. Dann gelten also die Beziehungen

$$\delta(R_1) > 0 \quad \delta(R_2) > 0, \; \delta(Q_1) = 0, \; \delta(Q_2) = 0.$$

Es werde nun $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass

$$\delta(R_1) > \varepsilon, \; \delta(R_2) > \varepsilon$$

ist. Für die Funktion

$$\delta^*(x, y) = \delta(x, y) - \varepsilon$$

bestehen dann die Relationen

$$\delta^*(R_1) > 0, \quad \delta^*(R_2) > 0, \quad \delta^*(Q_1) < 0, \quad \delta^*(Q_2) < 0,$$

aus welchen, da auf der Randkurve C die Punktepaare R_1, R_2 und Q_1, Q_2 einander trennen, sogleich folgt, dass die Funktion $\delta^*(x, y)$ wenigstens vier getrennte Nullstellen auf der Randkurve C besitzt. Da aber

$$\delta^*(x, y) = f(x, y) - ax - by - c - \varepsilon$$

und nach Voraussetzung $(a^2 + b^2)^{1/2} > \varDelta$ ist, so widerspricht diese Folgerung der Voraussetzung, dass die Randwerte von $f(x, y)$ einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten $\varDelta$ genügen.

7. Es seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene Punkte auf der Randkurve C. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leqq \varDelta.$$

Denn sei (x_3, y_3) irgend ein dritter Punkt auf C. Wir können dann a, b, c so bestimmen, dass die Gleichungen

$$f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c \qquad \text{VII.}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

bestehen. Die entsprechende Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

hat dann wenigstens drei Nullstellen auf der Randkurve C. Der Dreipunktebedingung zufolge ist also

$$(a^2 + b^2)^{1/2} \leqq \varDelta. \qquad \text{VIII.}$$

Aus VII. folgt

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1),$$

und daraus, mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung,

$$[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)]^2 \leqq (a^2 + b^2)\,[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2].$$

Mit Rücksicht auf VIII. ist also

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leqq \varDelta,$$

wie wir zeigen wollten.

8. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen schreiten wir nun zum eigentlichen Beweise, den wir indirekt führen werden. Wir nehmen also an, dass im Innern der Randkurve C zwei

Punkte A, B vorhanden sind, so dass die Ungleichung

$$\frac{|f(B)-f(A)|}{\overline{AB}} > \Delta \qquad \text{IX.}$$

gilt, und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruche führt.

Es seien A^*, B^* diejenigen, im xyz-Raume gedachten Punkte der Fläche $z=f(x,y)$, die über A bzw. B liegen. Für unsere Schlüsse wird die Annahme wesentlich sein, dass die Strecke A^*B^* nicht ganz auf der Fläche $z=f(x,y)$ liegt. Diese Annahme wollen wir also zunächst rechtfertigen, indem wir zeigen: wenn innerhalb C zwei Punkte A, B vorhanden sind, für welche IX. erfüllt ist, so kann man auch zwei solche Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ finden, für welche IX. ebenfalls besteht, die aber auch der weiteren Forderung genügen, dass die entsprechende Strecke $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ nicht ganz auf der Fläche $z=f(x,y)$ liegt.

Es seien A', B' die beiden Punkte, in welchen die Randkurve C von der Geraden AB getroffen wird; die Bezeichnung sei so gewählt, dass die Strecken $AB, A'B'$ gleichgerichtet sind. Sei, für $0 \leqq t \leqq 1$, A_t derjenige Punkt der Strecke AA', für welchen

$$\frac{\overline{AA_t}}{\overline{AA'}} = t$$

ist, und sei B_t derjenige Punkt der Strecke BB', für welchen

$$\frac{\overline{BB_t}}{\overline{BB'}} = t$$

ausfällt. Der Ausdruck

$$\varphi(t) = \frac{|f(B_t)-f(A_t)|}{\overline{A_tB_t}}$$

ist für $0 \leqq t \leqq 1$ eine stetige Funktion von t. Nach IX. ist $\varphi(0) > \Delta$, nach No 7 ist $\varphi(1) \leqq \Delta$, da für $t=1$ die Punkte A_t, B_t mit den auf C liegenden Punkten A' bzw. B' zusammenfallen. Wir können also t so fixieren, dass $\mathfrak{A}=A_t$, $\mathfrak{B}=B_t$ innere Punkte der Strecken AA' bzw. BB' sind und ausserdem die Ungleichungen

$$\Delta < \frac{|f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})|}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} < \frac{|f(B)-f(A)|}{\overline{AB}} \qquad \text{X.}$$

gelten. Diese Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ genügen unseren Forderungen. Denn sind $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ die über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte der Fläche, so ist zunächst nach X:

$$\frac{f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} \neq \frac{f(B)-f(A)}{\overline{AB}},$$

die Strecke $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ liegt also nicht ganz auf der Fläche $z=f(x, y)$; ausserdem gilt nach X. wiederum die zu widerlegende Ungleichung

$$\frac{|f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})|}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} > \varDelta.$$

Damit ist die im folgenden zu Grunde gelegte Annahme, dass die Strecke A^*B^* nicht ganz auf der Fläche liegt, gerechtfertigt.

9. Dies vorausgeschickt, sei γ^* derjenige Bogen auf der Fläche, der über der Strecke AB liegt. Dann kann dieser Bogen γ^* durch die Gleichung

$$z=f(P) \qquad \text{XI.}$$

dargestellt werden, wobei P einen auf der Strecke AB veränderlichen Punkt bedeutet. Sei ferner in analoger Weise

$$z=\zeta(P) \qquad \text{XII.}$$

die Gleichung derjenigen Strecke des xyz-Raumes, die durch die Endpunkte des Bogens γ^* bestimmt wird; dabei ist $\zeta(P)$ eben nur für die Punkte der Strecke AB erklärt. Es ist dann

$$\zeta(A)=f(A), \ \zeta(B)=f(B). \qquad \text{XIII.}$$

Da aber, wie wir nach No 8 annehmen dürfen, der Bogen γ^* mit der durch XII. dargestellten Strecke nicht zusammenfällt, so ist die, wieder nur auf der Strecke AB erklärte stetige Funktion

$$\psi(P)=f(P)-\zeta(P) \qquad \text{XIV.}$$

nicht identisch gleich Null. Um die Vorstellungen zu fixieren, nehmen wir an, dass $\psi(P)$ auf der Strecke AB ein positives Maximum

$$\mu>0 \qquad \text{XV.}$$

erreicht. Diejenigen Punkte P der Strecke AB, in welchen $\psi(P)$ ihr Maximum μ erreicht, bilden eine abgeschlossene Punktmenge, welche aber die Endpunkte A und B nicht enthält, da nach XIII—XV

$$\psi(A)=\psi(B)=0$$

ist. Es gibt also einen Punkt O, der unter allen Punkten, in welchen $\psi(P)=\mu$ ist, am nächsten zu A liegt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Auf der ganzen Strecke AB ist $\psi(P) \leqq \mu$.

b) In den Endpunkten A und B gilt $\psi(A)=\psi(B)=0$.

c) Auf der Strecke AO, einschliesslich A und ausschliesslich O, gilt $\psi(P) < \mu$.

d) Im Punkte O ist $\psi(O) = \mu$.

10. Wir erklären nun eine im xyz-Raume gelegene, über AB liegende Strecke durch die Gleichung

$$z = \zeta(P) + \mu. \qquad \text{XVI.}$$

Unsere weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die relative Lage der Fläche $z = f(x, y)$ zu denjenigen Ebenen, welche diese Strecke enthalten. Um die hier vorliegenden Verhältnisse arithmetisch verfolgen zu können, wollen wir die erwähnten Ebenen durch die Werte eines Parameters λ in geeigneter Weise festlegen. Sei

$$z = z_0(x, y) = a_0 x + b_0 y + c_0 \qquad \text{XVII.}$$

die Gleichung einer *festen* Ebene durch die Strecke XVI. Dann ist also auf der Strecke AB:

$$z_0(P) = \zeta(P) + \mu. \qquad \text{XVIII.}$$

Sei weiter, wenn (x_A, y_A), (x_B, y_B) die Koordinaten von A bzw. B sind,

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{XIX.}$$

Dann ist $T(x, y)$, welche den Flächeninhalt des im Sinne $A, (x, y), B$ umlaufenen Dreieckes $A, (x, y), B$ darstellt, eine lineare Funktion; dieselbe ist bekanntlich in derjenigen, durch die Gerade AB bestimmten Halbebene, die in Bezug auf den Umlaufssinn $A \rightarrow B$ rechts liegt, positiv, in der anderen Halbebene negativ. Auf der Strecke AB ist $T(x, y)$ gleich Null.

Durch die Gleichung

$$z = z_\lambda(x, y) = z_0(x, y) + \lambda \cdot T(x, y), \qquad \text{XX.}$$

wobei der Parameter λ alle endlichen Werte annehmen soll, wird dann bei jedem festen Werte von λ eine der betrachteten Ebenen dargestellt. Wir können der Gleichung XX. auch die Form

$$z = z_\lambda(x, y) = a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda \qquad \text{XX}_1$$

geben, wo a_λ, b_λ, c_λ vom Parameter λ abhängen; da für $\lambda = 0$ die Ebene $z = z_\lambda(x, y)$ mit der oben eingeführten festen Ebene $z = z_0(x, y)$ zusammenfällt, so steht diese Bezeichnungsweise mit XVII. im Einklang.

11. Aus der zu widerlegenden Voraussetzung IX. ziehen wir zunächst den Schluss, dass für die Koeffizienten der Formel XX_1 für alle Werte von λ die Ungleichung

$$(a_\lambda^2 + b_\lambda^2)^{1/2} > \varDelta \qquad \text{XXI.}$$

gilt. Es seien in der Tat (x_A, y_A), (x_B, y_B) die Koordinaten der Punkte A, B. Aus XIII, XVIII, XX_1 folgt dann

$$f(B) + \mu = a_\lambda x_B + b_\lambda y_B + c_\lambda,\ f(A) + \mu = a_\lambda x_A + b_\lambda y_A + c_\lambda,$$
$$f(B) - f(A) = a_\lambda (x_B - x_A) + b_\lambda (y_B - y_A).$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich daraus:

$$|f(B) - f(A)|^2 \leqq (a_\lambda^2 + b_\lambda^2)\,\overline{AB}^2,$$

woraus, mit Rücksicht auf IX, die behauptete Ungleichung XXI. folgt.

12. Wir setzen

$$\delta_\lambda (x, y) = f(x, y) - z_\lambda (x, y). \qquad \text{XXII.}$$

Nach XIV, XVIII—XX. gilt dann für jeden Punkt P der Strecke AB die Beziehung

$$\delta_\lambda (P) = \psi (P) - \mu.$$

Aus No 9 *a)—d)* ergeben sich demnach die folgenden, für alle λ-Werte gültigen Tatsachen.

a) Auf der Strecke AB ist $\delta_\lambda (x, y) \leqq 0$.

b) In den Endpunkten A und B ist $\delta_\lambda (x, y) < 0$.

c) Auf der Strecke AO, mit Einschluss von A und mit Ausschluss von O, ist $\delta_\lambda (x, y) < 0$.

d) Im Punkte O ist $\delta_\lambda (x, y) = 0$.

Aus No 6 folgt weiter, wegen der Ungleichung XXI, dass alle diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, in welchen $\delta_\lambda (x, y) < 0$ ist, ein *einziges* Gebiet bilden. Dieses Gebiet werde mit G_λ bezeichnet. Aus den soeben festgestellten Tatsachen *a)—d)* folgt dann, dass die beiden Punkte A und B *innere* Punkte von G_λ sind und dass der Punkt O *Randpunkt* von G_λ ist, und zwar derjenige Randpunkt auf der Strecke AB, der dem Endpunkte A am nächsten liegt.

Sei nun λ ein beliebiger Parameterwert. Da die beiden Punkte A und B innere Punkte von G_λ sind, so kann man A und B durch einen innerhalb G_λ verlaufenden einfachen Streckenzug Σ verbinden. Man durchlaufe diesen Streckenzug Σ in der Richtung von A nach B; sei B_0 der erste Punkt, in welchem dabei die

Strecke OB getroffen wird. Man durchlaufe jetzt, von diesem Punkte B_0 aus, den Streckenzug Σ in umgekehrter Richtung; sei A_0 der erste Punkt, in welchem dabei die Strecke OA getroffen wird.[6]) Die Punkte A_0, B_0 sind *innere* Punkte von G_λ, sind also vom Punkte O, welcher *Randpunkt* von G_λ ist, verschieden; aus der Konstruktion folgt, dass O zwischen A_0 und B_0 liegt. Sei Σ_* derjenige Teilbogen von Σ, der durch die beiden Punkte A_0, B_0 bestimmt wird. Der Streckenzug Σ_* verbindet dann innerhalb G_λ die Punkte A_0 und B_0, ohne die Strecke A_0B_0 sonst zu treffen.[7]) Die Strecke A_0B_0 und der Streckenzug Σ_* bilden also ein einfaches Polygon Π.

Je nachdem nun das durch Π begrenzte Gebiet, vom Punkte A aus betrachtet, von rechts oder von links an die Strecke AB stösst, wollen wir sagen, dass das Gebiet G_λ rechts bzw. links von der Strecke AB liegt. Den springenden Punkt unseres ganzen Gedankenganges bildet nun die Tatsache, dass *diese Aussage von der besonderen Wahl des Streckenzuges Σ*, von welchem aus wir zum Polygon Π gelangt sind, *unabhängig ist,* dass also diese Aussage tatsächlich etwas Charakteristisches über die gegenseitige Lage des Gebietes G_λ und der Strecke AB enthält.

Um dies zu zeigen, prüfen wir die entgegengesetzte Annahme. Dann gilt also folgendes. Es gibt einen innerhalb G_λ verlaufenden einfachen Streckenzug Σ'_*, der einen Punkt A'_0 der Strecke OA mit einem Punkte B'_0 der Strecke OB verbindet, wobei A'_0, B'_0 innere Punkte von G_λ sind; der Streckenzug Σ'_* bildet mit der Strecke $A'_0B'_0$ ein einfaches Polygon Π'; die durch Π bzw. Π' begrenzten Gebiete stossen von *verschiedenen* Seiten an die Strecke AB. Es werde dann mit A_* derjenige der beiden Punkte A_0, A'_0 bezeichnet, der am nächsten zum Punkte O liegt; ebenso werde mit B_* derjenige der beiden Punkte B_0, B'_0 bezeichnet, der am nächsten zum Punkte O liegt. Die auf diese Weise bestimmten Punkte A_*, B_* können dann sowohl innerhalb Π wie auch innerhalb Π' durch

[6]) Diese Punkte A_0 und B_0 können mit A bzw. B zusammenfallen; im Allgemeinen ist es aber nicht möglich, den Streckenzug Σ so zu wählen, dass derselbe mit der Strecke AB nur die beiden Endpunkte gemein hat.

[7]) Aus der Konstruktion folgt, dass der Streckenzug Σ_* auch mit der ganzen Strecke AB eben nur die Punkte A_0, B_0 gemein hat. Hingegen kann es sein, dass die *Gerade* AB vom Streckenzuge Σ_* noch in weiteren Punkten getroffen wird, die dann auf der Verlängerung der *Strecke* AB liegen.

je einen Kreisbogen $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ verbunden werden. Da nach Voraussetzung die durch Π bzw. Π' begrenzten Gebiete von verschiedenen Seiten an die Strecke AB stossen, so bestimmen $\varkappa$ und $\varkappa'$ ein Kreisbogenzweieck, welches den Punkt O *im Innern* enthält. Im Punkte O ist aber $\delta_\lambda(x, y) = 0$; wegen der Monotonität dieser Funktion folgt daraus sogleich, dass auch am Rande des Kreisbogenzweieckes wenigstens eine Nullstelle Q, von $\delta(x, y)$ liegen muss. Dieser Punkt Q liegt entweder am Kreisbogen $\varkappa$ oder am Kreisbogen $\varkappa'$; es liege etwa der erste Fall vor. Da in den, innerhalb G_λ liegenden, Endpunkten von $\varkappa$ die Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ negativ ist, so liegt Q innerhalb des Polygons Π, liegt aber mit den Punkten A_0, B_0 nicht in einer Geraden. Dann kann aber im Punkte Q, wie aus No 4 sogleich folgt, die Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ nicht verschwinden. In der Tat gilt auf der Strecke A_0B_0, welche Teilstrecke von AB ist, wegen No 12 *a)* die Ungleichung $\delta_\lambda(x, y) \leq 0$; am Streckenzuge Σ_*, der einschliesslich Endpunkte in G_λ liegt, ist $\delta_\lambda(x, y) < 0$. Aus diesem Sachverhalte folgt aber nach No 4, dass in jedem innerhalb Π liegenden Punkte, der mit den Punkten A_0, B_0 nicht auf einer Geraden liegt, insbesondere also im Punkte Q, $\delta_\lambda(x, y) < 0$ gilt, während doch Q eine Nullstelle von $\delta_\lambda(x, y)$ ist.

Dieser Widerspruch beweist die Eindeutigkeit der obigen Aussage über die relative Lage des Gebietes G_λ zur Strecke AB.

13. Wir zeigen nun erstens: *wenn für einen gewissen Parameterwert ν das entsprechende Gebiet G_ν etwa rechts von der Strecke AB liegt, so trifft dasselbe für alle Parameterwerte λ zu, für welche $|\lambda - \nu|$ hinreichend klein ist.*

Die Annahme über ν bedeutet nämlich folgendes: man kann einen Streckenzug Σ_* angeben, der einen Punkt B_0 der Strecke OB mit einem Punkte A_0 der Strecke OA verbindet, so dass Σ_* einschliesslich Endpunkte im Gebiete G_ν verläuft, ohne die Strecke A_0B_0 sonst zu treffen; dabei stösst das durch Σ_* und die Strecke A_0B_0 begrenzte Polygongebiet von rechts an die Strecke AB. Unsere Behauptung wird erwiesen sein, sobald wir zeigen können, dass für solche λ-Werte, die wenig von ν abweichen, die entsprechende Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ am Streckenzuge Σ_* negativ ist; da nämlich das Gebiet G_λ alle Punkte, wo $\delta_\lambda(x, y) < 0$ ist, enthält, so wird dann der Streckenzug Σ_* gewiss im Innern von G_λ verlaufen.

Da nun am Streckenzuge Σ_* die Funktion $\delta_\nu(x, y)$ nach Voraussetzung negativ ist, und da diese Funktion stetig ist, so kann man eine positive Zahl ε derart bestimmen, dass auf Σ_* die Ungleichung $\delta_\nu(x,y) < -\varepsilon$ besteht. Ist dann λ ein beliebiger Parameterwert, so ist nach XX, XXII:

$$\delta_\lambda(x,y) = \delta_\nu(x,y) - (\lambda - \nu)\, T(x,y).$$

Wenn also τ das Maximum von $|T(x,y)|$ auf Σ_* bedeutet, so ist auf Σ_*

$$\delta_\lambda(x,y) < -\varepsilon + |\lambda - \nu|\, \tau.$$

Sobald also die Ungleichung

$$|\lambda - \nu| < \frac{\varepsilon}{2\tau} \qquad \text{XXIII.}$$

erfüllt ist, ist auf Σ_* auch die Funktion $\delta_\lambda(x,y)$ negativ, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

14. Wir wollen zweitens zeigen, dass *man durch geeignete Wahl von λ das Gebiet G_λ auf eine beliebige Seite der Strecke AB bringen kann.*

Sei Σ_* ein Streckenzug, der die Punkte A, B innerhalb der Randkurve C verbindet, ohne die Gerade AB sonst zu treffen; es möge dabei Σ_* in derjenigen durch die Gerade AB bestimmten Halbebene liegen, die in Bezug auf den Umlaufssinn $A \to B$ nach rechts liegt. Da $f(x,y)$ sowie auch die durch XVII. eingeführte Funktion $z_0(x,y)$ stetig sind, so kann man auf Σ_*, mit Rücksicht auf XIII. und XVIII, in der Nähe von B bzw. A einen Punkt B' bzw. A' so fixieren, dass auf den Teilbögen BB' bzw. AA' von Σ_* die Ungleichungen

$$z_0(x,y) > f(B) + \frac{\mu}{2}, \quad f(x,y) < f(B) + \frac{\mu}{4}, \qquad \text{XXIV.}$$

bzw.

$$z_0(x,y) > f(A) + \frac{\mu}{2}, \quad f(x,y) < f(A) + \frac{\mu}{4} \qquad \text{XXV.}$$

bestehen. Die durch XIX. erklärte Funktion $T(x,y)$ ist jetzt auf Σ_* stets $\geqq 0$; wenn also

$$\lambda > 0 \qquad \text{XXVI.}$$

ist, so ist auf den Bögen BB', AA' mit Rücksicht auf XX, XXII, XXIV—XXVI:

$$\delta_\lambda(x,y) < -\frac{\mu}{4} < 0.$$

Am Bogen $A'B'$ ist $T(x,y)$, einschliesslich Endpunkte, positiv, sie hat also auf diesem Bogen ein positives Minimum m. Die Funktionen $z_0(x, y), f(x, y)$ sind stetig, bleiben also auf diesem Bogen absolut kleiner als eine gewisse endliche Zahl M. Auf dem Bogen $A'B'$ gilt also, wegen XXVI,

$$\delta_\lambda(x, y) < 2M - \lambda m.$$

Wird also

$$\lambda > \frac{2M}{m} \qquad \text{XXVII.}$$

gewählt, so wird am ganzen Streckenzuge Σ_*, einschliesslich Endpunkte, $\delta_\lambda(x, y)$ negativ ausfallen, das entsprechende Gebiet G_λ liegt dann also rechts von der Strecke AB. Genau so wird gezeigt: wenn λ negativ und $|\lambda|$ hinreichend gross ist, so liegt das Gebiet G_λ links von der Strecke AB.

15. Die verschiedenen Aussagen über die relative Lage des Gebietes G_λ zur Strecke AB, die wir in No 12—14 aus der zu widerlegenden Ungleichung IX. gefolgert haben, stehen nun miteinander im Widerspruche, was man etwa wie folgt erkennt.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen λ-Werte und erklären zwei Teilmengen $\mathfrak{M}^+$ bzw. $\mathfrak{M}^-$ durch die folgende Vorschrift. Der Parameterwert λ soll $\mathfrak{M}^+$ oder $\mathfrak{M}^-$ angehören, je nachdem das Gebiet G_λ rechts oder links von der Strecke AB liegt. Nach No 12 gehört dann jeder λ-Wert *einer und nur einer* dieser beiden Mengen an. Nach No 13 sind $\mathfrak{M}^+$ und $\mathfrak{M}^-$ *offene* Mengen, nach No 14 ist *keine* dieser beiden Mengen *leer*. Ein derartiger Sachverhalt kann aber nicht bestehen. Denn $\mathfrak{M}$ ist eine offene zusammenhängende lineare Menge, also ist es nicht möglich, dieselbe in zwei offene, nicht leere, elementenfremde Teilmengen zu zerlegen.

Dieser Widerspruch zeigt die Unzulässigkeit der Annahme IX; es muss hiernach für irgend zwei Punkte A, B innerhalb der Randkurve C die Ungleichung

$$\frac{|f(B) - f(A)|}{\overline{AB}} \leqq \Delta$$

bestehen, womit der Hilfssatz über die Sattelfunktionen bewiesen ist.

§ 2.

Anwendung auf reguläre zweidimensionale Variationsprobleme.

16. Sei $\Phi(p, q)$ eine für alle Werte von p, q erklärte, etwa analytische Funktion ihrer Argumente, für die überdies identisch in p, q die Ungleichungen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq} - \Phi^2_{pq} > 0, \quad \Phi_{pp} > 0 \qquad \text{XXVIII.}$$

erfüllt sind.

Ist dann $f(x, y)$ eine innerhalb und auf der Randkurve C stetige, einer LIPSCHITZschen Bedingung genügende Funktion, so existieren fast überall innerhalb C die partiellen Ableitungen f_x und f_y und sie sind beschränkte messbare Funktionen. Wir können hiernach das Integral

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy \qquad \text{XXIX.}$$

bilden. Wir beweisen dann zunächst den folgenden

Satz. *Wenn $f(x, y)$ keine Sattelfunktion ist, so kann man eine in und auf C stetige Funktion $f^*(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften finden.*

a) Auf C gilt $f = f^*$.

b) f^* genügt einer LIPSCHITZschen Bedingung, und zwar ist ihre LIPSCHITZkonstante $L[f^*]$ nicht grösser als die LIPSCHITZkonstante $L[f]$ von f.

c) Es besteht die Ungleichung

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f^*_x, f^*_y)\, dx\, dy < \iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy.$$

Wenn $\Phi(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ und $f(x, y)$ hinreichend regulär ist, so drückt der Satz eine anschaulich evidente Tatsache über den Flächeninhalt krummer Flächen aus.

17. Wir nehmen also an, dass f *keine* Sattelfunktion ist. Dann gibt es also drei Konstanten a_0, b_0, c_0 und ein innerhalb C liegendes Gebiet G_0, so dass die Funktion

$$\delta_0(x, y) = f(x, y) - a_0 x - b_0 y - c_0$$

in allen Randpunkten von G_0 etwa nicht grösser als eine Konstante M ist, während es einen inneren Punkt (x_0, y_0) von G_0 gibt, wo $\delta_0(x_0, y_0) > M$ ist. Es ist also

$$\delta_0(x_0, y_0) = M + \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

Wir bilden dann die Funktion

$$\delta(x, y) = \delta_0(x, y) - M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Im Punkte (x_0, y_0) ist dann $\delta(x, y)$ positiv. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Punkte im Innern von G_0, wo $\delta(x, y) > 0$ ist. Dann ist also $\mathfrak{M}$ eine nicht leere offene Punktmenge; wir wollen zeigen, dass $\delta(x, y)$ in allen Randpunkten von $\mathfrak{M}$ verschwindet. Ist nämlich R ein solcher Randpunkt, so ist, da auf $\mathfrak{M}$ selbst $\delta(x, y) > 0$ ist, in diesem Punkte $\delta(x, y) \geqq 0$. Da in allen Randpunkten von G_0 die Ungleichung $\delta(x, y) \leqq M - M - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ gilt, so sind also alle Randpunkte von $\mathfrak{M}$ innere Punkte des Gebietes G_0. Ist aber R innerer Punkt von G_0 und Randpunkt von $\mathfrak{M}$, so ist im Punkte R zunächst $\delta(x, y) \geqq 0$; es muss aber das Gleichheitszeichen gelten, da sonst R, gegen die Voraussetzung, innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ wäre. Wenn wir noch $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0 + M + \frac{\varepsilon}{2}$ setzen, so können wir also zusammenfassend sagen:

Da $f(x, y)$ keine Sattelfunktion ist, so gibt es drei Konstanten a, b, c und eine nicht leere offene Punktmenge $\mathfrak{M}$ innerhalb der Randkurve C, so dass die Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c \qquad \text{XXX.}$$

auf der Menge $\mathfrak{M}$ von Null verschieden, also etwa positiv ist und in allen Randpunkten von $\mathfrak{M}$ verschwindet.

Auf diese Tatsache wollen wir unsere weiteren Schlüsse gründen.

18. Mit $\mathfrak{M}'$ werde die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den abgeschlossenen, durch die Randkurve C begrenzten Bereich bezeichnet; $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ sind dann beide messbare Punktmengen. Wir erklären nun eine Funktion $f^*(x, y)$ durch die Vorschrift:

$$\begin{aligned} f^* &= f \text{ auf der Menge } \mathfrak{M}', \\ f^* &= ax + by + c \text{ auf der Menge } \mathfrak{M}, \end{aligned} \qquad \text{XXXI.}$$

und behaupten, dass diese Funktion alle Forderungen des Satzes in No 16 erfüllt.

Für die Forderung *a)* ist dies evident, da die Punkte der Randkurve C in $\mathfrak{M}'$ enthalten sind; in $\mathfrak{M}$ können sie nämlich deswegen nicht enthalten sein, weil nach Definition alle Punkte von $\mathfrak{M}$ innerhalb C liegen. Wir wollen weiter *b)* verifizieren und zeigen zunächst, dass f^* in allen Punkten in und auf C *stetig* ist. Für solche Punkte, die innere oder äussere Punkte für die offene Punktmenge $\mathfrak{M}$ sind, ist dies auf Grund der Definitionsformeln XXXI. evident. Sei also (x_0, y_0) ein Randpunkt von $\mathfrak{M}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\delta(x_0, y_0) = 0 = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0 - c,$$

also, mit Rücksicht auf XXXI,

$$f^*(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c = f(x_0, y_0). \qquad \text{XXXII.}$$

Da sowohl $f(x, y)$ wie auch $ax + by + c$ stetig sind, so kann man eine Umgebung, oder falls (x_0, y_0) auf C liegt, eine Halbumgebung, von (x_0, y_0) abgrenzen, in welcher

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \ |ax + by + c - (ax_0 + by_0 + c)| < \varepsilon$$

gilt, oder mit Rücksicht auf XXXII.

$$|f(x, y) - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon, \ |ax + by + c - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist. Da nun $f^*(x, y)$ entweder gleich $f(x, y)$ oder gleich $ax + by + c$ ist, so gilt für alle Punkte der betrachteten Umgebung

$$|f^*(x, y) - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von f^* erwiesen ist.

Wir zeigen nun, dass für irgend zwei Punkte A, B innerhalb C die Ungleichung

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq L[f] \qquad \text{XXXIII.}$$

erfüllt ist, wo $L[f]$ die Lipschitzkonstante von f bedeutet, und unterscheiden dabei die folgenden Fälle:

α) A und B liegen beide in $\mathfrak{M}'$.

β) A und B liegen beide in $\mathfrak{M}$.

γ) A liegt in $\mathfrak{M}$, B liegt in $\mathfrak{M}'$ und ist Randpunkt von $\mathfrak{M}$.

δ) A liegt in $\mathfrak{M}$, B liegt in $\mathfrak{M}'$, ohne aber Randpunkt von $\mathfrak{M}$ zu sein.

Im Falle *α*) ist XXXIII. mit Rücksicht auf XXXI. evident. Wir betrachten den Fall *β*). Man durchlaufe die Gerade AB, vom Punkte A aus, in der Richtung von A nach B; sei B' der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, auf welchen man dabei stösst. Man durchlaufe dann die Gerade AB, vom Punkte B aus, in der Richtung von B nach A; sei A' der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, den man dabei trifft. Da A', B' Punkte der Komplementärmenge $\mathfrak{M}'$ und gleichzeitig Randpunkte von $\mathfrak{M}$ sind, so gilt

$$\left.\begin{aligned} f^*(B') &= ax_{B'} + by_{B'} + c = f(B'), \\ f^*(A') &= ax_{A'} + by_{A'} + c = f(A'); \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXXIV.}$$

da ferner A, B Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, so gilt

$$f^*(A) = ax_A + by_A + c, \quad f^*(B) = ax_B + by_B + c;$$

dabei sind $(x_A, y_A), (x_{A'}, y_{A'}), \ldots$ die Koordinaten der Punkte $A, A', \ldots$ Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{f^*(B) - f^*(A)}{\overline{AB}} &= a\,\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}} + b\,\frac{y_B - y_A}{\overline{AB}}, \\ \frac{f^*(B') - f^*(A')}{\overline{A'B'}} &= a\,\frac{x_{B'} - x_{A'}}{\overline{A'B'}} + b\,\frac{y_{B'} - y_{A'}}{\overline{A'B'}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXXV.}$$

Da aber die vier Punkte A', A, B, B' in eben dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, so ist

$$\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}} = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{\overline{A'B'}}, \quad \frac{y_B - y_A}{\overline{AB}} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{\overline{A'B'}},$$

also folgt aus XXXV, XXXIV,

$$\frac{f^*(B) - f^*(A)}{\overline{AB}} = \frac{f^*(B') - f^*(A')}{\overline{A'B'}} = \frac{f(B') - f(A')}{\overline{A'B'}},$$

folglich

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} = \frac{|f(B') - f(A')|}{\overline{A'B'}} \leqq L[f],$$

womit der Fall β) erledigt ist. Um γ) auf β) zurückzuführen, sei B_n eine Punktfolge in $\mathfrak{M}$, die gegen den Randpunkt B konvergiert. Dann gilt nach β) für jeden Wert von n:

$$\frac{|f^*(B_n) - f^*(A)|}{\overline{AB_n}} \leqq L[f],$$

woraus, mit Rücksicht auf die bereits festgestellte Stetigkeit von f^*, durch Grenzübergang

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq L[f]$$

folgt. Um schliesslich δ) auf α) und γ) zurückzuführen sei R der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, den man beim Durchlaufen der Strecke

AB in der Richtung von A nach B trifft. Dann gilt nach α) bzw. γ):

$$\frac{|f^*(B)-f^*(R)|}{\overline{BR}} \leqq L[f], \quad \frac{|f^*(A)-f^*(R)|}{\overline{AR}} \leqq L[f],$$

also

$$\frac{|f^*(B)-f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq$$

$$\leqq \frac{|f^*(B)-f^*(R)|+|f^*(A)-f^*(R)|}{\overline{AB}} \leqq L[f] \frac{\overline{BR}+\overline{AR}}{\overline{AB}} = L[f].$$

Damit ist der Nachweis geliefert, dass f^* der Forderung *b)* des Satzes in No 16 genügt.

19. Wir wenden uns nun der Forderung *c)* dieses Satzes zu und zeigen zunächst: es gelten die Gleichungen

$$f^*_x = f_x, \quad f^*_y = f_y \quad \textit{fast überall auf } \mathfrak{M}'.\text{[8]} \qquad \text{XXXVI.}$$

Zu dem Ende bemerken wir, dass die Funktionen f und f^*, da sie einer LIPSCHITZbedingung genügen, nach einem wichtigen Satze von Herrn RADEMACHER innerhalb der Randkurve C fast überall *total differenzierbar* sind.[9]) Wir lassen erstens alle solche Punkte von $\mathfrak{M}'$ fort, wo dies nicht der Fall ist. Weiter bemerken wir, dass die messbare Punktmenge $\mathfrak{M}'$ in fast allen ihrer Punkte die *Dichte* 1 hat; wir lassen zweitens alle die Punkte von $\mathfrak{M}'$ fort, wo dies nicht der Fall ist. Dann haben wir also eine Nullmenge fortgelassen; man kann nun leicht zeigen, dass in allen übrigen Punkten von $\mathfrak{M}'$ die Beziehungen XXXVI. gelten.

Sei (x_0, y_0) ein solcher Punkt. Infolge der totalen Differenzierbarkeit gelten dann Darstellungen der Form

$$\left.\begin{aligned} & f(x,y) = \\ & = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ & \quad + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\, S(x,y), \\ & f^*(x,y) = \\ & = f^*(x_0,y_0) + f^*_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f^*_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ & \quad + [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\, S^*(x,y), \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXXVII.}$$

---

[8]) Wenn f und f^* hinreichend regulär wären, so würde die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar aus der geometrischen Anschauung folgen. Denn diejenigen gemeinsamen Punkte zweier Flächen, wo die beiden Flächen einander nicht berühren, bilden Kurvenzüge, also bilden die Projektionen dieser Punkte eine zweidimensionale Nullmenge.

[9]) H. RADEMACHER, Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln (*Math. Annalen* Bd. 79, 1919, S. 340–359).

wo für $x \to x_0$, $y \to y_0$ sowohl $S(x,y)$ wie auch $S^*(x,y)$ gegen Null streben. Wir führen durch

$$x = x_0 + \varrho \cos\theta,\ y = y_0 + \varrho \sin\theta$$

Polarkoordinaten ein, und betrachten einen festen Wert θ'. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Da $\mathfrak{M}'$ im Punkte (x_0, y_0) die Dichte 1 hat, so gibt es im Winkelraume

$$\theta' - \varepsilon \leqq \theta \leqq \theta' + \varepsilon$$

gewiss eine gegen (x_0, y_0) konvergierende Punktfolge (x_n, y_n), deren Punkte in $\mathfrak{M}'$ enthalten sind. Sei

$$x_n = x_0 + \varrho_n \cos\theta_n,\ y_n = y_0 + \varrho_n \sin\theta_n.$$

Dann gilt $\varrho_n \to 0$; wir können auch durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge erreichen, dass die Folge θ_n konvergiert; sei $\lim \theta_n = \theta_\epsilon$. Dann gilt auch

$$\theta' - \varepsilon \leqq \theta_\epsilon \leqq \theta' + \varepsilon.$$

Da auf $\mathfrak{M}'$ die Gleichung $f = f^*$ gilt, so erhalten wir aus XXXVII. durch Subtraktion und Division durch ϱ_n:

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)]\cos\theta_n + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)]\sin\theta_n + \\ + S(x_n, y_n) - S^*(x_n, y_n) = 0,$$

und daraus, da für $n \to \infty$ sowohl $S(x_n, y_n)$ wie auch $S^*(x_n, y_n)$ gegen Null gehen,

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)]\cos\theta_\epsilon + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)]\sin\theta_\epsilon = 0.$$

Lassen wir nun ε gegen Null gehen, so konvergiert θ_ϵ gegen θ'; es folgt also weiter

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)]\cos\theta' + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)]\sin\theta' = 0.$$

Da hier θ' beliebig ist, so folgt daraus

$$f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0) = 0,$$

was wir zeigen wollten.

20. Aus XXXVI. folgt zunächst

$$\iint_{\mathfrak{M}'} \Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy = \iint_{\mathfrak{M}'} \Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy. \qquad \text{XXXVIII.}$$

Da $f - f^*$ auf der Randkurve C verschwindet, so folgt ferner durch erlaubte partielle Integration

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{(C)}(f_x-f_x^*)\,dx\,dy &= \int\limits_{C}(f-f^*)\,dy=0,\\ \iint\limits_{(C)}(f_y-f_y^*)\,dx\,dy &= -\int\limits_{C}(f-f^*)\,dx=0.\end{aligned}\right\}\quad \text{XXXIX.}$$

Aus XXXVI, XXXIX. ergibt sich weiter

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}}(f_x-f_x^*)\,dx\,dy=\iint\limits_{(C)}-\iint\limits_{\mathfrak{M}'}=0,\qquad \text{XL.}$$

und ebenso

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}}(f_y-f_y^*)\,dx\,dy=0.\qquad \text{XLI.}$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x^*,f_y^*)\,dx\,dy<\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x,f_y)\,dx\,dy.\qquad \text{XLII.}$$

Nach der Taylorschen Formel gilt für beliebige Werte von p, q, p^*, q^* die Entwicklung

$$\begin{aligned}\Phi(p,q)=\Phi(p^*,q^*)+\Phi_p(p^*,q^*)(p-p^*)+\Phi_q(p^*,q^*)(q-q^*)+\\ +\frac{1}{2}R(p,q,p^*,q^*),\end{aligned}\qquad \text{XLIII.}$$

wo R analytisch in Bezug auf ihre Argumente ist; ausserdem gilt eine Darstellung

$$\begin{aligned}R=\Phi_{pp}(\bar p,\bar q)(p-p^*)^2+2\Phi_{pq}(\bar p,\bar q)(p-p^*)(q-q^*)+\\ +\Phi_{qq}(\bar p,\bar q)(q-q^*)^2,\end{aligned}\qquad \text{XLIV.}$$

wo $\bar p$ bzw. $\bar q$ gewisse Zwischenwerte zwischen p und p^* bzw. q und q^* sind. Wir setzen in XLIII.

$$p=f_x,\ q=f_y,\ p^*=f_x^*,\ q^*=f_y^*,$$

und integrieren auf der Menge $\mathfrak{M}$. Wegen XXXI. sind f_x^* und f_y^* auf $\mathfrak{M}$ konstant; wir erhalten also mit Rücksicht auf XL, XLI,

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x,f_y)\,dx\,dy=\\ &=\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x^*,f_y^*)\,dx\,dy+\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{M}}R(f_x,f_y,f_x^*,f_y^*)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

und XLII. wird also erwiesen sein, sobald wir zeigen können, dass

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}}R(f_x,f_y,f_x^*,f_y^*)\,dx\,dy>0\qquad \text{XLV.}$$

ist. An dieser Stelle greifen nun die über Φ getroffenen Annahmen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq}-\Phi_{pq}^2>0,\ \Phi_{pp}>0$$

ein. Aus denselben folgt zunächst, mit Rücksicht auf XLIV, dass stets $R\geqq 0$ ist. Die linke Seite von XLV. ist also gewiss $\geqq 0$, und könnte nur dann gleich Null sein, wenn auf $\mathfrak{M}$ fast überall die Gleichung

$$R(f_x, f_y, f_x^*, f_y^*)=0$$

bestehen würde. Daraus würde, nach XXVIII. und XLIV. folgen, dass in $\mathfrak{M}$ fast überall die Beziehungen

$$f_x=f_x^*,\ f_y=f_y^*$$

gelten, dass also im $\mathfrak{M}$ die Differenz $f-f^*$ konstant ist. Nun ist aber in $\mathfrak{M}$, nach XXXI, XXX.:

$$f(x,y)-f^*(x,y)=\delta(x,y).$$

Es wäre also $\delta(x,y)$ im $\mathfrak{M}$ konstant, was aber dem Umstande widerspricht, dass $\delta(x,y)$ innerhalb $\mathfrak{M}$ von Null verschieden ist und am ganzen Rande von $\mathfrak{M}$ verschwindet. Damit ist XLV, mithin auch XLII. erwiesen.

Nun haben wir

$$\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy+\iint\limits_{\mathfrak{M}'}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy,$$

also nach XXXVIII, XLII.:

$$\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy<\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy+\iint\limits_{\mathfrak{M}'}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy,$$

und damit ist gezeigt, dass die Funktion f^* auch der letzten Forderung *c)* das Satzes in No 16 genügt; dieser Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

21. Hauptsatz. *Auf der Randkurve C sei eine Randwertfolge vorgeschrieben, welche einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügt.*

Sei $\Phi(p,q)$ eine für alle reelle Werte von p, q erklärte, etwa analytische Funktion, welche überall die Ungleichungen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq}-\Phi_{pq}^2>0,\ \Phi_{pp}>0$$

erfüllt; das Variationsproblem

$$\iint \Phi(p,q)\,dx\,dy = \text{minimum}$$

sei also regulär.

Sei schliesslich $f(x,y)$ eine in und auf C stetige Funktion, welche unter allen Funktionen, die auf C die vorgeschriebenen Randwerte annehmen und innerhalb C einer Lipschitz*bedingung genügen, dem über das Innere von C erstreckten Integrale*

$$\iint \Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy$$

einen möglichst kleinen Wert erteilt.

Dann gilt für diese Extremalfunktion, wenn (x_2, y_2), (x_1, y_1) irgend zwei Punkte innerhalb C sind, die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}} \leqq \Delta.$$

Mit anderen Worten: für die Lipschitz*konstante der Extremalfunktion gibt es eine Schranke, die nur von den vorgeschriebenen Randwerten abhängt, also a priori angegeben werden kann, sobald diese Randwerte bekannt sind.*

Zusatz. *Der Satz bleibt bestehen, wenn die Extremaleigenschaft von $f(x,y)$ nur in Bezug auf solche Konkurrenzfunktionen vorausgesetzt wird, deren* Lipschitz*konstanten eine willkürlich vorgegebene positive Zahl L nicht übertreffen.*[10])

Es genügt den Zusatz zu beweisen, da der Hauptsatz offenbar in demselben enthalten ist. Man bemerkt zunächst, dass mit Rücksicht auf den Satz von No 16 die Extremalfunktion eine Sattelfunktion sein muss. Sonst könnte man nach dem erwähnten Satze eine Funktion $f^*(x,y)$ finden, welche auf der Randkurve C die vorgeschriebenen Werte annimmt, die wegen ihrer im erwähnten Satze mit *b)* bezeichneten Eigenschaft eine Lipschitzkonstante $L[f^*]$ besitzt, welche nicht grösser als $L[f]$, also a fortiori nicht grösser als L ist; diese Eigenschaften haben zur Folge, dass $f^*(x,y)$ in derjenigen Konkurrenz enthalten ist, in Bezug auf welche die Extremaleigenschaft von $f(x,y)$ postuliert wurde. Die in No 16 mit *c)* bezeichnete Eigenschaft von $f^*(x,y)$, dass nämlich

---

10) Es wird natürlich vorausgesetzt, dass $f(x,y)$ selbst in dieser Konkurrenz enthalten ist, dass also $L[f] \leqq L$ gilt.

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy < \iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy$$

ist, stellt also einen Widerspruch dar; es muss also die Extremalfunktion $f(x, y)$ eine Sattelfunktion sein. Dann aber ist, da die Randwerte von f nach Voraussetzung einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen, die behauptete Ungleichung $L[f] \leqq \Delta$ eine unmittelbare Folge des in § 1 bewiesenen Satzes über Sattelfunktionen.

Szeged, den 25. Februar 1926.

Bibliographie.

Sonderausgaben aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. (Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin).

Der Verlag der Encyklopädie hat sich erfreulicherweise entschlossen, aus einzelnen Artikeln, welche mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Hauptrichtungen der mathematischen Forschung ein besonderes Interesse besitzen, Sonderausgaben zu veranstalten, um die betreffenden Artikel möglichst weiten Kreisen unmittelbar zugänglich zu machen. Bisher sind folgende Sonderausgaben erschienen:

E. Hilb und **M. Riesz, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen.** 40 Seiten (Unter nachträglicher Berücksichtigung einzelner späterer Arbeiten abgeschlossen am 24. Juli 1922).

L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. 58 Seiten (Abgeschlossen im März 1924).

Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Nach den Referaten von **L. Zoretti, P. Montel** und **M. Fréchet** bearbeitet von **A. Rosenthal.** 350 Seiten (Abgeschlossen im Juli 1923).

Max Simon: Nichteuklidische Geometrie in elementarer Darstellung. Bearbeitet und herausgegeben von *Kuno Fladt* (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Nr. 10), XVIII + 115 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Das vorliegende Buch gibt im wesentlichen die Vorlesungen von Max Simon wieder. Die Absicht des Verfassers und des Bearbeiters ist die nichteuklidische Geometrie auf elementare Weise zu behandeln, besonders Rechnung tragend von deren historischen Entwicklung. Die starke Betonung des historischen Gesichtspunktes ist manchmal störend für den systematischen Aufbau der Theorie; manches wird nur beiläufig vom Herausgeber eingefügt, was systematisch und didaktisch den Kern der Betrachtung bilden sollte.

Der Inhalt gliedert sich folgendermassen: im ersten Abschnitt wird die Rolle des Parallelenaxioms in der Geometrie, im zweiten die nichteuklidische Elementargeometrie, im dritten die Trigonometrie, im vierten die Stereometrie behandelt. Die hyperbolische Geometrie wird überall der elliptischen vorgezogen und kein Gewicht wird darauf gelegt, die drei Geometrien in einheitlicher Darstellung zu entwickeln.

Das Buch ist leicht lesbar und wird sich für Studenten, die einen ersten Begriff von nichteuklidischer Geometrie erhalten wollen, als nützlich erweisen.

B. v. Kerékjártó.

E. Netto, Die Determinanten (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher No. 9), zweite verbesserte Auflage von *L. Bieberbach* VI + 122 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Herr Bieberbach unternahm die mühevolle aber dankbare Aufgabe die zweite Auflage von Nettos Determinanten für den Druck fertig zu stellen. Das Werk Nettos gehört zu denjenigen Lehrbüchern, die das Ziel des Verfassers in vorzüglicher Weise verwirklichen. Ein Lehrbuch der Determinantentheorie kann entweder die grossen Gesichtspunkte und die allgemeinen Theorien dieser Disziplin und ihrer Anwendungen entwickeln (diese Aufgabe ist in meisterhafter Weise in dem Lehrbuche Kowalewskis gelöst), oder aber die Handhabung dieses so wichtigen Hilfsmittels der gesamten Mathematik darlegen. Das letztere war das Ziel Nettos und er erreichte es durch die elementare — aber stets strenge — Begründung des Begriffes der Determinanten und der damit zusammenhängenden Rechnungsregeln, die durch zahlreiche Beispiele illustriert sind. Dabei gelangt er mit derselben Methode auch zu den Hauptanwendungen der Determinanten auf die Theorie der linearen Gleichungen und Substitutionen, auf die Resultanten und Diskriminanten. Die geometrischen Anwendungen, die im Kap. X. behandelt sind, sind geeignet den Leser von der Nutzbarkeit des Determinantenbegriffes zu überzeugen. Da ausserdem alle wesentlichen Gesichtspunkte, die in einem elementaren Lehrbuch entwickelbar sind, zur Sprache gelangen (Rang, Matrix, symmetrische Determinanten etc.), so kann das vorliegende Werk insbesondere den Studierenden, aber auch zum Selbstunterricht in höchstem Masse empfohlen werden.

A. H.

R. Strohal, Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung. (Wissenschaft und Hypothese XXVII), 137 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Das vorliegende Büchlein stellt als Aufgabe, die psychologische Vorgeschichte der letzten Grundsätze der Geometrie zu untersuchen. Nach einer einleitenden Betrachtung über die philosophische Bedeutung der Definition werden die für die Geometrie grundlegenden Elementarbegriffe nach Lobatschefskij in dem „Körper“ und in der „Berührung“ gefunden. Nach Lobatschefskij werden die Begriffe von Reihen- und Wendeschnitten eingeführt und mit deren Hilfe Fläche und Linie definiert. Durch den Begriff der Kongruenz werden ebenfalls nach Lobatschefskij Ebene und Gerade definiert. Es folgen manche aus erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte her interessanten Betrachtungen über Axiome, synthetische Definitionen und Postulate. Das Buch hat vor allem Interesse für Philosophen; die Mathematiker werden gegen das Buch vor allem einwenden, dass die vorliegende an Lobatschefskij anknüpfende Betrachtung vom Gesichtspunkte der modernen Mathematik nicht zweckmässig ist, da sie nicht imstande ist die n-dimensionale Geometrie zu begründen. Es wäre daher noch interessant, die Liesche gruppentheoretische Begründung der psychologischen Behandlung zu unterziehen.

B. v. Kerékjártó.

A. Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über **Geometrische Funktionentheorie** von **R. Courant** (Grundlehren der math. Wissenschaften III), XII + 496 S., zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage, Berlin, J. Springer, 1925.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine wesentliche Umgestaltung des von Herrn Courant herrührenden Abschnittes über geometrische Funktionentheorie; die beiden ersten Abschnitte (Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und elliptische Funktionen) sind ohne erheblichere Änderungen beibehalten worden. Es wird daher genügen, den Abschnitt über geometrische Funktionentheorie in aller Kürze zu besprechen.

Dieser Abschnitt gliedert sich in 9 Kapitel (I. Vorbereitende Bemerkungen. II. Die Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen. III. Weitere Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel. IV. Spezielle Funktionen und ihre Singularitäten. V. Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen. VI. Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Bereiche. VII. Spezielle Abbildungsfunktionen. VIII. Die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes. Das Dirichletsche Prinzip. IX. Weitere Existenztheoreme der Funktionentheorie). — In diesen neun Kapiteln ist so ziemlich alles behandelt oder doch wenigstens gestreift, was für die Riemannsche Funktionentheorie, im weitesten Sinne, an Ideen und Problemen charakteristisch ist. Die Darstellung ist dabei so gehalten, dass der Leser auf die beiden ersten, die Weierstrasssche Funktionentheorie behandelnden Abschnitte des Buches nur zwecks Vergleichung der Methoden gelegentlich verwiesen wird; im Grunde bildet dieser Abschnitt über geometrische Funktionentheorie ein selbständiges Buch.

In Anbetracht der Fülle des Stoffes ist es selbstverständlich, dass die Darstellung nicht erschöpfend sein kann, und dass Herr Courant den Leser bei mancher Gelegenheit auf Spezialwerke verweisen muss In dieser Beziehung wird man indessen vielleicht bedauern, dass Herr Courant auch die grundlegenden Weylschen Entwicklungen über Riemannsche Flächen zur Spezialliteratur gerechnet hat. Es fällt ferner auf, gerade wegen der Überschrift „geometrische Funktionentheorie“ des betrachteten dritten Abschnittes, dass im Kapitel über das alternierende Verfahren der Carathéodorysche Verschmelzungssatz nicht erwähnt wird. Dieser Satz hat den Ausgangspunkt einer funktionentheoretischen Richtung gebildet (Bieberbach, Carathéodory, Koebe), welche die Bezeichnung *geometrisch* eher verdienen dürfte als diejenige, vorwiegend an physikalische Vorstellungen anknüpfende, welche durch das Buch von Herrn Courant vertreten wird. Die erwähnte funktionentheoretische Richtung verfolgt übrigens gerade den Hauptzweck, die Problemstellungen der RIEMANNschen Funktionentheorie in die WEIERSTRASSsche Funktionentheorie einzuordnen, also, anschaulich gesprochen, den dritten Abschnitt des vorliegenden Buches mit den beiden ersten Abschnitten desselben in Einklang zu bringen. Es wäre vielleicht am Platze gewesen, den Leser auch über diese Bestrebungen zu orientieren.

Jedenfalls ist es sicher, dass die für das vorliegende Werk charakteristische Gegenüberstellung der beiden Hauptrichtungen der Funktionentheorie einen hohen paedagogischen Wert besitzt. Als Lehrbuch wird das Werk gewiss vorzügliche Dienste leisten.

Tibor Radó.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II (Grundlehren der math. Wissenschaften XV), XI + 302 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Wenige Wochen vor seinem Tode ward es FELIX KLEIN noch vergönnt, seine Vorlesungen über Geometrie neu herauszugeben und damit ein letztes Geschenk den Fachgenossen zu übermitteln. Mathematik und Mathematiker betrauern den Verlust des grossen Meisters der Geometrie, der nicht nur durch seine umfassende Entdeckungen, die in alle Gebiete der Geometrie eindringen, sondern auch durch seine meisterhaften Vorlesungen diesen Zweig der Mathematik neu aufblühen liess.

Die grosse Mannigfaltigkeit des behandelten Stoffes, die klare Hervorhebung der leitenden Ideen, die Berücksichtigung der historischen Momente charakterisieren auch diese Vorlesung, wie alle andern von FELIX KLEIN. Zumal handelt es sich in dem vorliegenden Buche zumeist um Probleme, die zu seiner innigsten Gedankenwelt gehören, die er selbst geschaffen, oder deren Entstehen er miterlebt hat. Dem ist die Lebhaftigkeit der Darstellungsweise zu verdanken, die das Werk zu einer allen Mathematikern angenehmen Lektüre macht.

Das Werk selbst besteht aus drei Teilen. Der erste, den geometrischen Gebilden gewidmet, wird durch die GRASSMANNschen Ideen beherrscht; dabei aber die Beziehungen zu den verschiedenen Disciplinen (Vektorrechnung, Mechanik, MÖBIUSsches Nullsystem) mit der, dem Verfasser eigentümlichen Klarheit, auseinandergesetzt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den geometrischen Transformationen, wobei an jeder Stelle die Anwendbarkeit der besprochenen Transformation durch interessante geometrische Sätze illustriert wird. Mit einem schönen Überblick über die Imaginärtheorie von STAUDT endet dieser Abschnitt. Der dritte Teil ist der Systematik gewidmet; das berühmte Erlanger Programm, die CAYLEY-KLEINsche Massbestimmung wird zunächst in Anlehnung an die Invariantentheorie auseinandergesetzt. Dem folgt ein umfassender Exkurs über die Grundlagen der Geometrie, der mit der Erläuterung von EUKLIDES Elementen endet.

Den Abschluss der Vorlesung bildet ein Kapitel über den geometrischen Unterricht in den höheren Schulen, in dem auch wohl derjenige viel Interessantes findet, der sich nicht mit Pädagogie beschäftigt.

Die ausgezeichnete Ausarbeitung ist ein Verdienst von Herrn E. HELLINGER.

A. H.

A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Übersetzt von *A Ostrowski* und *H. Schmidt* (Grundlehren der math. Wissenschaften XVIII), XIV + 377 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Das vorliegende Werk des berühmten englischen Astrophysikers reiht sich würdig an die bekannten klassischen Darstellungen der Relativitätstheorie von WEYL und von v. LAUE und ergänzt sie auf das trefflichste. Baut LAUE schrittweise im strengen Anschluss an die Erfahrung die Theorie allmählich auf, und führt WEYL eine systematische Verallgemeinerung der Geometrie durch, der ihn schliesslich zu seiner verallgemeinerten Massbestimmung und zu einer gruppentheoretischen Vertiefung der geometrischen Grundlagen führt, so erstrebt EDDINGTON eine systematische deduktive Darstellung der gesamten Theorie, wobei die allgemeine Relativitätstheorie im Vordergrunde steht. Daraus ergibt sich, dass das Buch sich nicht für solche eignet, die mit der Theorie und den grundlegenden Tatsachen, die zur Theorie geführt haben, gar nicht bekannt sind. Die allgemeinen Grundlagen konnten umso mehr vorausgesetzt werden, da EDDINGTON sie in einer auch für weitere Kreise geeigneten Darstellung in einem besonderen Werke (Raum, Zeit und Gravitation, Übersetzung bei Vieweg u. Sohn, Braunschweig) behandelt hat. Eine gewisse Bekanntschaft mit den Grundlagen vorausgesetzt, eignet sich das Werk von EDDINGTON vorzüglich für ein eingehenderes Studium der Theorie, es ist immer sehr lebhaft und anregend geschrieben, seine Bemerkungen und Andeutungen sind besonders für den mit dem Stoff bereits Vertrauten vom höchsten Interesse.

Der Inhalt gliedert sich in sieben Kapitel, die folgendermassen betitelt sind: I. Elemente der Theorie. II Der Tensorkalkül. III. Das Gravitationsgesetz. IV. Relativistische Mechanik. V. Krümmung der raumzeitlichen Welt. VI. Elektrizität. VII. Weltgeometrie, und ein Anhang von A. EINSTEIN: EDDINGTONS Theorie und HAMILTONsches Prinzip

Aus dem reichen Inhalt möchten wir besonders die übersichtliche Entwicklung des Tensorkalküls hervorheben, sowie die eingehende Darstellung der EINSTEINschen und de SITTERschen Theorie über die Gestalt der raumzeitlichen Welt im Grossen (Kap. V.). Es muss aber erwähnt werden, dass hervorragende Forscher mit der hier dargelegten Auffassung der de SITTERschen Welt nicht einverstanden sind.[1])

Im Kapitel VI. und VII, sowie in dem Anhang werden die neuesten Versuche der Weiterbildung, die von WEYL, EDDINGTON und EINSTEIN herrühren, dargestellt; so die Weiterbildung der geometrischen Grundlagen von WEYL und EDDINGTON, die Einordnung des elektromagnetischen Feldes in die Theorie mit Hilfe des HAMILTONschen Prinzips.

Rudolf Ortvay.

---

[1]) Siehe das Referat über die erste englische Ausgabe von M. v. LAUE, Die Naturwissenschaften, 11, S. 382—384, 1923. Einige Bemerkungen LAUES betreffen diese auch die zweite englische Ausgabe berücksichtigende Übersetzung.

G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie (Grundlehren der math. Wissenschaften XX), VIII + 407 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Dieser zweite Band des ausgezeichneten Werkes enthält fast 900 Aufgaben samt Lösungen, darunter auch viele leichte, die aber grösstenteils zugleich dazu dienen, in tiefreichende, erst seit kurzem erledigte Fragestellungen hineinzuleuchten und den Leser Schritt für Schritt zur Lösung hinzugeleiten. Verfasser scheinen den alten Spruch, nach welchem es zur Mathematik keinen Königsweg gibt, mit grossem Eifer und mit viel Erfolg zu bekämpfen.

Von dem überreichen Stoffe, der in diesem Bande behandelt wird, seien hier nur einige Problemkreise erwähnt: schlichte Abbildungen, Lage der Nullstellen der Polynome und transzendenter Funktionen, TSCHEBYSCHEFF-sche Polynome und Verwandtes, Interpolation, positive quadratische Formen und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie, zahlentheoretische Funktionen etc.

F. R.

A. Schönflies, Einführung in die analytische Geometrie. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen XXI), X + 304 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Die vorliegende Einführung in die analytische Geometrie gibt nicht nur eine systematische Darstellung, sondern auch ein leicht verständliches Lehrbuch der analytischen Geometrie. Der Verfasser, der in seinen als klassisch geltenden Werken sein schöpferisches Talent mit den pädagogischen Gesichtspunkten immer in Harmonie bringen kann, betont, dass er in seiner Einführung vor allem ein Lehrbuch zum Studieren geben will. Dieser Gesichtspunkt drückt sich in dem synthetischen Aufbau, in der Auswahl und Anordnung des Stoffes, in der Art der Methoden aus, die also in der Hauptsache den didaktischen Zielen entsprechen. Auf diese Weise ist es ihm gelungen ein vortreffliches Lehrbuch der analytischen Geometrie zu verfassen, welches dem Studierenden die verschiedenen Gesichtspunkte und Methoden dieser Disziplin klarmacht. Der Inhalt beschränkt sich hauptsächlich auf das lineare Gebiet und bringt selbst für die Behandlung des Quadratischen die für das Lineare charakteristischen Methoden und Mitteln.

Das Buch fängt an mit einigen vorbereitenden Betrachtungen, die einerseits leicht und verständlich, andererseits allgemein genug sind um dem Leser das Wesen der Probleme klarzustellen. (Z. B. führt er im Abschnitt III. früher die Gleichungen der Kegelschnitte als die der Geraden ein, was aus systematischem Gesichtspunkte her falsch wäre, dagegen als ein pädagogischer Kunstgriff erscheint.) Nach der ausführlichen Behandlung der Geraden in der Ebene werden die Kegelschnitte betrachtet. Nachher kommt die Geometrie des Raumes zur Darstellung, nämlich die Ebenen im Raume und die Flächen zweiter Ordnung. In einem Anhang werden über Determinanten, Substitutionen usw. die für die analytische Geometrie notwendigen algebraischen Hilfsmittel abgeleitet.

B. v. Kerékjártó.

L. Schlesinger und A. Plessner: Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. VIII + 229 S., Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig, 1925.

Der Zweck, den die Verfasser vor sich stellen, ist einen Zugang zur Theorie des LEBESGUEschen Integrals für angehende Mathematiker zu eröffnen. Obwohl es schon eine Anzahl vorzüglicher Lehrbücher über diese Theorie gibt, wird das vorliegende auch sehr gut seinen Platz finden. Die Abgrenzung des Stoffes ist durch zwei Gesichtspunkte bestimmt: erstens ist er in der Richtung entwickelt, die zur modernen Theorie der FOURIERschen Reihen führt; zweitens gibt zwar das Buch genügend viel für ein erstes Studium der reellen Funktionentheorie, doch geht es nicht sehr tief in dieselbe hinein; es dient zu einer gründlichen Orientierung, nicht aber zur Anleitung zu weiteren wissenschaftlichen Forschungen — was auch nicht in der Absicht der Verfasser zu liegen scheint.

Nach drei Abschnitten über die Grundbegriffe der Mengenlehre, über das LEBESGUEsche Mass und über Funktionenfolgen gelangt man zum Hauptabschnitt des Buches, welches das LEBESGUEsche Integral unter Zugrundelegung der ursprünglichen geometrischen Definition von LEBESGUE behandelt. Im fünften Abschnitt wird die Theorie der reellen Funktionen von einer und von zwei Veränderlichen weiter ausgeführt; im Schlussabschnitt werden die Hauptresultate der Theorie der FOURIERschen Reihen dargestellt.

Im Abschnitt über FOURIERsche Reihen fällt es auf, dass die Verfasser den von ihnen sogenannten FEJÉR-LEBESGUEschen Satz zuerst herleiten und daraus als Spezialfall den FEJÉRschen Satz; es wäre richtiger umgekehrt, denn der ursprüngliche FEJÉRsche Satz bildet den Kern dieser Resultate Aber es scheint auch sonst die Tendenz der Verfasser zu sein, den historisch-didaktischen Gesichtspunkt unterdrückend, vom Allgemeinen auf das Spezielle zu schliessen (z. B. LEBESGUEsches und PEANO-JORDANsches Mass, LEBESGUEsches und RIEMANNsches Integral).

Das Buch ist leicht verständlich, setzt an Vorkenntnissen wenig voraus, sodass es als ein geeignetes Lehrbuch der Anfangsgründe dieser Theorie gelten wird.

B. v. Kerékjártó.

Reprinted by arrangement with the publishers
„KULTURA" Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
Budapest, POB. 149.
Hungary

Kossuth Nyomda