ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

SECTIO SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT:
L. KALMÁR, B. de SZ. NAGY, GY. de SZ. NAGY,
L. RÉDEI et F. RIESZ

ACTA
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XI.

FASC. 3.

SZEGED, 20. VIII. 1947.

UNIVERSITATE LITTERARUM SZEGEDIENSI ADIUVANTE
EDIDIT
SODALITAS AMICORUM UNIVERSITATIS

A SZEGEDI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK

ACTA
SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

XI. KÖTET.

3. FÜZET

SZEGED, 1947. augusztus 20.

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
AZ EGYETEM BARÁTAINAK EGYESÜLETE

Sur l'approximation des courbes convexes par des polygones.

Par D. LÁZÁR (†) à Kolozsvár.

1. Nous allons démontrer le théorème suivant qui nous a été suggéré par une Note de M. L FEJES[1]):

À chaque courbe convexe fermée il existe un polygone circonscrit et un polygone inscrit, chacun à n côtés, dont les aires T_n et t_n satisfont à l'inégalité

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} \leqq \sin^2 \frac{\pi}{n},$$

ou à celle équivalente

$$\frac{t_n}{T_n} \geqq \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

2. Convenons de désigner l'aire d'un polygone p par $|p|$.

Nous commençons la démonstration par la remarque suivante que nous empruntons à la Note citée de M. FEJES: Il existe un polygone circonscrit P_n et un polygone inscrit p_n à la courbe donnée, chacun à n côtés et tels que p_n est inscrit à P_n et que les côtés de p_n découpent de P_n des triangles de même aire[2]).

Tenant compte de ce fait, notre théorème sera démontré dès que nous aurons vérifié l'inégalité $\frac{|p_n|}{|P_n|} \geqq \cos^2 \frac{\pi}{n}$ pour tout couple de polygones convexes à n côtés, p_n et P_n, dont p_n est inscrit à P_n de façon que ses côtés découpent de P_n des triangles de même aire.

(†) Le jeune mathématicien DEZSŐ LÁZÁR est succombé, en 1943, victime de la guerre dans un camp de travail en Ucraïne. (La rédaction.)

[1]) L. FEJES, Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen, *Compositio Math.*, 6 (1939), pp. 456—467.

[2]) On voit aisément, par un raisonnement de continuité, que cela est toujours possible. De plus, on peut fixer d'avance l'un des sommets de p_n.

Pour le montrer, désignons par $\bar{p}_n$ un polygone d'aire minimum parmi les polygones à n côtés inscrits au polygone convexe à n côtés donné P_n, et dont les côtés découpent de P_n n triangles de même aire. *Il s'agit de déterminer parmi les polygones P_n d'aire donnée A ceux pour lesquels $|\bar{p}_n|$ est le plus petit possible.*

L'existence d'un tel polygone extrémal $\bar{P}_n$ est assurée par le théorème de Weierstraß sur les functions continues dans un ensemble fermé. En effet, on peut évidemment se borner au cas où le polygone varié P_n est situé dans un cercle fixe C de rayon[3]) $\varrho = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}A}{3}}$, le cas général y pouvant toujours être réduit par une transformation affine. L'ensemble des points $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ de l'espace E_{2n} pour lesquels l'enveloppe convexe des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dans le plan E_2 est un polygone P_n compris dans le cercle C et d'aire A, est évidemment *fermé* et $|\bar{p}_n|$ sera une fonction continue dans cet ensemble, lorsqu'on convient de poser $|\bar{p}_n| = A$ si P_n se réduit à un polygone ayant moins de n côtés.

3. Envisageons un polygone extrémal $\bar{P}_n$. M. Fejes a démontré[4]) que *A, B, C et D étant quatre sommets consécutifs de $\bar{P}_n$, on a*

$$AD \parallel BC. \tag{I}$$

Cette proposition est évidemment une conséquence de la suivante: *Les sommets du polygone $\bar{p}_n$ correspondant à $\bar{P}_n$ coïncident avec les milieux des côtés de $\bar{P}_n$.* Les triangles aBb et cbC ayant la même aire, la hauteur correspondant au côté Bb des premier triangle est plus petite que celle correspondant an côté bC du second.

Supposons le contraire. Soient $a, b, c, \ldots$ les sommets de $\bar{p}_n$ qui se trouvent respectivement sur les côtés consécutifs $AB, BC, CD, \ldots$ et supposons, pour fixer les idées, que $\overline{Bb} > \overline{bC}$.

Déplaçons le sommet b lelong du segment bB au point b'; comme alors la hauteur du triangle abc correspondant à b diminue, $|\bar{p}_n|$ diminue aussi. Puis tournons la droite BC autour de b' jusqu'à ce qu'on ait $|aB'b'| = |b'C'c|$, B' et C' étant les points provenant de B et C. Le polygone ainsi obtenu $AB'C'D\ldots$ soit désigné par P_n'.

Lorsque $\overline{bb'}$ est assez petit, on a $\overline{Bb'} > \overline{b'C}$ et $\overline{B'b'} > \overline{b'C'}$, donc $|P_n'| > |\bar{P}_n|$. D'autre part, lorsque $\overline{Bb'}$ est assez petit, alors $|P_n'| < |\bar{P}_n|$. Comme $|P_n|$ varie d'une manière continue avec b', il y aura une position

---

[3]) C'est le cercle circonscrit à un triangle régulier ayant l'aire A.

[4]) Nous recapitulons la démonstration de la note citée sous [1]) avec une légère modification due à M. Fejes.

$\bar{b}$ de b' entre b et B, telle que pour le polygone $P'_n = P^*_n$ correspondant on ait $|P^*_n| = |\bar{P}_n| = A$.

Cependant, les aires des triangles $aB'\bar{b}$ et $\bar{b}C'c$ sont plus grandes que les aires des triangles découpés du polygone original $\bar{P}_n$. On obtient donc, par une variation continue convenable des sommets $a, b, c, \ldots$, un polygone inscrit à P^*_n dont les côtés découpent de P^*_n des triangles ayant tous la même aire, plus grande que celle des triangles originaux. Or cela est en contradiction avec la définition de $\bar{P}_n$ comme polygone extrémal, ce qui prouve notre proposition.

4. Nous disons que le polygone extrémal $\bar{P}_n$ jouit aussi de la propriété suivante: *A, B, C, D et E étant cinq sommets consécutifs de $\bar{P}_n$, on a*

$$AE \parallel BD. \tag{II}$$

Les sommets a, b, c, d de $\bar{p}_n$ se trouvant, comme nous venons de voir, respectivement aux milieux des côtés AB, BC, CD, DE de $\bar{P}_n$, notre proposition est équivalente à ce que $ad \parallel bc$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que la distance δ_a du point a à la droite bc diffère de la distance correspondante δ_d, par exemple $\delta_a < \delta_d$. Déplaçons le sommet C en C' voisin, parallèlement à BD et de sorte de diminuer sa distance à la droite AE. Remplaçons le point b par le point d'intersection b' des droites bc et BC', et le point c par le point d'intersection c' des droites bc et DC'. Tandis que, par cette transformation, l'aire de $\bar{P}_n$ reste invariante, celle de $\bar{p}_n$ diminue et cela dans l'ordre $\eta = \overline{CC'}$, c'est-à-dire que, en désignant par $\bar{p}'_n$ le polygone $ab'c'd\ldots$, $(|\bar{p}'_n| - |\bar{p}_n|)/\eta$ tend, pour $\eta \to 0$, vers une valeur finie négative. On a, en effet, $|\bar{p}'_n| - |\bar{p}_n| = \dfrac{\delta_a - \delta_d}{4}\eta$.

Déplaçons ensuite b' sur la droite BC' en b'' et c' sur la droite DC' en c'', de sorte que les côtés ab'', $b''c''$ et $c''d$ du polygone obtenu $\bar{p}''_n$ découpent de $\bar{P}'_n$ des triangles ayant tous la même aire. Or l'ordre des distances $\overline{b'b''}$ et $\overline{c'c''}$, ainsi que celle des angles des droites $b'b''$, ac' et $c'c''$, $b'd$, est évidemment égal à η. Il en résulte que la variation $\bar{p}''_n - \bar{p}'_n$ est de l'ordre η^2. Donc si l'on remplace b et c par b'' et c'', alors l'aire de $\bar{p}_n$ diminue dans l'ordre η, d'où il s'ensuit que $\bar{P}'_n$ fournit, pour η assez petit, le polygone inscrit $\bar{p}''_n$ d'aire inférieure à celle de $\bar{p}_n$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\bar{P}_n$ est extrémal.

5. Pour achever la démonstration, il ne nous reste qu'à montrer que tout polygone P_n satisfaisant aux conditions (I) et (II) est l'image affine d'un polygone régulier.

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que pour certains sommets consécutifs A, B, C, D de P_n on ait[5]) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Les conditions (I) et (II) entraînent alors que $AEB\sphericalangle = BDC\sphericalangle$, c'est-à-dire que E se trouve sur le cercle circonscrit au trapèze équilatère $ABCD$; comme $AE \parallel BD$, on a de plus $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Tous les sommets de P_n se trouvent donc sur le même cercle et tous ses côtés sont égaux. Par conséquent, P_n est régulier, ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 7 avril 1941)

[5]) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un trapèze $ABCD$ puisse être transformé par une affinité de manière qu'on ait $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, est $\overline{AD} < 3\overline{BC}$. Nous disons que sur un polygone convexe fermé $A_1 A_2 \ldots A_n$ on peut trouver quatre sommets consécutifs $A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}$ (bien entendu, $A_{n+i} \equiv A_i$) de sorte que l'inégalité $3\overline{A_k A_{k+1}} > \overline{A_{k-1} A_{k+2}}$ soit satisfaite. En effet, sous l'hypothese contraire, on obtiendrait par addition $3\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k A_{k+1}} \leqq \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{k-1} A_{k+2}}$; tandis que par addition des inégalités $\overline{A_{k-1} A_{k+2}} < \overline{A_{k-1} A_k} + \overline{A_k A_{k+1}} + \overline{A_{k+1} A_{k+2}}$ on a $\sum_{=1}^{n} \overline{A_{k-1} A_{k+2}} < 3\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k A_{k+1}}$.

Über den Minimalkreisring einer Eilinie.

Von STEPHAN VINCZE in Budapest.

Es bedeute K eine geschlossene konvexe Kurve, und G das von der Kurve K begrenzte abgeschlossene Gebiet. Ist P ein Punkt von G und Q ein variabler Punkt von K, so erreicht die Funktion $R(P)=\max_Q \overline{PQ}$ ihr Minimum R_u in einem einzigen Punkte P von G. Dieser Minimalwert R_u ist der Halbmesser des Umkreises von K. Die Funktion $r(P)=\min_Q \overline{PQ}$ erreicht ihr Maximum r_i entweder in einem Punkte, oder in solchen Punkten von G, die ein geschlossenes Geradenstück bilden. Diese Punkte sind die Inkreismittelpunkte von K.

Wir nennen die Funktion $o(P)=R(P)-r(P)$ *Oszillation* der Kurve in Bezug auf den Punkt P, das Minimum von $o(P)$ in G — d. h. die Breite des die Kurve K bedeckenden Minimalkreisringes — *Abweichung der Kurve vom Kreis*[1]). Bezüglich der Oszillation gilt der folgende

Satz 1. *Die Oszillation $o(P)$ ist im Gebiet G konvex im Sinne, daß $o(P)\leq\frac{o(P_1)+o(P_2)}{2}$ ist, wobei P den Mittelpunkt der in G liegenden Strecke P_1P_2 bedeutet.*

In 1 geben wir für diesen Satz einen einfachen Beweis. Als eine Anwendung dieses Satzes geben wir in **2** einen neuen Beweis für die von BONNESEN und KRITIKOS bewiesene Unizität des Minimalkreisringes[2]): Die Oszillation erreicht ihr Minimum in G in einem einzigen Punkt, und zwar im Inneren von G.

In **3** beweisen wir die Sätze:

Satz 2. *Wenn R und r die Halbmesser des Minimalkreisringes, R_u und r_i den Um- bzw. Inkreishalbmesser bezeichnet, so ist*

---

[1]) Auf derartige, das Minimum der *Variation* betreffende Probleme hat mich Herr Professor L. FEJÉR aufmerksam gemacht; ich bin ihm dafür sehr verbunden.

[2]) T. BONNESEN, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, *Math. Annalen,* **91** (1924), S. 252—268; N. KRITIKOS, Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln, *Math. Annalen,* **96** (1927), S. 583—586.

$$R_u \leqq R \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3} R_u, \qquad r_i \geqq r > \frac{1}{2} r_i.$$

Diese Abschätzungen sind genau.

Satz 3. *Bedeutet δ den Abstand des Minimalkreisringmittelpunktes von einem Inkreismittelpunkt, so gilt*

$$r \geqq \frac{R_u}{R_u+\delta} r_i.$$

Aus dem Satz 2 ergibt sich folgende Ungleichung für die Abweichung der Kurve vom Kreis:

$$R_u - r_i \leqq R - r < \frac{2\sqrt{3}}{3} R_u - \frac{1}{2} r_i.$$

Zum Schlusse beweisen wir in **4** einige Sätze über Integralmittelwerte. Es bedeute $r_P(\varphi)$ den Abstand eines Punktes P des Gebietes G von einem Punkte Q der Kurve K, für die die Halbgerade PQ mit einer festen Richtung den Winkel φ bildet. Es gilt der

Satz 4. *Die Funktion* $u(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} r_P(\varphi) d\varphi$ *ist im Gebiet G konkav und nimmt darin ihr Maximum in einem einzigen Punkte an.*

Wenn wir dagegen den Abstand $r_P(s)$ eines Punktes P von einem variablen Punkt der Kurve K als Funktion der Bogenlänge s betrachten, wo s zwischen 0 und der Länge L von K variiert, so gilt der

Satz 5. *Die Funktion* $v(P) = \frac{1}{L} \int\limits_0^{L} r_P(s) ds$ *ist in G konvex und nimmt dort ihren minimalen Wert in einem einzigen Punkt an.*

1. Es sei S ein Punkt auf K mit maximalem Abstand vom Mittelpunkt P_0 der beliebigen Strecke P_1P_2. Dann besteht die Ungleichung $2\overline{P_0S} \leqq \overline{P_1S} + \overline{P_2S}$, in der das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn S auf die Verlängerung der Strecke P_1P_2 fällt. Wegen $R(P) = \max\limits_Q \overline{PQ}$ ergibt sich daraus

$$2R(P_0) = 2\overline{P_0S} \leqq \overline{P_1S} + \overline{P_2S} \leqq R(P_1) + R(P_2).$$

Die Funktion $R(P)$ ist also *in der ganzen Ebene konvex.*

Setzen wir nun voraus, daß P_1P_2 in G liegt und bezeichnen mit S_0 einen Punkt auf K, dessen Abstand von P_0 minimal ist. Ziehen wir aus P_1 und P_2 die mit dem Vektor $\overrightarrow{P_0S_0}$ gleichgerichteten Halbgeraden und nennen ihre Schnittpunkte mit K S_1 und S_2, so gilt, wegen der

Konvexität von K, $2\overline{P_0S_0} \geqq \overline{P_1S_1} + \overline{P_2S_2}$, woraus sich $2r(P_0) \geqq r(P_1) + r(P_2)$ ergibt. Dies bedeutet, daß $r(P)$ *in* G *konkav ist.*

Aus diesen Tatsachen folgt unmittelbar die Konvexität von $o(P) = R(P) - r(P)$ in G.

Bezeichnet M bzw. m das Minimum von $o(P)$ auf der Kurve K bzw. im Gebiet G und ist c eine Konstante für die $m \leqq c \leqq M$ gilt, so folgt aus der Konvexität von $o(P)$, daß die Punkte von G, für die $o(P) = c$ gilt, eine konvexe Kurve bilden. Da auf K $o(P) = R(P)$, fällt K dann und nur dann mit einer Kurve $o(P) =$ Konst. zusammen, wenn sie konstanter Breite ist.

Da $R(P)$ in der ganzen Ebene konvex ist, so sind die Kurven $R(P) = c$ für alle zulässigen Werte der Konstante c konvex. Dies trifft für die Kurven $o(P) = c$ im allgemeinen nicht zu. Dies folgt schon daraus, daß $o(P)$ sein Minimum für die ganze Ebene im allgemeinen nicht in G erreicht. Für ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$ klein ist, ist das Minimum m von $o(P)$ in G ungefähr gleich $\frac{a}{2}$, während bezüglich der ganzen Ebene $\lim\inf o(P) = b$ ausfällt. In diesem Fall besitzt die Kurve $o(P) = m$ in G einen isolierten Punkt.

2. Zum Beweis der Unizität des Minimalkreisringes zeigen wir zunächst, daß ein Punkt O des Gebietes G, in dem $o(P)$ ihr Minimum erreicht, notwendigerweise im Inneren von G liegt. Fällt nämlich O auf den Rand von G, so ist $r(O) = 0$ und $o(O) = \max \overline{OQ}$. In diesem Fall fällt aber der Punkt O mit dem Mittelpunkt O' des Umkreises C_u zusammen.

Wäre nämlich O' von O verschieden, so wäre wegen der Unizität des Umkreismittelpunktes

$$o(O') = R(O') - r(O') < R(O) = R(O) - r(O) = o(O).$$

Die Kurve fällt daher in den durch die Stützgerade g des Punktes O begrenzten Halbkreis des Umkreises C_u. Wegen der Eigenschaft des Umkreises hat C_u mindestens zwei gemeinsame diametrale Punkte mit K, nämlich die Schnittpunkte T und T' von g mit C_u. Auf der nach dem Inneren von K gerichtete Normale der Stützgerade im Punkt O gibt es einen Punkt N so, daß der Kreis um N mit dem Halbmesser $\overline{NO}$ ganz im Inneren von G liegt. Im Dreieck NOT gilt also die Ungleichung

$$o(N) = \overline{NT} - \overline{NO} < \overline{OT} = o(O),$$

die unserer Annahme widerspricht.

Wir nehmen nun an, o(P) erreiche ihr Minimum in zwei verschiedenen inneren Punkten O_1 und O_2. Dann gilt wegen der Konvexität von $o(P)$ für den Mittelpunkt O der Strecke O_1O_2: $o(O) = o(O_1) = o(O_2)$. Dies kann aber nur für solche Punkte vorkommen, für die

$$2R(O) = 2\overline{OS} = \overline{O_1S} + \overline{O_2S} = R(O_1) + R(O_2)$$

ausfällt, wobei S einen Punkt auf K mit maximalem Abstand von O bezeichnet. Daraus folgt, daß einerseits S auf die Verlängerung der Strecke O_1O_2 fällt und andererseits S ein Punkt von K ist, der von beiden Punkten O_1 und O_2 einen maximalen Abstand besitzt. Dies bedeutet, daß etwa im Fall $R(O_1) < R(O_2)$ die Differenz $R(O_2) - R(O_1) = \overline{O_1O_2}$ ausfällt. Aus $o(O_1) = o(O_2)$ folgt daher $r(O_1) - r(O_2) = \overline{O_1O_2}$. Die Kreise, die man mit maximalen Halbmessern um O_1 und O_2 in K zeichnen kann, berühren sich also vom innen. Der Berührungspunkt S' liegt auf der Geraden O_1O_2 in der Reihenfolge $O_1O_2S'S$. Da aber der vom innen berührende Kreis auch einen gemeinsamen Punkt mit K hat, fällt S' auf die Kurve. Zwei verschiedene Punkte S und S' von K können aber nicht in dieselbe Richtung von den inneren Punkten O_1 und O_2 fallen. Aus diesem Widerspruch folgt die Unizität.

3. Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Minimalkreisringes mit O, seinen äußeren bzw. inneren Kreis mit C_g bzw. C_k und den Halbmesser von C_g bzw. C_k mit R bzw. r. Fällt O mit dem Mittelpunkt O_u des Umkreises C_u zusammen, so ist $R_u = R$. In jedem anderen Fall ist $R_u < R$.

Es sei $\varDelta = \overline{O_uO}$ der Mittelpunktabstand der Kreise C_u und C_g, A und B die Schnittpunkte dieser Kreise. Derjenige Bogen $\widehat{AB}$ von C_u, der außerhalb der Kreisfläche C_g liegt, ist kleiner als ein Halbkreis, weil die gemeinsamen Punkte von C_u mit K auf einem Bogen liegen, der größer ist als ein Halbkreis. Wir machen nun von der Bonnesenschen Eigenschaft[3]) des Minimalkreisringes Gebrauch. Es gibt nach dieser vier Punkte von K, die beim Durchlaufen von K in einer Richtung abwechselnd auf C_k und C_g fallen. Der Minimalkreisring wird durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Auf dem in C_u liegenden Bogen $\widehat{AB}$ von C_g liegen demnach mindestens zwei Punkte A' und B' der Kurve K und zwischen A' und B' liegt mindestens ein mit C_k gemeinsamer Punkt D' von K. Wenn die Gerade OO_u die Sehne AB im Punkt D trifft, so liegt O_u zwischen O und D. Es gilt hiermit

$$r \geqq \overline{OD} = \varDelta + \overline{O_uD}.$$

Da anderseits C_k in das Innere von C_u fällt, so ist

$$r \leqq R_u - \varDelta.$$

---

[3]) Siehe Bonnesen, a. a. O. [2]), insb. S. 257.

Aus diesen zwei Ungleichungen folgt

$$\Delta + \overline{O_u D} \leqq r \leqq R_u - \Delta.$$

Ferner gilt $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AO_u}^2 - \overline{O_u D}^2$, d. h.

$$R^2 - (\Delta + \overline{O_u D})^2 = R_u^2 - \overline{O_u D}^2,$$

woraus sich

$$R^2 = R_u^2 + \Delta^2 + 2\Delta\,\overline{O_u D} = R_u^2 - \Delta^2 + 2\Delta(\Delta + \overline{O_u D})$$

ergibt. Nach der obigen Ungleichung $\Delta + O_u D \leqq R_u - \Delta$ gilt also

$$R^2 \leqq R_u^2 - \Delta^2 + 2\Delta(R_u - \Delta) = R_u^2 + 2\Delta R_u - 3\Delta^2.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist bei festem R_u für $\Delta = \frac{R_u}{3}$ am größten. Es gilt also $R^2 \leqq \frac{4}{3} R_u^2$, womit die erste Ungleichung in Satz 2 bewiesen ist.

Wir zeigen nun, daß in der soeben bewiesenen Ungleichung das Gleichheitszeichen bestehen kann. Betrachten wir die konvexe Hülle der Strecke AB und desjenigen Kreises vom Mittelpunkt O und vom Halbmesser $r = \frac{\sqrt{2}}{4}\overline{AB}$, der die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt D berührt. Da der Kreisring mit dem Mittelpunkt O und mit den Halbmessern $r = \overline{OD}$, $R = \overline{OA}$ der Bonnesenschen Eigenschaft des Minimalkreisringes genügt, so ist $R = \overline{OA} = \frac{\sqrt{6}}{4}\overline{AB}$ der Halbmesser vom größeren Kreis des Minimalkreisringes von dem betrachteten Gebiet. Andererseits gilt für dieses Gebiet — wie leicht einzusehen ist — $R_u = \frac{3}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} R$, w. z. b. w.

Wenden wir uns nun zur Abschätzung von r zu! Nach der Bonnesenschen Eigenschaft des Minimalkreisringes hat C_k mindestens zwei solche gemeinsame Punkte mit K, die zwei gemeinsame Punkte von C_g mit K trennen. Betrachten wir die Stützgeraden von C_k in diesen zwei Punkten. Diese Stützgeraden sind Tangenten des Kreises C_k und folglich auch der Kurve K. Wenn diese zwei Stützgeraden parallel sind, so ist $r = r_i$. Im Falle $r < r_i$ schneiden sich die Stützgeraden im Äußeren oder am Rande des Kreises C_g. Es bezeichne $\alpha\,(< \pi)$ den Winkel des von den Stützgeraden gebildeten Winkelraumes, der die Kurve enthält. Die gemeinsamen Tangenten der Kreise C_k und C_i bilden einen Winkel $\alpha' \leqq \alpha$ und somit fällt ihr Schnittpunkt E in das Äußere von C_g.

Es sei O_i der Mittelpunkt des Inkreises C_i und $\overline{OO_i} = \delta$. Dann gilt

$$\frac{r}{r_i} = \frac{\overline{EO}}{\overline{EO} + \delta}.$$

Wegen $\overline{EO} \geqq R$ folgt daraus

$$\frac{r}{r_i} \geqq \frac{R}{R+\delta} > \frac{R}{2R} = \frac{1}{2},$$

womit auch die zweite Ungleichung im Satz 2 dargetan ist. Aus der soeben bewiesenen Ungleichung $\frac{r}{r_i} \geqq \frac{R}{R+\delta}$ folgt ferner wegen $R \geqq R_u$ auch der Satz 3.

Das Beispiel eines gleichschenklingen Dreiecks, dessen Schenkel im Verhältnis zur dritten Seite groß sind, zeigt, daß r beliebig nahe zum Wert $\frac{1}{2} r_i$ kommen kann.

4. Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte des Gebietes G, P_0 der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2. Wenn S_0 ein beliebiger Punkt der Kurve K ist, so gilt die Ungleichung

$$\overline{P_0S_0} \geqq \frac{\overline{P_1S_1} + \overline{P_2S_2}}{2},$$

wo S_1 und S_2 die Schnittpunkte der aus P_1 und P_2 ausgehenden, zu dem Vektor $\overrightarrow{P_0S_0}$ parallelen Halbgeraden mit der Kurve K sind. Da das Gleichheitszeichen hier nur dann bestehen kann, wenn S_1, S_2 und S_0 auf einer Gerade liegen, so gibt es offenbar einen Bogen auf K so, daß für einen Punkt S_0, der auf diesem Bogen liegt, das Zeichen $>$ besteht. Bilden wir den Integralmittelwert für sämtliche Richtungen, so erhalten wir die Ungleichung $u(P_0) > \frac{u(P_1) + u(P_2)}{2}$, die die Konkavität von $u(P)$ und zugleich die Unizität des Maximumpunktes ausspricht.

Den Satz 5 gewinnen wir aus der Ungleichung

$$\overline{P_0S} \leqq \frac{\overline{P_1S} + \overline{P_2S}}{2},$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn S auf die Gerade P_1P_2 fällt. Das kommt aber für mehr als zwei Punkte der Kurve K nur dann vor, wenn K eine Strecke enthält und P_1P_2 auf dieser liegt. Wenn S auf dem Komplementbogen dieses geradlinigen Kurvenstückes liegt, dann besteht das Zeichen $<$. Es folgt daraus $v(P_0) < \frac{v(P_1) + v(P_2)}{2}$, womit auch der Satz 5 bewiesen ist.

(Eingegangen am 31. Dezember 1941.)

Sur les produits infinis et le théorème d'Abel.

Par MIKLÓS SCHWEITZER (†) à Budapest.

On connaît bien le théorème d'Abel qui joue un rôle important dans la théorie des séries entières: la série $\sum_0^\infty a_n$ étant supposée convergente et de somme S, on a $\sum_0^\infty a_n x^n \to S$ pour $x \to 1-0$.

Outre les séries entières, on se sert encore des produits infinis pour le développement des fonctions analytiques. T. F. RITT a démontré que toute fonction analytique $f(z)$, avec $f(0)=1$, se représente d'une façon univoque, dans un certain cercle $|z|<r$, sous la forme[1] $\prod_1^\infty (1+a_n z^n)$. Cela suggère de chercher l'analogue du théorème d'Abel pour les produits de ce genre.

HARDY, le premier à s'occuper de ce problème, est arrivé à un résultat surprenant[2]). On pourrait croire que la convergence de $\Pi(1+a_n)=p$ entraîne l'existence des limites, pour $x\to 1-0$, de $\Pi(1+a_n x)$ et de $\Pi(1+a_n x^n)$ et que ces limites sont égales à p. Or, HARDY construit un exemple d'un produit du premier type qui diverge partout sauf pour $x=0$ et $x=1$, donc dans ce cas la question concernant la limite est dépourvue de sens. Un autre exemple, pour le second type, montre que notre limite peut être égale au double de la valeur de $\Pi(1+a_n)$.

On voit donc que pour les suites d'exposants $1, 1, 1, \ldots$ et $1, 2, 3, \ldots$ le théorème d'Abel n'admet pas d'analogue. La question se pose qu'est-ce qu'on peut dire d'autres suites plus rares comme par exemple $1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ ou $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$, D'une façon générale, quelles sont les suites d'entiers $1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots$ pour lesquelles la convergence de

(†) Le jeune mathématicien MIKLÓS SCHWEITZER fut tué le 28 janvier 1945, pendant le siège de Budapest, par une balle de fusil allemande. (La rédaction.)

[1]) J. F. RITT, Representation of analytic functions as infinite product, *Math. Zeitschrift,* **32** (1930), pp. 1–3.

[2]) G. H. HARDY, A note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product, *Proceedings of the London Math. Society,* (2) **7** (1909), pp. 40–48.

$\Pi(1+a^n)$ entraîne la relation

$$\lim_{x\to 1-0} \prod_1^\infty (1+a_n x^{k_n}) = \prod_1^\infty (1+a_n).$$

La réponse est fournie par le théorème suivant.

Théorème 1. *Posons*

$$P(x) = \prod_1^\infty (1+a_n x^{k_n}).$$

Pour que la limite de $P(x)$, pour $x \to 1$, existe et soit égale à $P(1)$ pour tout produit convergent $\prod_1^\infty (1+a_n)$, il faut et il suffit que

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{k_n} < K, \tag{1}$$

c'est-à-dire que la suite à gauche reste bornée.

Au lieu de faire varier x sur l'axe réel et à gauche de $x=1$, on pourrait aussi le faire varier dans le plan complexe et s'approcher du point 1 par une région angulaire, comprise dans le cercle unité et cela sans modifier essentiellement les raisonnements.

On peut évidemment supposer K entier et il vient immédiatement dont nous nous servirons que les suites remplissant notre hypothèse se decomposent en $2K$ suites au plus dont chacune fortement lacunaire, c'est-à-dire telle que le rapport des termes consécutifs reste au dessus d'une quantité supérieure à 1. Un cas particulier intéressant est fourni par la suite $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ pour laquelle, par conséquent, l'analogue du théoréme d'Abel est valable. Il n'en est pas ainsi pour la suite $1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ quelque soit k.

Il pourrait paraître paradoxe que la relation en question ne subsiste pas toujours; en effet, le réarrangement de $P(x)$ donne une série entière $\Sigma b_n x^n$ pour laquelle évidemment, le théorème d'Abel est valable. Or, la convergence du produit $\Pi(1+a_n)$ n'entraîne pas nécessairement celle de Σb_n ni la relation $\Sigma b_n = \Pi(1+a_n)$. Observons, sans entrer dans les détails, que l'on peut démontrer que sous l'hypothèse (1) la série Σb_n converge et a pour somme la valeur de $\Pi(1+a_n)$. Notre réarrangement fournit donc une méthode pour passer d'un produit infini à une série équivalente. Cela dit évidemment plus que ce que l'hypothèse (1) assure l'existence de la limite radiale, car ce dernier fait découle déjà, par le théorème d'Abel, de la convergence de Σb_n.

Outre le théorème 1 nous nous occuperons encore d'une sorte de théorème inverse du type TAUBER. Pour les séries entières l'inversion du théorème d'Abel n'est possible que sous certaines hypothèses complémentaires. Le théorème qui suit, met en évidence que pour les produits infinis cette différence entre les théorèmes du type ABEL et du type TAUBER n'intervient pas. Quand le théorème d'Abel subsiste, il en est de même de son inverse. C'est seulement l'hypothèse évidente $a_n \to 0$ qu'il faut encore poser.

Théorème 2. *Supposons que la suite* $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ *remplisse la condition* (1) *et que de plus* $a_n \to 0$ *et, pour* $x \to 1$, $P(x) \to p \neq 0$; *alors* $\prod_1^\infty (1+a_n)$ *converge et a* p *pour valeur.*

L'hypothèse $a_n \to 0$ ne peut pas être supprimée. Par exemple pour $P(x) = (1-x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$, $P(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $P(x) \to \dfrac{1}{2}$ lorsque $x \to 1$, tandis que $P(1) = 0$.

L'analogue du théorème 2 pour des séries entières est connu depuis longtemps. En fait, si l'on cherche à formuler le théorème de TAUBER d'une façon générale pour les séries du type $\Sigma a_n x^{k_n}$, on parvient à ce que, sous l'hypothèse (1) et en supposant encore que $a_n \to 0$, l'existence de la limite de $P(x)$ pour $x \to 1$ entraîne la convergence de la série Σa_n. Cela vient immédiatement du second théorème de Tauber[3]) et du fait que la suite $k_1, k_2, \ldots$ ne peut contenir qu'un nombre fini de termes égaux.

Pour la démonstration de nos théorèmes nous aurons à nous servir du lemme suivant.

Lemme. *Lorsque la suite* $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ *satisfait à l'hypothèse* (1), *on a*

$$l k_n < k_{n+Kl} \tag{2}$$

et

$$k_n \geqq 2^{\left[\frac{n}{2K}\right]} \tag{3}$$

quelles que soient les valeurs positives n *et* l.

Démonstration. De l'hypothèse (1) et de $k_n \leqq k_{n+1}$ il vient que

$$Klk_n < k_1 + k_2 + \ldots + k_n + k_{n+1} + \ldots + k_{n+Kl} < Kk_{n+Kl}$$

et par conséquent

$$lk_n < k_{n+Kl}.$$

Soit $\nu = \left[\dfrac{N}{K}\right]$ et posons, dans (2), $l = 2$, $n = (\nu - 2)K$; on obtient que $k_N \geqq k_{\nu k} \geqq 2k_{(\nu-2)K}$. En répétant ce procédé, on arrive à l'inégalité

$$k_N \geqq 2^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{N}{2K}\right]}$$

ce qu'il fallait démontrer.

---

[3]) A. TAUBER, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **8** (1897), pp. 273–277.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. L'hypothèse est suffisante. En effet, lorsque le produit $\Pi(1+a_n)=p$ converge et diffère de 0, on aura évidemment $a_n \to 0$ et $a_n \neq -1$. En posant encore l'hypothèse (1), on en conclut immédiatement que la suite des k_n ne peut contenir plus de K termes égaux. De là il résulte que les séries entières Σx^{k_n} et $\Sigma a_n x^{k_n}$ sont absolument convergentes pour $|x|<1$ et par conséquent, il en est de même pour le produit infini $\Pi(1+a_n x^{k_n})$. De plus x étant suffisamment proche de 1, on pourra choisir N de sorte que

$$1-\frac{1}{k_N} \leqq x \leqq 1-\frac{1}{k_{N+1}}.$$

Or, faisons la décomposition

$$\frac{P(x)}{p}=\prod_1^m \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \prod_{m+1}^N \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \prod_{N+1}^\infty (1+a_n x^{k_n}) \frac{1}{\prod\limits_{N+1}^\infty (1+a_n)}$$

où nous avons choisi m de sorte que pour $n>m$ on ait toujours $|a_n|<\frac{1}{3}$. Quand $x \to 1$, on aura évidemment

$$\prod_1^m \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \to 1 \tag{4}$$

et comme $N \to \infty$, on aura aussi

$$\prod_{N+1}^\infty (1+a_n) \to 1. \tag{5}$$

Pour vérifier la convergence des deux autres produits, nous nous servirons de l'inégalité bien connue suivante, facile à prouver: Si $|u_n|<\frac{1}{2}$ pour $n=k+1, k+2, \ldots, M$, alors

$$e^{-2\sum\limits_{k+1}^M |u_n|} \leqq \left|\prod_{k+1}^M (1+u_n)\right| \leqq e^{\sum\limits_{k+1}^M |u_n|}. \tag{6}$$

Écrivons

$$\prod_{m+1}^N \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n}=\prod_{m+1}^N \left(1-\frac{a_n(1-x^{k_n})}{1+a_n}\right);$$

alors, en posant dans l'inégalité (6) $u_n=-\dfrac{a_n(1-x^{k_n})}{1+a_n}$, $k=m$, $M=N$ et en observant que pour $n>m$

$$|u_n| \leqq \frac{|a_n||1-x^{k_n}|}{1-|a_n|}<\frac{|a_n|}{1-|a_n|}<\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},$$

la vérification de la relation

(7) $$\prod_{m+1}^{N} \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \to 1$$

se réduit à celle de

$$\sum_{m+1}^{N} |u_n| \to 0 \qquad (x \to 1,\ N \to \infty).$$

Or,

$$|1-x^{k_n}| = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k_n-1}) < \frac{k_n}{k_N},$$

donc

$$|u_n| < \frac{|a_n| \frac{k_n}{k_N}}{1-|a_n|} < \frac{3}{2} \frac{|a_n| k_n}{k_N}$$

et de là

$$\sum_{m+1}^{N} |u_n| < \frac{3}{2} \sum_{m+1}^{N} \frac{|a_n| k_n}{k_N} < \frac{3}{2} \sum_{1}^{N} \frac{|a_n| k_n}{k_N} < \frac{3K}{2} \frac{|a_1| k_1 + |a_2| k_2 + \ldots + |a_N| k_N}{k_1+k_2+\ldots+k_N}$$

et

$$\frac{|a_1| k_1 + \ldots + |a_N| k_N}{k_1+\ldots+k_N} \to 0,$$

puisque $|a_N| \to 0$.

La relation

(8) $$\prod_{N+1}^{\infty} (1+a_n x^{k_n}) \to 1$$

découle aussi de l'inégalité (6), en y posant $u_n = a_n x^{k_n}$, $k=N$, $M=\infty$; tout cela est permis, car $|a_n| x^{k_n} < \frac{1}{2}$ et la série $\Sigma |u_n|$ converge absolument. Or,

$$\sum_{N+1}^{\infty} |u_n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| x^{k_n} < \operatorname*{Max}_{\nu > N} |a_\nu| \, K (x^{k_{N+1}} + x^{k_{N+K+1}} + x^{k_{N+2K+1}} + \ldots)$$

et par (2) et comme

$$x^{k_{N+1}} < \left(1 - \frac{1}{k_{N+1}}\right)^{k_{N+1}} < \frac{1}{e},$$

il résulte que

$$x^{k_{N+1}} + x^{k_{N+K+1}} + x^{k_{N+2K+1}} + \ldots < \sum_{0}^{\infty} x^{n k_{N+1}} = \frac{1}{1-x^{k_{N+1}}} < \frac{e}{e-1};$$

par conséquent

$$\sum_{N+1}^{\infty} |u_n| < \operatorname*{Max}_{\nu > N} |a_\nu| \frac{Ke}{e-1} \to 0;$$

donc, eu égard de (6), la rélation (8) est vérifiée. Enfin, en combinant (4), (5), (7) ét (8), l'existence de la limite radiale est démontrée.

Pour prouver la nécessité de l'hypothése (1), nous envisageons une suite $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ qui ne satisfait pas à l'hypothèse et nous construisons un produit infini $\Pi(1+a_n)$, convergent mais pour lequel la limite de $P(x)$ pour $x \to 1$ n'existe pas.

Dans ce cas, en posant

$$K_n = \frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{k_n}$$

on a $\overline{\lim}\, K_n = \infty$. Posons encore

$$M_n = \frac{k_1+k_3+\ldots+k_{2n+1}}{k_{2n+1}},$$

alors

$$M_n > \frac{1}{2}\,\frac{k_1+k_3+k_3+k_5+k_5+\ldots+k_{2n+1}}{k_{2n+1}} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\,\frac{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{2n}+k_{2n+1}}{k_{2n+1}} = \frac{1}{2} K_{2n+1}$$

et

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_{2n+1}}{k_{2n+1}} \geqq \frac{k_1+k_2+\ldots+k_{2n+1}+k_{2n+2}-k_{2n+2}}{k_{2n+2}} = K_{2n+2}-1,$$

donc

$$M_n > \frac{1}{2} K_{2n+1} \geqq \frac{1}{2}(K_{2n+2}-1);$$

il s'ensuit que

$$\overline{\lim}\, M_n = \infty.$$

Posons

$$\varepsilon_n = \min_{\nu \leqq n} M_\nu^{-\frac{1}{3}},$$

alors il est manifeste que la suite des ε_n va en décroissant vers zéro. Envisageons les produits partiels $\prod_1^n (1+a_\nu) = p_n$ où nous choisirons a_ν de sorte que l'on ait $p_{2n} = 1+\varepsilon_n$, $p_{2n+1} = 1$ et cela pour tous les n. Comme évidemment $\varepsilon_n \to 0$, on aura aussi $p_n \to 1$, c'est que le produit converge vers la valeur 1.

$$a_1 = 0 \text{ puisque } p_1 = 1 + a_1 = 1;$$

$$a_{2n} = \frac{p_{2n}-p_{2n-1}}{p_{2n-1}} = \varepsilon_n;$$

$$a_{2n+1} = \frac{p_{2n+1}-p_{2n}}{p_{2n}} = -\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n};$$

$$a_{2n}+a_{2n+1}=\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}; \qquad a_{2n}a_{2n+1}=\frac{-\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n};$$

$$P(x)=\prod_1^\infty (1+a_n x^{k_n})=\prod_1^\infty (1+a_{2n}x^{k_{2n}})(1+a_{2n+1}x^{k_{2n+1}}).$$

Un calcul facile donne que

$$P(x)=\prod_1^\infty \left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}(1-x^{k_{2n+1}})+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}(x^{k_{2n}}-x^{k_{2n+1}})\right).$$

Nous allons montrer que, pour $x\to 1$, $P(x)$ ne reste pas borné. En effet, posons $x=1-\frac{1}{k_N}$ et faisons aller N à l'infini. Comme chaque facteur de $P(x)$ est plus grand que 1, on aura

$$P(x)>\prod_1^N \left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}(1-x^{k_{2n+1}})+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}(x^{k_{2n}}-x^{k_{2n+1}})\right)\geqq$$
$$\geqq \prod_1^N \left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}(1-x^{k_{2n+1}})\right).$$

De plus $\varepsilon_n<1$, puisque $M_n>1$;

$$x^{k_{2n}}=\left(1-\frac{1}{k_{2N+1}}\right)^{k_{2n}}\geqq\frac{1}{4}$$

et

$$1-x^{k_{2n+1}}=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k_{2n+1}-1})>$$
$$>\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}\left(1-\frac{1}{k_{2N+1}}\right)^{k_{2N+1}}>\frac{1}{4}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}.$$

En nous servant de l'inégalité $\Pi(1+u_n)>\Sigma u_n$ $(u_n>0)$ et de celles qui précèdent, nous obtenons que

$$P(x)>\prod_1^N\left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}\right)>\sum_1^N\frac{\varepsilon_n^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}>$$
$$>\sum_1^N\frac{\varepsilon_N^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}=\frac{\varepsilon_N^2}{32}\left(M_N-\frac{k_1}{k_{2N+1}}\right)>\frac{\varepsilon_N^2}{64}M_N.$$

Choisissons N de sorte que $M_N\geqq M_n$ pour tous les $n<N$ (comme $\lim M_n=\infty$ il y a une infinité de tels N). Pour de tels N on a précisément $M_N=\frac{1}{\varepsilon_N^3}$, donc

$$P(x)>\frac{1}{64\,\varepsilon_N}.$$

Comme $\varepsilon_N\to 0$ pour $N\to\infty$, le produit $P(x)$ n'est pas borné pour $x\to 1$.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 2. Les inégalités (4), (7) et (8) assurent que toujours que $a_n\neq -1$ $(n=1, 2,\ldots)$ et $a_n\to 0$,

$$\frac{P(x)}{\prod_1^N (1+a_n)} \to 1$$

pour $x \to 1$, x parcourant les valeurs $1 - \frac{1}{k_N}$, avec $N \to \infty$. Comme de plus $P(x) \to p \neq 0$, il vient que $\prod_1^N (1+a_n) \to p$, ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste à prouver que l'hypothèse $a_n \neq -1$ est toujours remplie. Supposons que $a_\nu = -1$ et posons $Q(x) = \prod_{n \neq \nu} (1 + a_n x^{k_n})$; alors $P(x) = (1 - x^{k_\nu})\, Q(x) \to p$ et comme $\frac{1 - x^{k_\nu}}{1 - x} \to k_\nu$ pour $x \to 1$, il résulte que $(1-x)\, Q(x) \to \frac{p}{k_\nu}$. D'autre part, nous allons montrer que $(1-x)\, Q(x) \to 0$. Comme $a_n \to 0$, il y a un $m > \nu$ de sorte que

$$1 + |a_n| < 2^{\frac{1}{4K}}$$

pour tout $n > m$. Faisons la décomposition

$$Q(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq \nu}}^{m} (1 + a_n x^{k_n}) \prod_{m+1}^{N} (1 + a_n x^{k_n}) \prod_{N+1}^{\infty} (1 + a_n x^{k_n})$$

et choisissons N de sorte que $1 - \frac{1}{k_N} \leqq x \leqq 1 - \frac{1}{k_{N+1}}$; alors le premier des trois produits reste évidemment inférieur à une constante M_1 et, de par (8), le troisième reste inférieur à une constante M_2. Quant au second, une évaluation grossière donne

$$\prod_{m+1}^{N} (1 + a_n x^{k_n}) < \prod_{m+1}^{N} (1 + |a_n|) < 2^{\frac{N}{4K}}$$

d'où, grace à la limitation posée de x et à l'inégalité (3),

$$|(1-x)Q(x)| < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{k_N} < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{2^{\left[\frac{N}{2K}\right]}} < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{2^{\frac{N}{2K}-1}} = \frac{2 M_1 M_2}{2^{\frac{N}{4K}}}.$$

Il s'ensuit pour $N \to \infty$ et $x \to 1$ que

$$(1-x)\, Q(x) \to 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 11 janvier 1943)

Die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

1. Von J. L. WALSH[1]) rührt der folgende Satz her:

Liegt jede Nullstelle des Polynoms

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n \qquad (n\geqq 2)$$

in einer Kreisscheibe K vom Mittelpunkt ζ und vom Halbmesser r, so enthält die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h $(h=1,2,\ldots,n)$ vom Halbmesser r, deren Mittelpunkte die n Punkte

$$\zeta_h=\zeta+\left|\sqrt[n]{A}\right|e^{\frac{2\pi i}{n}h} \qquad (h=1,2,\ldots,n)$$

sind, jede A-Stelle von $f(z)$ (d. h. jede Nullstelle des Polynoms $f(z)-A$).

Dieser Satz wurde von WALSH aus dem bekannten Graceschen Satz über die symmetrischen multilinearen Gleichungen hergeleitet.

2. Wir beweisen den Satz

I. *Das Polynom*

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \tag{1}$$

besitzt in jeder Kreisscheibe K_h

$$|z-z_h|\leqq\varrho=\left|\sqrt[n]{A}\right| \qquad (h=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

mindestens eine A-Stelle.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_n enthält jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$. Haben die n Kreisscheiben K_h einen Bereich gemeinsam, so besitzt das Polynom $f(z)$ in keinem inneren Punkte dieses Bereiches eine A-Stelle.

Bezeichnen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die A-Stellen des Polynoms $f(z)$, so ist

$$f(z)-A=(z-a_1)(z-a_2),\ldots(z-a_n).$$

Wäre nun jede A-Stelle von $f(z)$ außerhalb der Kreisscheibe K_p $(1\leqq p\leqq n)$ gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$|z_p-a_h|>\varrho \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

---

[1]) J. L. WALSH, On the location of the roots of certain types of polynomials *Transactions of the American Math. Society*, **24** (1922), S. 163—180, insbes. S. 173.

Daraus folgt, daß

$$|f(z_p)-A|=|A|=|(z_p-a_1)(z_p-a_2)\dots(z_p-a_n)|>\varrho^n=|A|$$

ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des ersten Teiles vom Satz I.

Wäre nun die A-Stelle a_p ausserhalb bzw. innerhalb jedes Kreises K_h gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$|a_p-z_p|>0 \quad \text{bzw.} \quad |a_p-z_h|<\varrho \qquad (h=1,2,\dots,n),$$

woraus die Ungleichung

$$|f(a_p)|=|(a_p-z_1)(a_p-z_2)\dots(a_p-z_n)|<\varrho^n=|A| \text{ bzw. } |f(a_p)|<\varrho^n=|A|$$

folgt. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des zweiten Teiles vom Satz I.

Aus Satz I folgen die Sätze:

II. *Enthält die Punktmenge $\mathfrak{M}$ jede Nullstelle des Polynoms*

$$(3) \qquad f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\dots+c_n,$$

ist $|A|=\varrho^n$ und bedeutet $\mathfrak{M}'$ die Punktmenge derjenigen Kreisscheiben vom Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkte zu $\mathfrak{M}$ gehören, so enthält die Punktmenge $\mathfrak{M}'$ jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$. Haben diese Kreisscheiben einen Bereich $\mathfrak{M}''$ gemeinsam, so ist kein innerer Punkt von $\mathfrak{M}''$ eine A-Stelle von $f(z)$.

III. *Liegt jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades von der Form (3) in der Kreisscheibe $|z-\zeta|\leqq r$ und ist $|A|=\varrho^n$, so liegt jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$ in der Kreisscheibe $|z-\zeta|\leqq\varrho+r$. Ist nun $|A|=\varrho^n>r^n$, so liegt jede A-Stelle von $f(z)$ im Kreisring $\varrho-r\leqq|z-\zeta|\leqq\varrho+r$.*

3. Der Hauptsatz dieser Arbeit ist der folgende:

IV. *Bedeuten $\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n$ beliebige der Gleichung*

$$(4) \qquad \varrho_1\varrho_2\dots\varrho_n=|A|$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet K_h $(h=1,2,\dots n)$ den Kreis

$$(5) \qquad |z-z_h|=\varrho_h \qquad (h=1,2,\dots,n),$$

so liegt keine A-Stelle des Polynoms

$$(6) \qquad f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n) \qquad (n\geqq 2)$$

außerhalb jedes Kreises K_h oder innerhalb jedes Kreises K_h $(h=1,2,\dots n)$.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$ und auch jede B-Stelle, wenn $|B|\leqq|A|$ ist.

Haben die n Kreisscheiben K_h einen Bereich $\mathfrak{B}'$ gemeinsam, so liegt keine A-Stelle des Polynoms $f(z)$ innerhalb von $\mathfrak{B}'$. [Dies gilt aber nicht für jede B-Stelle $(|B|<|A|)$.]

Bilden p $(1\leqq p\leqq n)$ der n Kreisscheiben K_h $(h=1,2,\dots,n)$ einen (zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden) Bereich $\mathfrak{B}$, der *mit keiner der übrigen $n-p$ Kreisscheiben K_h einen Punkt gemeinsam hat, so enthält $\mathfrak{B}$ genau p solche B-Stellen, für welche $|B| \leqq |A|$ ist.*

Dieser Satz läßt sich im allgemeinen nicht verschärfen.

Wir nehmen zum Beweis an, daß a eine solche A-Stelle von $f(z)$ ist, die außerhalb oder innerhalb jedes Kreises K_h $(h=1,2,\ldots,n)$ liegt. Es gelten also die Ungleichungen

$$|a-z_h| > \varrho_h \quad \text{bzw.} \quad |a-z_h| < \varrho_h \qquad (h=1,2,\ldots,n),$$

woraus

$$|A| = |f(a)| = |(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_n)| > \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$$
$$\text{bzw.} \quad |A| = |f(a)| < \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$$

ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des ersten Absatzes von IV.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält also jede A-Stelle von $f(z)$ und auch jede B-Stelle $(|B| \leqq |A|)$. Es gibt nämlich eine positive Zahl u $(0 < u \leqq 1)$, so daß $|B| = u^n|A| = u\varrho_1 u\varrho_2 \ldots u\varrho_n$ ist. Die Kreisscheibe K_h enthält die Kreisscheibe $K_h(u)$

$$(7) \qquad |z-z_h| \leqq u\varrho_h \qquad (h=1,2,\ldots,n;\ 0<u\leqq 1).$$

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält also die n Kreisscheiben $K_h(u)$ und damit jede B-Stelle von $f(z)$.

Wir nehmen zum Beweis des dritten Absatzes von IV an, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ aus den Kreisscheiben $K_1, K_2, \ldots, K_p$ besteht. Der aus den Kreisscheiben $K_1(u), K_2(u), \ldots, K_p(u)$ $(0 < u \leqq 1)$ bestehende Bereich $\mathfrak{B}(u)$ ist ein Teil von $\mathfrak{B}$.

Während eine Zahl Z sich von A ausgehend nach B und dann nach Null stetig so nähert, daß inzwischen $|Z|$ monoton abnimmt, bewegen sich die Z-Stellen von $f(z)$ stetig und kann keine Z-Stelle die Begrenzung des entsprechenden Bereichs $\mathfrak{B}(u)$ $\left[u = \left|\sqrt[n]{\frac{Z}{A}}\right| < 1\right]$ und noch weniger die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ übertreten. Widrigenfalls hätte nämlich das Polynom $f(z)$ eine Z-Stelle außerhalb der zugehörigen n Kreise $K_h(u)$, $u = \left|\sqrt[n]{\frac{Z}{A}}\right|$. Dies ist aber nach dem ersten Absatz von IV unmöglich. Daraus folgt, daß $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ genau soviel A-Stellen, wie B-Stellen $(|B| \leqq |A|)$, oder Nullstellen besitzt.

Ist a eine A-Stelle von $f(z)$ und sind

$$\varrho_h = |a-z_h| \qquad (h=1,2,\ldots,n),$$

so ist $\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$ und der Punkt a ist ein gemeinsamer Punkt der n Kreise K_h. Daraus folgt die Richtigkeit des letzten Absatzes von IV.

4. Wählt man die der Gleichung (4) genügenden Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ oder mindestens ihre Aufeinanderfolge auf eine andere Weise, so erhält man wieder n Kreisscheiben K_h, deren Gesamtheit jede B-Stelle des Polynoms $f(z)$ enthält, wenn $|B| \leqq |A|$ ist.

Daraus folgt der Satz:

V. *Bezeichnet* $\mathfrak{M}_1$ *eine aus dem im Satz* IV *bestimmten Kreisscheiben* $K_1, K_2, \ldots, K_n$ *bestehende Punktmenge und sind* $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ *verschiedene Punktmengen derselben Art, die zu verschiedenen Lösungen der Gleichung* (4), *oder zu verschiedenen Aufeinanderfolgen der Zahlen* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ *von derselben Lösung gehören, und ist* $\mathfrak{M}^*$ *der Durchschnitt der Mengen* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots,$ *so enthält auch die Punktmenge* $\mathfrak{M}^*$ *jede B-Stelle des Polynoms* $f(z)$, *sobald* $|B| \leqq |A|$ *ist.*

Läßt man aus der Punktmenge $\mathfrak{M}_i$ *der n Kreisscheiben* $K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, \ldots, K_n^{(i)}$ *die Menge der Punkte weg, die für jeden Kreis* $K_h^{(i)}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ *innere Punkte sind, so enthält auch die übrigbleibende Punktmenge jede A-Stelle des Polynoms* $f(z)$.

5. Man kann den folgenden Satz ebenso beweisen, wie den Satz IV:

VI. *Bedeuten* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ *beliebige, der Gleichung*

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n = |A| \qquad (n = 2p + q,\ p \geqq 1,\ q \geqq 0)$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet C_h *bzw.* K_j *den (von einer Cassinischen Kurve begrenzten) Bereich*

$$|(z - z_{2h-1})(z - z_{2h})| \leqq \varrho_{2h-1} \varrho_{2h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

bzw. die Kreisscheibe

$$|z - z_{2p+j}| \leqq \varrho_{2p+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

so enthält die Gesamtheit der Bereiche $C_1, C_2, \ldots, C_p, K_1, K_2, \ldots, K_q$ *jede A-Stelle des Polynoms*

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

und auch jede B-Stelle, wenn $|B| \leqq |A|$ *ist.*

6. Die Sätze IV und V lassen sich leicht auf die Untersuchung der Lage der Wurzeln von algebraischen Gleichungen anwenden. So erhält man z. B.[2]:

Jede trinomische Gleichung von der Form

$$z^5 - 16 z^3 + A = 0, \qquad |A| \leqq 8$$

---

[2]) GYULA SZ. NAGY, Összefüggések a polinomok zérushelyei és A-helyei között és alkalmazásuk algebrai egyenletek gyökei helyzetének vizsgálatára (ungarisch mit deutschem Auszug: Relationen zwischen den Nullstellen und A-Stellen der Polynome und ihre Anwendung auf die Untersuchung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen), *Múzeumi Füzetek, Kolozsvár,* 1 (1943), S. 132—152.

hat in den Kreisringen

$$0{\cdot}015 \leqq |z \pm 4| \leqq 0{\cdot}016 \text{ bzw. } 0{\cdot}793 \leqq |z| \leqq 0{\cdot}805$$

je eine bzw. je drei Wurzeln.

Hier ist

$$f(z) = z^5 - 16z^3 = z^3(z+4)(z-4).$$

7. Es gilt auch der folgende Satz:

VII. *Enthält der Konvexbereich* $\mathfrak{B}$ *jede Nullstelle des Polynoms*

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),$$

ist ferner arc $A = \alpha$ *und bezeichnet endlich* S_k *den Parallelstreifen, der von* $\mathfrak{B}$ *während seiner in der Richtung* $\gamma_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *stattfindenden Parallelverschiebung überstrichen wird, so enthält die Gesamtheit der Parallelstreifen* $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ *jede A-Stelle des Polynoms* $f(z)$.

Bezeichnet S^* die aus den Streifen $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ bestehende Punktmenge, so entsteht S^* offenbar so, daß man aus der komplexen Ebene gewisse n Winkelräume W_k von der Öffnung $\frac{2\pi}{n}$ wegläßt. Die Schenkel des Winkelraumes W_k bilden mit der positiven reellen Achse die Winkel γ_k und γ_{k+1}.

Der Scheitelwinkelraum W_k' von W_k enthält offenbar den Konvexbereich $\mathfrak{B}$ und damit jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$.

Wir nehmen zum Beweis des Satzes an, daß eine A-Stelle a des Polynoms $f(z)$ im Innern von W_k liegt.

Wird nun der Anfangspunkt z_i des Wektors $\overrightarrow{z_i a}$ durch eine Parallelverschiebung in den gemeinsamen Scheitel von W_k und W_k' überführt, so wird der Endpunkt des Vektors $\overrightarrow{z_i a}$ in das Innere von W_k gelangen. Daraus folgt, daß

$$\gamma_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k < \operatorname{arc}(a - z_i) < \gamma_{k+1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+1) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$n\gamma_k = \alpha + 2\pi k < \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc}(a - z_i) = \operatorname{arc} f(a) < n\gamma_{k+1} = \alpha + 2\pi(k+1).$$

Hieraus folgt, daß $\operatorname{arc} f(a) \not\equiv \operatorname{arc} A = \alpha \pmod{2\pi}$ und somit $f(a) \neq A$. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes VII.

(Eingegangen am 18. April 1945.)

On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space.

By BÉLA DE SZ. NAGY in Szeged.

§. 1.

In a paper aiming at a generalization of the theorem on spectral resolution of unitary transformations in HILBERT space[1]), E. R. LORCH has considered linear transformations T in reflexive BANACH spaces[2]), uniformly bounded in the sense that the powers T^n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ have a common bound. All rotations fall under this type. LORCH points out that, even in HILBERT space, the spectral resolution of this type of transformations is investigated for the first time.

Now, in HILBERT space, Lorch's theorem is actually a consequence of the theorem on unitary transformations, owing to the fact that uniformly bounded transformations are *similar* to unitary ones. More precisely, we have

Theorem I. *Let T be a linear transformation in Hilbert space $\mathfrak{H}$, such that its powers T^n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are defined everywhere in $\mathfrak{H}$ and are uniformly bounded, i. e. $\|T^n\| \leqq k$ for some constant k. Then there exists a selfadjoint transformation Q, such that*

$$\frac{1}{k} I \leqq Q \leqq k I$$

and QTQ^{-1} is a unitary transformation.

For one-parameter groups of transformations we have the corresponding

Theorem II *Let T_s be a linear transformation in Hilbert space, depending on a real parameter s $(-\infty < s < \infty)$, uniformly bounded,*

---

1) E. R. LORCH, The integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces, *Transactions American Math. Society*, **49** (1941), pp. 18—40.

2) I. e., a BANACH space which is the adjoint space of its adjoint space.

i. e. $\|T_s\| \leq k$, *and possessing the group property*: $T_0 = I$; $T_s T_t = T_{s+t}$. *Then there exists a selfadjoint transformation* Q *such that*

$$\frac{1}{k} I \leq Q \leq kI$$

and QT_sQ^{-1} *is unitary.*

§. 2.

We shall make use of the *generalized limit* due to MAZUR and BANACH[3]). This is a complex-valued functional $L(\xi(s))$, defined for all complex-valued bounded functions $\xi(s)$ of the positive real variable s, and enjoying the following properties:

1) $L(a\xi(s) + b\eta(s)) = aL(\xi(s)) + bL(\eta(s))$,
2) $L(\xi(s)) \geq 0$ if $\xi(s) \geq 0$,
3) $L(\xi(s+a)) = L(\xi(s))$ for all $a > 0$,
4) $L(1) = 1$.

Let us recall its construction.

Denote by Ξ_c and Ξ_r respectively the set of all complex-valued and the set of all real-valued bounded functions $\xi(s)$. If $L(\xi(s))$ has been defined already for $\xi(s) \in \Xi_r$ in such a way that 1)—4) are fulfilled, then we have only to put $L(\xi(s)) = L(\xi_1(s)) + iL(\xi_2(s))$ for $\xi(s) = \xi_1(s) + i\xi_2(s) \in \Xi_c$.

Now, for $\xi(s) \in \Xi_r$, define $L(\xi(s))$ in the following way.

Put $p(\xi) = \min_\sigma \left[\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi(\sigma_k + s) \right]$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ running over all possible finite sets of positive real numbers. It may easily be verified that a) $p(c\xi) = cp(\xi)$ for $c \geq 0$, b) $p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta)$, c) $a \leq p(\xi) \leq b$ if $a \leq \xi(s) \leq b$ and d) $p(\xi(s) - \xi(s+a)) = p(\xi(s+a) - \xi(s)) = 0$.

Choose now a set $\{\xi\}$ of functions $\xi \in \Xi_r$, such that all elements of Ξ_r may be expressed as finite linear combinations of the elements of the set $\{\xi\}$. Let us arrange it in a (transfinite) well-ordered sequence $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\omega, \ldots, \xi_\alpha, \ldots$ Denote by G_γ (γ being an arbitrary ordinal number ≥ 1) the set of all finite linear combinations of the ξ_α with $\alpha < \gamma$. We have $G_{\gamma_1} \leq G_{\gamma_2}$ if $\gamma_1 < \gamma_2$, and there exists a first ordinal number Γ for which $G_\Gamma = \Xi_r$.

The elements of G_1 are of the form $\xi = c\xi_0$ with a real c. Put

---

[3]) S. BANACH. *Théorie des opérations linéaires* (Warsaw, 1932), p. 33, Theorem 3.

$L(\xi) = L(c\xi_0) = cp(\xi_0)$; this is a linear functional in G_1 with the property: $L(\xi) \leqq p(\xi)$.[4])

Suppose that the linear functional $L(\xi)$ has been defined already for all $\xi \in G_\alpha$ with $\alpha < \gamma$, and that we have $L(\xi) \leqq p(\xi)$. We shall extend its definition to G_γ, still preserving the relation $L(\xi) \leqq p(\xi)$.

Suppose first that γ has a predecessor, $\gamma = \beta + 1$. If $\xi_\gamma \in G_\beta$, then $G_\gamma = G_\beta$ and we have nothing to do. If ξ_γ does not belong to G_β, then the elements ξ of G_γ admit a unique representation $\xi = \eta + c\xi_\gamma$ with $\eta \in G_\beta$ and a real number c. If η' and $\eta'' \in G_\beta$, then

$$L(\eta'') - L(\eta') = L(\eta'' - \eta') \leqq p(\eta'' - \eta') =$$
$$= p((\eta'' + \xi_\gamma) + (-\eta' - \xi_\gamma)) \leqq p(\eta'' + \xi_\gamma) + p(-\eta' - \xi_\gamma),$$
$$-p(-\eta' - \xi_\gamma) - L(\eta') \leqq p(\eta'' + \xi_\gamma) - L(\eta''),$$

consequently,

$$m = \max_{\eta \in G_\beta} [-p(-\eta - \xi_\gamma) - L(\eta)] \text{ and } M = \min_{\eta \in G_\beta} [p(\eta + \xi_\gamma) - L(\eta)]$$

are finite and $m \leqq M$. Choose a number μ between m and M, and define $L(\xi) = L(\eta + c\xi_\gamma) = L(\eta) + c\mu$. This definition coincides on G_β evidently with the old one and is such that $L(\xi) \leqq p(\xi)$.

If γ is a limit-number, then $G_\gamma = \sum_{\alpha < \gamma} G_\alpha$ and $L(\xi)$ is therefore already defined on G_γ.

As $G_\Gamma = \Xi_r$, we have defined $L(\xi)$ by transfinite recursion on the whole Ξ_r; $L(\xi)$ is a linear real-valued functional and such that $L(\xi) \leqq p(\xi)$. The properties 1)—4) follow now quite easily: 1) is fulfilled by linearity, 2): if $\xi(s) \geqq 0$ then $-L(\xi) = L(-\xi) \leqq p(-\xi) \leqq 0$, 3): $\pm L(\xi(s) - \xi(s+a)) = L[\pm(\xi(s) - \xi(s+a))] \leqq p[\pm(\xi(s) - \xi(s+a))] = 0$, 4): $L(1) \leqq p(1) = 1$ and $-L(1) = L(-1) \leqq p(-1) = -1$ imply $L(1) = 1$.

From this notion of generalized limit for functions it is easy to derive a corresponding one for bounded sequences $\xi(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ with the properties:

1) $L(a\xi(n) + b\eta(n)) = aL(\xi(n)) + bL(\eta(n))$,
2) $L(\xi(n)) \geqq 0$ if $\xi(n) \geqq 0$,
3) $L(\xi(n_0 + n)) = L(\xi(n))$,
4) $L(1) = 1$.

We have only to define $L(\xi(n))$ as $L(\xi(s))$, where $\xi(s) = \xi([s])$, $[s]$ denoting the greatest integer contained in the real number s.

---

[4]) If $c \geqq 0$, then $L(\xi) = cp(\xi_0) = p(c\xi_0) = p(\xi)$; if $c < 0$, then $L(\xi) = cp(\xi_0) = -p(-c\xi_0) = -p(-\xi) = -p(-\xi) + p(\xi - \xi) \leqq -p(-\xi) + p(\xi) + p(-\xi) = p(\xi)$.

§. 3.

Let us now go onto the proof of Theorem I.

Let f and g be elements of $\mathfrak{R}$. The sequence $\xi(n)=(T^n f, T^n g)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ being bounded, $|\xi(n)|\leqq k^2\|f\|\,\|g\|$, we may put

$$\langle f,g\rangle = L(T^n f, T^n g).$$

By property 1) of the generalized limit, we have

$$\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, b_1 g_1 + b_2 g_2\rangle =$$
$$= a_1\bar{b}_1\langle f_1, g_1\rangle + a_1\bar{b}_2\langle f_1, g_2\rangle + a_2\bar{b}_1\langle f_2, g_1\rangle + a_2\bar{b}_2\langle f_2, g_2\rangle,$$

i. e., $\langle f, g\rangle$ is a hermitian bilinear form of the variable elements f and g. Furthermore, the inequalities

$$\frac{1}{k}\leqq\frac{\|T^n f\|}{\|T^{-n}T^n f\|}=\frac{\|T^n f\|}{\|f\|}\leqq k$$

imply, by the properties 1., 2. and 4., that

(1) $$\frac{1}{k^2}\|f\|^2\leqq\langle f,f\rangle\leqq k^2\|f\|^2.$$

By a known theorem on bounded hermitian bilinear forms[5]), there exists a selfadjoint transformation A such that $\langle f,g\rangle=(Af,g)$. We have, by (1),

(2) $$\frac{1}{k^2}I\leqq A\leqq k^2 I,$$

and by property 3),

$$(ATf, Tg) = L(T^{n+1}f, T^{n+1}g) = L(T^n f, T^n g) = (Af, g),$$

i. e.

(3) $$T^* A T = A.$$

Let Q be the positive selfadjoint square-root of A; we have, as a consequence of (2):

$$\frac{1}{k}I\leqq Q\leqq kI,$$
$$\frac{1}{k}I\leqq Q^{-1}\leqq kI.$$

It follows from (3) that

$$Q^{-1}(T^*QQT)Q^{-1} = Q^{-1}(QQ)Q^{-1} = I,$$
$$(QTQ^{-1})^*(QTQ^{-1}) = I.$$

Thus, $U=QTQ^{-1}$ is isometric. As it admits an inverse, namely $U^{-1}=QT^{-1}Q^{-1}$, it is also unitary. This completes the proof of Theorem I.

---

[5]) See e. g. M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space* (New York, 1932), p. 63, Theorem 2. 28.

The demonstration of Theorem II runs along the same lines. The transformation A has to be defined in this case by

$$(Af, g) = L(T_s f, T_s g),$$

where L denotes the generalized limit for functions.

§. 4.

The above proof being based on the notion of generalized limit, depends, as we have seen in §. 2, on Zermelo's well-ordering theorem. It is therefore worthy to observe that — at least in the case of a *separable* HILBERT space — Zermelo's theorem may be avoided, owing to the fact that, in this case, we do not need to define $L(\xi)$ for *all* bounded functions (or sequences), but only on a certain linear manifold of such functions (or sequences), determined by a denumerable subset of its elements.

Let us consider first the case of Theorem I.

Choose a (denumerable) complete system $f_0, f_1, f_2, \ldots$ of elements of the separable space $\mathfrak{H}$. Arrange the sequences

$$\xi^{(ijk)}(n) = (T^{n+i} f_j, T^{n+i} f_k) \qquad (i, j, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

in a single row:

$$\xi_0(n), \xi_1(n), \xi_2(n), \ldots$$

Let us construct the ascending sequence of linear manifolds $G_1 \subseteqq G_2 \subseteqq \subseteqq G_3 \subseteqq \ldots$ and $G_\omega = \prod_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$, and let us then define the functional $L(\xi(n))$ for all sequences $\xi(n) \in G_\omega$ in the same way as in § 2. If $\mathfrak{H}'$ denotes the linear manifold of all finite linear combinations of the elements $T^i f_k$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$, then $(T^{j+n} f, T^{j+n} g) \in G_\omega$ for any couple f, g of elements of $\mathfrak{H}'$ and any integer $j \geqq 0$. Thus

$$\langle f, g \rangle = L(T^n f, T^n g)$$

is defined for all $f, g \in \mathfrak{H}'$, is a bounded hermitian bilinear form and such that

$$\langle f, g \rangle = \langle Tf, Tg \rangle. \tag{4}$$

As $\langle f,g \rangle$ is bounded, its definition may be extended to the whole space $\mathfrak{H}$, the relation (4) holding for arbitrary elements f,g of $\mathfrak{H}$, by the continuity of T. The demonstration achieves as in §. 3.

Now we pass to Theorem II. In addition to its hypothesis, *let us suppose also that T_s depends continuously on s*, i. e. $T_s f \to T_t f$ if $s \to t$. Let the system $f_0, f_1, f_2, \ldots$ be as above. The set of functions

$(T_{r+s}f_j, T_{r+s}f_k)$ of s (with integer j,k and rational r) being denumerable, may be arranged in a sequence:

$$\xi_0(s), \xi_1(s), \xi_2(s), \ldots$$

Define the functional $L(\xi)$ on the linear manifold G_ω of all finite linear combinations of the $\xi_\nu(s)$ in the same way as in §. 2. If $\mathfrak{R}'$ denotes the linear manifold in $\mathfrak{R}$ formed by the finite linear combinations of the elements $T_r f_k$ (r rational, k integer), then the function $(T_{r+s}f, T_{r+s}g)$ of the variable s belongs to G_ω for any couple $f, g \in \mathfrak{R}'$. The form

$$\langle f,g\rangle = L(T_s f, T_s g)$$

is thus defined and we have

$$\langle f,g\rangle = \langle T_r f, T_r g\rangle. \tag{5}$$

The definition of the bounded form $\langle f,g\rangle$ may be extended to the whole space $\mathfrak{R}$, the relation (5) holding its validity, because T_r is a continuous transformation. Thus we have $\langle f,g\rangle = (Af,g)$ and $(Af,g) = (AT_r f, T_r g)$ for all rational numbers r. As T_s depends, by hypothesis, continuously on s, we have $(Af,g) = (AT_s f, T_s g)$ also for irrational s. That is, $A = T_s^* A T_s$, and the proof achieves in the same way as in §. 3.

(Received August 20, 1945.)

Integral formulae in the theory of convex curves.

By ALFRÉD RÉNYI in Budapest.

Introduction.

The definition of external parallel-curves of a convex curve can be formulated in many ways. For example, let us shift all supporting lines by the same distance outwards; the external parallel curve can be defined as the curve envelopped by these lines, or as the boundary of the domain which is the common part of all the negative half-planes of these lines. The first definition fails when using it to define internal parallel curves, because generally the curves thus obtained will not be convex, in fact not even simple Jordan-curves.

On the second way mentioned above, however, a useful definition of internal parallel curves can be obtained. The method of internal parallel curves has first been applied to isoperimetric problems by BÉLA V. SZ. NAGY[1]) by making use of an idea of F. RIESZ[2]) developed in connection with some other problems. Later on, G. BOL used the same method to give an extraordinary simple proof of the isoperimetric inequality[3]).

In the present paper the theory of internal parallel curves shall be developed further. Our main result is an explicit positive integral representation of the isoperimetric deficiency[4]). This is obtained by

---

[1]) B. v. SZ. NAGY, Über ein geometrisches Extremalproblem, *these Acta,* **9** (1939), pp. 253–257.

[2]) F. RIESZ, Sur une inégalité intégrale, *Journal of the London Math. Society,* **5** (1930), pp. 162–168.

[3]) G. BOL, Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität,* **1** (1943), pp. 27–36.

[4]) As far as I am aware the only known explicit representation of the isoperimetric deficiency is that of SANTALÓ, which also contains the results of BONNESEN. In spite of the apparent coincidence of the consequences, the investigations of SANTALÓ are built on a totally different ground, — the integral-geometry of BLASCHKE — and have nothing in common with this paper. See W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie,* I (Leipzig, Berlin, 1936), pp. 25–36.

introducing a function which we call the characteristic function of the curve. From our formula, besides other inequalities, there follows easily an improvement of the isoperimetric inequality given by Bonnesen[5]), [6]),

(2) $$P^2-4\pi A \geqq (P-2\pi\varrho)^2,$$

P denoting the periphery, A the area of the curve and ϱ the radius of the greatest inscribable circle.

Bol proves the isoperimetric inequality by showing that the isoperimetric deficiency of the internal parallel curves decreases when proceeding inwards. This is a consequence of the decrease of size only, and it would be false to conclude that the internal parallel curves show a gradually increasing resemblance to the circle. In fact, the very opposite of this is the case: we prove that the relative deficiency,

(3) $$\frac{P^2-4\pi A}{A},$$

increases monotonously.

Bonnesen gave also a second improvement[7]) of the isoperimetric inequality, namely:

(4) $$P^2-4\pi A \geqq (2\pi R-P)^2,$$

where R denotes the radius of the least circumscribable circle. (4) can also be proved by the method of internal parallel-curves. For this purpose the theory has to be generalized by employing internal "relative-parallel-curves"[8]). The method furnishes an explicit integral representation of Minkowski's deficiency,

(5) $$A_{12}^2-A_{11}A_{22},$$

where A_{11}, A_{22} denote the areas of the convex curves and A_{12} their "mixed area," as introduced by Minkowski. In full analogy to the special case an improvement of Minkowski's inequality is obtained, and by a simple lemma on quadratic equations, (4) follows therefrom. It is remarkable, that here generalization supplies fuller knowledge of the special case.

The introduction of the characteristic of a convex curve, and of its internal parallel curves, i. e., of the characteristic function, is the most important feature of these investigations. The isoperimetric deficiency of a curve is determined exclusively by its characteristic func-

---

[5]) T. Bonnesen—W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934), p. 113.

[6]) T. Bonnesen, *Les problèmes des isoperimètres* (Paris, 1929), pp. 59–63.

[7]) Bonnesen, l. c., p. 86; Bonnesen—Fenchel, l. c., p. 97.

[8]) G. Bol, Beweis einer Vermutung von H. Minkowski, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität,* 1 (1943), pp. 37–56.

tion, though the curve itself is far from being determined by it. The characteristic of a polygon can be evaluated by a simple trigonometric sum. For general curves the characteristic is defined by passing to the limit. An explicit representation of the characteristic for general curves can be obtained by using integrals of "non-additive functions of interval"[9]). This may only be mentioned here; the detailed discussion of this question would lead beyond the scope of this paper.

Part I.

Let us denote the area and periphery of the internal parallel curves $C(\mu)$ at the distance μ of a given convex curve C by $A(\mu)$ and $P(\mu)$. First let us consider the internal parallel curves of a polygon, which are polygons themselves, obtained by shifting each of the sides of the original polygon inwards by the distance μ. For sufficiently small values of μ the parallel polygons will have the same number of sides, and angles equal to those of the original polygon. By increasing μ, a "critical value" of μ is reached, at which one of the sides will shrink to a point, and thus the number of sides will be diminished. The angles of the parallel polygons after passing this critical value will be equal to those of the polygon, obtained from the original polygon by prolonging, until their point of intersection, the two sides of the latter, adjacent to the shrunken side. After passing the first critical value, the number of sides, and the angles, do not change until the second critical value is reached, and so on.

A simple calculation shows, that

$$-\frac{dA(\mu)}{d\mu}=P(\mu) \tag{6}$$

and

$$-\frac{dP(\mu)}{d\mu}=\varkappa(\mu) \tag{7}$$

where

$$\varkappa(\mu)=2\sum \operatorname{tg}\frac{\beta_k}{2} \tag{8}$$

(the β_k denote the external angles of $C(\mu)$). (7) holds, except at a finite number of points, viz. the critical values mentioned above, which are the points of discontinuity of $\varkappa(\mu)$.

$\varkappa(\mu)$, called characteristric function of the polygon $C(\mu)$, has a simple geometrical interpretation: it is equal to the double area of the polygon

---

9) F. Riesz, Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalles, *Verhandlungen des internationalen Math.-Kongresses, Zürich*, 1932, pp. 267–269.

— called, according to TH. KALUZA, the "form-figure," — having angles equal to those of $C(\mu)$ and circumscribed to the unit circle.

It follows, that $\varkappa(\mu)$ is increasing with μ, because between two critical values of μ the form-figure remains unaltered, and by passing a critical value the form-figure increases by the prolongation, until their point of intersection, of the two sides, adjacent to the side corresponding to that of $C(\mu)$ which, at the critical value in question, has shrunk to a point.

$\varkappa(\mu)$ being an increasing function, it follows by (7) that $-P(\mu)$ is a convex function.

Further, the form-figure being circumscribed to the unit circle, we have

$$\varkappa(\mu) \geqq 2\pi. \tag{9}$$

The characteristic $\varkappa = \varkappa(0)$ of a general convex curve C is defined as the greatest lower bound of the characteristics of the polygons circumscribed to C and formed by some of the tangents of the curve C. Similarly, $\varkappa(\mu)$ is defined as the characteristic of the curve $C(\mu)$.

The formulae (6) and (7) can be generalized for arbritrary convex curves, by passing to the limit, without any essential difficulty. A lemma of F. RIESZ[10]) is the only tool required. It follows from this lemma, that if a sequence of convex functions converges to a limit function — which is naturally convex itself too — the derivatives of the functions of the sequence converge to the derivative of the limit function, provided that the latter exists, that is, almost everywhere (precisely, with exception at most of an enumerable set of points.) Let us consider a sequence of polygons C_n converging to the curve C, each polygon being formed by some of thetangents of C and each polygon containing — besides new ones — the tangents forming the preceding polygon of the sequence. Let $A_n(\mu)$, $P_n(\mu)$ and $\varkappa_n(\mu)$ denote the area, periphery and characteristic function of the internal parallel polygons of C_n, it follows that

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\mu) = A(\mu)\,; \quad \lim_{n\to\infty} P_n(\mu) = P(\mu)\,; \quad \lim_{n\to\infty} \varkappa_n(\mu) = \varkappa(\mu).$$

Applying the lemma of F. RIESZ, mentioned above, (6) and (7) are proved to be valid, for arbitrary convex curves, almost everywhere.

It may be mentioned that if a curve has a tangent in every of its points, its characteristic is equal to 2π. In fact, for curves of this kind, circumscribed polygons, formed by tangents of the curve and having each of its external angles equal to $\frac{2\pi}{n}$ can be drawn, n being

[10]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, II, *Acta Math.*, **54** (1930), pp. 321–360, especially p. 353.

any integer. Thus, by the definition of the characteristic and taking (9) into account, we have

$$2\pi \leqq \varkappa \leqq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \tag{10}$$

and owing to

$$\lim_{n\to\infty} 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2\pi,$$

$\varkappa = 2\pi$ follows.

It can easily be seen that if ϱ denotes the radius of the greatest circle inscribable in the curve C, $C(\mu)$ shrunks for $\mu = \varrho$ to a point or to an interval, called the "kernel" of the curve. If the kernel is a point, it follows from (6) and (7) that

$$P = \int_0^\varrho \varkappa(\mu)\, d\mu \tag{11}$$

and

$$A = \int_0^\varrho P(\mu)\, d\mu. \tag{12}$$

If the kernel is an interval of the length K, we have, instead of (11),

$$P = 2K + \int_0^\varrho \varkappa(\mu)\, d\mu. \tag{11a}$$

In what follows, we suppose for the sake of brevity that the first case takes place, i. e., the kernel is a point. The second case offers no additional difficulties and can be treated in the same way, and — with obvious modifications — the same conclusions can be drawn.

In (11) the integral is taken in Lebesgue's sense, so that the exceptional set of measure zero, for which (7) does not hold, can be neglected.

Taking $C(\mu)$ for the original curve, we have from (11)

$$P(\mu) = \int_\mu^\varrho \varkappa(\lambda)\, d\lambda. \tag{13}$$

By substituting (13) into (12), it results

$$A = \int_0^\varrho \int_\mu^\varrho \varkappa(\lambda)\, d\lambda \cdot d\mu = \int_0^\varrho \mu \varkappa(\mu)\, d\mu. \tag{14}$$

By a well known transformation of the double integral,

$$P^2 = \left(\int_0^\varrho \varkappa(\mu)\, d\mu \right)^2 = \int_0^\varrho \int_0^\varrho \varkappa(\mu)\varkappa(\lambda)\, d\mu\, d\lambda = 2\int_0^\varrho \varkappa(\mu) \int_\mu^\varrho \varkappa(\lambda)\, d\lambda \cdot d\mu. \tag{15}$$

Combining (15) with (14) our explicit formula for the isoperimetric deficiency is obtained:

$$P^2-4\pi A=2\int_0^{\varrho}(\varkappa(\mu)-2\pi)\int_{\mu}^{\varrho}\varkappa(\lambda)\,d\lambda\cdot d\mu. \tag{16}$$

Owing to $\varkappa(\mu)\geqq 2\pi$ the positivity of the representation is obvious.

The inequality of BONNESEN can be obtained as follows:

$$2\int_0^{\varrho}(\varkappa(\mu)-2\pi)\int_{\mu}^{\varrho}\varkappa(\lambda)\,d\lambda\,d\mu\geqq 2\int_0^{\varrho}(\varkappa(\mu)-2\pi)\int_{\mu}^{\varrho}(\varkappa(\lambda)-2\pi)\,d\lambda\cdot d\mu=$$

$$=\left[\int_0^{\varrho}(\varkappa(\mu)-2\pi)\,d\mu\right]^2$$

and thus

$$P^2-4\pi A\geqq(P-2\pi\varrho)^2. \tag{17}$$

Another improvement of the isoperimetric inequality follows from the monotonity of $\varkappa(\mu)$; $\varkappa(\mu)\geqq\varkappa(0)=\varkappa$ and therefrom

$$P^2-4\pi A\geqq 2(\varkappa-2\pi)\int_0^{\varrho}\int_{\mu}^{\varrho}\varkappa(\lambda)\,d\lambda\cdot d\mu=2(\varkappa-2\pi)A,$$

that is

$$P^2-2\varkappa A\geqq 0. \tag{18}$$

This inequality has already been proved for polygons by LHUILIER[11]).

Another group of inequalities can be obtained from (14). We have

$$A-\frac{\varrho}{2}P=\int_0^{\varrho}\left(\lambda-\frac{\varrho}{2}\right)\varkappa(\lambda)\,d\lambda=\int_{\frac{\varrho}{2}}^{\varrho}\left(\lambda-\frac{\varrho}{2}\right)(\varkappa(\lambda)-\varkappa(\varrho-\lambda))\,d\lambda. \tag{19}$$

$\varkappa(\lambda)$ being an increasing function it follows

$$A-\frac{\varrho}{2}P\geqq 0. \tag{20}$$

On the other hand, an upper estimation of (19) can also be effected:

$$A-\frac{\varrho}{2}P\leqq\frac{\varrho}{2}\int_{\frac{\varrho}{2}}^{\varrho}[\varkappa(\lambda)-\varkappa(\varrho-\lambda)]\,d\lambda\leqq\frac{\varrho}{2}\left(2P\left(\frac{\varrho}{2}\right)-P\right);$$

that gives, combined with (20)

$$\frac{\varrho}{2}P\leqq A\leqq\varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right). \tag{21}$$

(20) combined with (17) gives the range of variation of ϱ if A and P are given[12]):

---

11) See L. FEJES, *Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben* (Kolozsvár, 1944), p. 19.

12) BONNESEN-FENCHEL, l. c., p. 82.

$$\frac{P-\sqrt{P^2-4\pi A}}{2\pi} \leqq \varrho \leqq \frac{2A}{P}. \tag{22}$$

The decrease of

$$D(\mu)=P^2(\mu)-4\pi A(\mu)$$

observed by Bol follows from

$$D'(\mu)=-2P(\mu)(\varkappa(\mu)-2\pi); \tag{23}$$

the increase of $d(\mu)=\dfrac{P^2(\mu)-4\pi A(\mu)}{A(\mu)}$ from

$$d'(\mu)=\frac{P(\mu)}{A^2(\mu)}(P^2(\mu)-2\varkappa(\mu)A(\mu)) \tag{24}$$

with respect to (18). In this connection it is worth mentioning that for external parallel curves the isoperimetric deficiency is constant, so that these problems do not occur there[13]).

Part II.

We now turn to the generalization of the results of the first part. Let $p(\varphi)$ denote the "supporting function"[14]) of the convex curve C. We have

$$P=\int_0^{2\pi} p(\varphi)\,d\varphi \tag{25}$$

and

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2(\varphi)-p'^2(\varphi))\,d\varphi. \tag{26}$$

The "mixed area" of two curves C_1, C_2 with supporting functions $p_1(\varphi)$, $p_2(\varphi)$ is defined by[15])

$$A_{12}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[p_1(\varphi)\,p_2(\varphi)-p_1'(\varphi)\,p_2'(\varphi)\Big]\,d\varphi. \tag{27}$$

If $C_2=C_1$ we have $A_{12}=A_1=A_2$, therefore A_1 and A_2 can be denoted by A_{11}, A_{22}, respectively. The inequality

$$A_{12}^2-A_{11}A_{22}\geqq 0 \tag{28}$$

is called the inequality of Minkowski. (28) contains the isoperimetric inequality, corresponding to the case when C_2 is the unit circle. The internal parallel curve, denoted by $C_1(\mu)$, of C_1 relatively to C_2, at the

13) H. Hadwiger, Eine elementare Ableitung der isoperimetrischen Ungleichungen für Polygone, *Commentarii Math. Helvetici,* **16** (1943–44), pp. 305—309.

14) "Stützfunktion"; see Bonnesen-Fenchel, l. c., p. 23.

15) Blaschke, l. c., p 34.

distance μ, is obtained by shifting the supporting line of C_1 belonging to the normal direction φ, inwards by the distance $\mu p_2(\varphi)$. Let $A_{11}(\mu)$ denote the area of $C_1(\mu)$, and $A_{12}(\mu)$ the mixed area of $C_1(\mu)$ and $C_2(\mu)$. The whole discussion of Part I can be repeated with $A_{11}(\mu)$ and $2A_{12}(\mu)$ instead of $A(\mu)$ and $P(\mu)$. If ϱ_{12} denotes the greatest number for which $\varrho_{13} C_2$ can be placed within C_1, we obtain instead of (11), (12), (16),

(29) $$A_{12} = \frac{1}{2} \int_0^{\varrho_{12}} \varkappa_{12}(\mu)\, d\mu,$$

(30) $$A_{11} = 2 \int_0^{\varrho_{12}} A_{12}(\mu)\, d\mu = \int_0^{\varrho_{12}} \mu \varkappa_{12}(\mu)\, d\mu$$

(31) $$A_{12}^2 - A_{11} A_{22} = \frac{1}{2} \int_0^{\varrho_{12}} (\varkappa_{12}(\mu) - 2A_{22}) \int_\mu^{\varrho_{12}} \varkappa_{12}(\lambda)\, d\lambda \cdot d\mu.$$

$\varkappa_{12}(\mu)$ is called the mixed characteristic function of the two curves C_1, C_2. Its definition is an obvious generalization of the definition of $\varkappa(\mu)$. We have — as a generalization of (9) —

(32) $$\varkappa_{12}(\mu) \geqq 2A_{22}.$$

It follows from (32) that

(33) $$A_{12}^2 - A_{11} A_{22} \geqq (A_{12} - A_{22}\varrho_{12})^2;$$

(33) contains (17) when C_2 is the unit circle. But (33) is by no means symmetrical. If the unit circle is taken for C_1 and for C_2 any convex curve C, we obtain a new inequality:

(34) $$P^2 - 4\pi A \geqq \left(P - \frac{2A}{R}\right)^2.$$

Now we use the following elementary

Lemma: *If* $b^2 - 4ac \geqq (b-2a)^2$ *then* $b^2 - 4ac \geqq (b-2c)^2$ *provided that* $\frac{c}{a} \geqq 0$.

This results from both inequalities being equivalent to $b \geqq a + c$, or $b \leqq a + c$ according to the common sign of a and c. This lemma expresses the following property of quadratic equations: if the equation $ax^2 + bx + c = 0$ has real roots α, β, the two pairs of points (α, β) and $\left(1, \frac{c}{a}\right)$ separate each other or not, according to $\frac{c}{a}$ being negative or positive.

Applying this lemma to (34), the second inequality of Bonnesen

(35) $$P^2-4\pi A \geqq (P-2\pi R)^2$$

follows.

The other inequalities of Part I have also their counterpart; for instance we have, as a generalization of (18),

(36) $$A_{12}^2-A_{11}\varkappa_{12} \geqq 0,$$

etc.

G. Bol extended the method of internal parallel curves to the case of three or more dimensions. Our results can also be generalized in this direction.

(Received January 18, 1946; revised February 27, 1946.)

A theorem on convex curves.

By I. S. GÁL in Budapest.

In his foregoing paper, A. RÉNYI has proved by analytical methods, besides other results, the following inequality for convex curves:

(1) $$A \leqq \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$$

where A deno the area of the curve, ϱ the radius of the greatest inscribable circle and $P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$ the periphery of the internal parallel curve at the distance $\frac{\varrho}{2}$.

In what follows an elementary proof of this inequality shall be given. We prove (1) for polygons; for general convex curves it follows by passing to the limit.

Our proof is based on the following

Lemma. If the convex polygon $(\ldots, B, C, D, E, \ldots)$ is augmented by prolonging the sides BC and DE until they meet at O, the increase of the left hand side of (1) is greater than that of the right hand side.

Proof. Two cases have to be distinguished. If the radius r of the circle externally tangential at CD to the triangle OCD is less than $\frac{\varrho}{2}$, the right hand side of (1) does not change at all, and thus the statement of our lemma is obvious. If however $r > \frac{\varrho}{2}$, we draw $B'C'$ $C'D'$ and $D'E'$ parallel to, and at the distance $\frac{\varrho}{2}$ from BC, CD and DE respectively. The point of intersection of the prolongations of $B'C'$ and $D'E'$ shall be denoted by O'. The triangles CDO and $C'D'O'$ are similar. The factor of proportionality is

(2) $$\frac{C'D'}{CD} = 1 - \frac{\varrho}{2r}.$$

By passing from the polygon $(\ldots, B, C, D, E, \ldots)$ to the polygon $(\ldots, B, O, D, \ldots)$, the left side of (1) is increased by

$$\Delta[A] = \frac{r}{2}(CO + OD - CD), \tag{3}$$

its right side by

$$\Delta\left[\varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)\right] = \varrho\,(C'O' + O'D' - C'D'). \tag{4}$$

Owing to (2), we get from (4)

$$\Delta\left[\varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)\right] = \varrho\left(1 - \frac{\varrho}{2r}\right)(CO + OD - CD). \tag{5}$$

Comparing (3) with (5), the statement of our lemma is reduced to the inequality

$$\varrho\left(1 - \frac{\varrho}{2r}\right) \leqq \frac{r}{2}, \text{ i. e. } 2r\varrho \leqq r^2 + \varrho^2.$$

Thus our lemma is proved.

Now the inequality (1) follows easily. In fact, removing the sides of the given convex polygon step by step, by prolonging two adjacent sides conforming to the above lemma, the difference $A - \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$ gets increased. As it is well known, the polygon has either three sides touching the inscribed circle in three points not lying on a half-circle, or two parallel sides touching the inscribed circle. Taking care that these sides shall not be removed, after a finite number of steps the polygon gets transformed to a triangle or a trapezium (eventually parallelogram), having the same inscribed circle. Now, for a triangle we have obviously $A = \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$; the same holds for a trapezium circumscribed to a circle. In the general case, replace the trapezium by another having the same inscribed circle, all sides of which, parallel to the corresponding sides of the original trapezium, touch that circle. Performing this operation, we have obviously

$$\Delta A = \Delta\left[\varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)\right];$$

thus, we have $A = \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$ in this case too. Consequently, $A - \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$ has not been positive for the original polygon, q. e. d.

(Received February 27, 1946.)

Eine Bemerkung zur Auflösung der eingeschachtelten Rekursion.

Von PAUL CSILLAG (†) in Budapest.

Man versteht unter einer rekursiven Funktion eine zahlentheoretische Funktion, die sich aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ mittels einer endlichen Kette von Substitutionen und Rekursionen aufbauen läßt. Der Begriff der Rekursion kann dabei in verschiedener Weise definiert werden. Man sagt z. B., daß eine Funktion $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ durch *eingeschachtelte* Rekursion aus gewissen Funktionen entsteht, falls zunächst $\varphi(0, a_1, \ldots, a_r)$ als eine dieser Funktionen, ferner für $\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r)$ ein Ausdruck angegeben ist, der aus den gegebenen Funktionen und aus $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ als Funktion von $a_1, \ldots, a_r$, unter Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle, durch Substitutionen aufgebaut wird. So können in der Definition auch eingeschachtelte Funktionswerte vorkommen, z. B.

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, a))).$$

RÓZSA PÉTER hat in ihren Untersuchungen über den Zusammenhang der verschiedenen Rekursionsbegriffe gezeigt[1]), daß sich eine solche Einschachtelung immer auflösen läßt, d. h., wird eine Funktion durch eine Kette von Substitutionen und eingeschachtelte Rekursionen aus 0 und $n+1$ aufgebaut, so kann sie auch mittels Substitutionen und uneingeschachtelte Rekursionen definiert werden. Diesen Beweis hat R. PÉTER in einer späteren Arbeit[2]) vereinfacht; nun möchte ich zeigen, daß er durch gleichzeitige Anwendung auf eine geeignet gewählte

(†) PAUL CSILLAG ist am 24. Dezember 1944 an einer jahrelang andauernden, durch die Kriegszeiten und die erlittene Verfolgung erschwerten, Krankheit gestorben. Vorliegende Arbeit wurde aus seinem Nachlaße von Frl. RÓZSA PÉTER unter Presse geordnet. (Bemerkung der Redaktion.)

[1]) R. PÉTER (POLITZER), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), S. 612–632.

[2]) PÉTER R., A rekurziv függvények elméletéhez, *Math. és Fiz. Lapok,* **42** (1935), S. 25–49 (ungarisch, mit deutschem Auszug). Diese Arbeit werde ich als bekannt voraussetzen.

spezielle Funktion noch übersichtlicher gemacht werden kann: sämtliche im Beweis teilnehmende rekursive Funktionen werden eben von der betreffenden speziellen Funktion geliefert.

Von nun an werde ich solche Funktionen rekursiv nennen, die sich ohne Anwendung von eingeschachtelten Funktionswerten definieren lassen.

Betrachten wir nun eine eingeschachtelte Rekursion. Wie R. PÉTER gezeigt hat, kann man sich dabei auf die Definition einer zweistelligen Funktion $\varphi(n, a)$ beschränken[2]), sogar mit der Normierung[3])

$$\varphi(0, a) = 1,$$

und sonst von folgender (von der Péterschen Bezeichnung unwesentlich abweichender) Form:

$$\varphi(n+1, a) = \beta_l(n, a, \varphi_1, \ldots, \varphi_l),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\varphi_i = \varphi_i(n, a) = \varphi(n, \beta_{i-1}(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}))$$

und $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$ rekursive Funktionen sind.

Der Wert von $\varphi(n+1, a)$ läßt sich hier sukzessive aus folgenden eingeschachtelten Werten berechnen:

$$\left.\begin{array}{r}
\beta_0(n, a), \\
\varphi_1 = \varphi(n, \beta_0(n, a)), \\
\beta_1(n, a, \varphi_1), \\
\varphi_2 = \varphi(n, \beta_1(n, a, \varphi_1)), \\
\beta_2(n, a, \varphi_1, \varphi_2), \\
\varphi_3 = \varphi(n, \beta_2(n, a, \varphi_1, \varphi_2)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_l = \varphi(n, \beta_{l-1}(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{l-1})), \\
\varphi(n+1, a) = \beta_l(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l).
\end{array}\right\} (K)$$

Der Gedanke der Auflösung dieser Einschachtelungen ist, daß eine rekursive Funktion $\psi(n, a)$ definiert wird, welche, für beliebige $n_1, n_2, \ldots, n_{i+1}, a$ und $i = 0, 1, 2, \ldots, l$, an der Stelle $n = p_0^i\, p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_{i+1}^{n_{i+1}}$ den Wert $\beta_i(n_1, a, \psi(n_2, a), \ldots, \psi(n_{i+1}, a))$ annimmt, wo $p_0 = 2$ und p_k die k-te ungerade Primzahl bedeutet. Als Anfangswert $\psi(0, a)$ kann die 0 gewählt werden und die Funktionen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$ werden in einer Funktion β_n zusammengefaßt, wo $\beta_n = 1$ für $n > l$ ist. Man kann nun zeigen, daß es eine rekursive Funktion $\omega(n)$ gibt, sodaß für alle n

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

In dieser Auflösung spielen die speziellen rekursive Funktionen $\gamma_i = p_0^i\, p_1^n\, p_2^{n_1} \ldots, p_{i+1}^{n_i}\, p_{i+2}^a$ eine wichtige Rolle. Auch diese können als β'

---

[3]) R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen*, 113 (1936), S. 489—527, insbesondere S. 496—497.

gewählt werden, und eben dies ist jener Spezialfall, den ich mit dem allgemeinen parallel laufend betrachten werde.

Es sei also

$$\beta(i, n, a, y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \beta_i(n, a, y_1, \ldots, y_i) & \text{falls } i \leq l, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend

$$\gamma(i, n, a, y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \gamma_i(n, a, y_1, \ldots, y_i) = p_0^i p_1^n p_2^{y_1} \ldots p_{i+1}^{y_i} p_{i+2}^a & \text{falls } i \leq l, \\ 1 & \text{sonst}; \end{cases}$$

ferner sei

$$\psi(0, a) = 0,$$
$$\psi(n, a) = \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, a), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, a)) \quad \text{für } n > 0$$

und entsprechend

$$\tau(0, a) = 0,$$
$$\tau(n, a) = \gamma(\nu_0, \nu_1, a, \tau(\nu_2, a), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, a)) \quad \text{für } n > 0,$$

wo $n = p_0^{\nu_0} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$, also $\nu_i = \pi_i(n)$ den Exponenten von p_i in der Primfaktorenzerlegung von n bedeutet. Da die in den Definitionen vorkommenden Exponenten von n mit den entsprechenden Exponenten von $\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1})$ bei beliebigem x übereinstimmen, gilt für alle $n > 0$, x beliebig:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(n, a) = \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, a), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, a)) = \psi(\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1}), a) \\ &\text{und} \\ &\tau(n, a) = \gamma(\nu_0, \nu_1, a, \tau(\nu_2, a), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, a)) = \tau(\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1}), a). \end{aligned}\right\} (*)$$

Daraus folgt die entscheidende „auflösende Eigenschaft" der Funktion $\psi(n, a)$: für alle v ist

$$\psi(n, \psi(v, a)) = \psi(\tau(n, v), a).$$

Denn für $n = 0$ ergibt sich das aus

$$\psi(0, \psi(v, a)) = 0 = \psi(\tau(0, v), a);$$

gilt ferner die Behauptung bereits für alle Werte kleiner als ein $n > 0$, so ist (da in (*) statt x auch v gesetzt werden kann)

$$\begin{aligned} \psi(n, \psi(v, a)) &= \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, \psi(v, a)), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, \psi(v, a))) = \\ &= \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\tau(\nu_2, v), a), \ldots, \psi(\tau(\nu_{l+1}, v), a)) = \\ &= \psi(\gamma(\nu_0, \nu_1, v, \tau(\nu_2, v), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, v)), a) = \\ &= \psi(\tau(n, v), a), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für n, und so auch allgemein.

Nun werde ich dieselbe Einschachtelungskette, aus welcher sich der Funktionswert $\varphi(n+1, a)$ aufbaut, auf die Funktion $\psi(n, a)$ — vorläufig auf einer unbestimmt gehaltenen Stelle b statt n — anwenden.

Sei also

$$\left.\begin{array}{ll}\beta^{(0)}=\beta^{(0)}(n,b,a)=\beta_0(n,a), & \psi_1=\psi_1(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(0)}),\\ \beta^{(1)}=\beta^{(1)}(n,b,a)=\beta_1(n,a,\psi_1), & \psi_2=\psi_2(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(1)}),\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots & \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \beta^{(l-1)}=\beta^{(l-1)}(n,b,a)=\beta_{l-1}(n,a,\psi_1,\ldots,\psi_{l-1}), & \psi_l=\psi_l(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(l-1)}),\\ \beta^{(l)}\;=\beta^{(l)}(n,b,a)\;=\beta_l(n,a,\psi_1,\ldots,\psi_l) & \end{array}\right\}(K^*)$$

und entsprechend

$$\begin{array}{ll}\gamma^{(0)}=\gamma^{(0)}(n,b,a)=\gamma_0(n,a), & \tau_1=\tau_1(n,b,a)=\tau(b,\gamma^{(0)}),\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots & \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \gamma^{(l-1)}=\gamma^{(l-1)}(n,b,a)=\gamma_{l-1}(n,a,\tau_1,\ldots,\tau_{l-1}), & \tau_l=\tau_l(n,b,a)=\tau(b,\gamma^{(l-1)}),\\ \gamma^{(l)}\;=\gamma^{(l)}(n,b,a)\;=\gamma_l(n,a,\tau_1,\ldots,\tau_l). & \end{array}$$

Mit Hilfe der letzteren lassen sich sämtliche Zwischenwerte der Einschachtelung als Werte der Funktion $\psi(n,a)$ ausdrücken wie folgt:

$$\beta^{(i)}(n,b,a)=\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),\ a) \qquad \text{für } i=0,1,2,\ldots,l$$

und

$$\psi_i(n,b,a)=\psi(\tau_i(n,b,0),\ a) \qquad \text{für } i=1,2,\ldots,l.$$

Es ist nämlich (da in (*) statt x auch 0 gesetzt werden kann)

$$\beta^{(0)}(n,b,a)=\beta_0(n,a)=\beta(0,n,a,0,\ldots,0)=\beta(0,n,a,\psi(0,a),\ldots,\psi(0,a))=$$
$$=\psi(\gamma(0,n,0,0,\ldots,0),a)=\psi(\gamma_0(n,0),a)=\psi(\gamma^{(0)}(n,b,0),a)$$

und demnach

$$\psi_1(n,b,a)=\psi(b,\psi(\gamma^{(0)}(n,b,0),a))=\psi(\tau(b,\gamma^{(0)}(n,b,0)),a)=$$
$$=\psi(\tau_1(n,b,0),a).$$

Angenommen nun, daß unsere Behauptungen für alle $\beta^{(k)}$ mit $k=0,1,\ldots,i-1$ und für alle ψ_k mit $k=1,2,\ldots,i$ bereits bewiesen sind, wo $i\leqq l$, es wird (statt x in (*) wieder 0 gesetzt)

$$\beta^{(i)}(n,b,a)=\beta_i(n,a,\psi_1,\ldots,\psi_i)=$$
$$=\beta_i(n,a,\psi(\tau_1(n,b,0),a),\ldots,\psi(\tau_i(n,b,0),a))=$$
$$=\beta(i,n,a,\psi(\tau_1(n,b,0),a),\ldots,\psi(\tau_i(n,b,0),a),\psi(0,a),\ldots,\psi(0,a))=$$
$$=\psi(\gamma(i,n,0,\tau_1(n,b,0),\ldots,\tau_i(n,b,0),0,\ldots,0),a)=$$
$$=\psi(\gamma_i(n,0,\tau_1(n,b,0),\ldots,\tau_i(n,b,0)),a)=$$
$$=\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),a)$$

und demnach, falls $i<l$,

$$\psi_{i+1}(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(i)}(n,b,a))=\psi(b,\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),a))=$$
$$=\psi(\tau(b,\gamma^{(i)}(n,b,0)),a)=\psi(\tau_{i+1}(n,b,0),a).$$

Für $i=l$ ergibt unsere Behauptung

$$\beta^{(l)}(n,b,a)=\beta_l(n,a,\psi_1,\ldots,\psi_l)=\psi(\gamma^{(l)}(n,b,0),a).$$

Demzufolge läßt sich die rekursive Funktion $\omega(n)$, für welche

$$\varphi(n,a)=\psi(\omega(n),a),$$

mit einem geeigneten Anfangswert durch

$$\omega(n+1) = \gamma^{(l)}(n, \omega(n), 0)$$

definieren. Damit auch

$$\psi(\omega(0), a) = \varphi(0, a) = 1$$

sein soll, sei z. B.

$$\omega(0) = 2^{l+1},$$

nach den Definitionen ist ja

$$\psi(2^{l+1}, a) = \beta(l+1, 0, a, 0, \ldots, 0) = 1.$$

Nehmen wir an, daß für ein n bereits

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

Dann kann in der Einschachtelungskette (K) für $\varphi(n, \ldots)$ überall $\psi(\omega(n), \ldots)$ gesetzt werden. Damit geht aber (K) in die Einschachtelunskette (K^*) der Werte $\psi(b, \ldots)$ für $b = \omega(n)$ über. Diese endet mit

$$\psi(\gamma^{(l)}(n, \omega(n), 0), a) = \psi(\omega(n+1), a)$$

und so ist

$$\varphi(n+1, a) = \psi(\omega(n+1), a), \qquad \text{q. e. d.}$$

Da nun sämtliche benutzte Hilfsfunktionen, und so auch $\psi(n, a)$ und $\omega(n)$ rekursiv sind, so läßt sich die eingeschachtelte Rekursion für $\varphi(n, a)$ tatsächlich in eine Definition ohne Einschachtelungen auflösen.

(Eingegangen am 9. März 1946.)

On quasi-primary ideals.

By LADISLAS FUCHS in Budapest.

In a domain of integrity with unit element there are known four, generally distinct representations of an ideal: the representation as intersection of (1) irreducible ideals, (2) primary ideals belonging to different prime ideals, (3) relative-prime-irreducible ideals, and finally (4) ideals without common divisor[1]). In the present paper I give a fifth representation of an ideal as intersection of quasi-primary ideals.

In the first part, after the definition of the quasi-primary ideals, their chief properties will be shown. Although the notion of the quasi-primary ideal is a generalization of that of the primary ideal, yet most of the theorems concerning the primary ideals remain true even for quasi-primary ideals; moreover, these theorems are characteristic for the quasi-primary ideals.

In the second part, it will be proved by making use of the maximal condition that every ideal is representable as intersection of a finite number of quasi-primary ideals; furthermore, the number of the components in a shortest representation as well as the prime ideals belonging to the quasi-primary ideals are uniquely determined. The proof based upon the notion of the radical is more simple than that of the corresponding theorem on primary ideals. Indeed, we do not need complete induction, because every prime ideal belonging to the quasi-primary ideals in a shortest representation is maximal. It will be shown that among the four Noetherian representations quoted above a shortest representation by means of quasi-primary ideals always can be fitted, in a certain sense, between (2) and (3).

Finally, in the third part, I examine how the quasi-primary ideals are applicable to rings of algebraic numbers and to the theory of polynomial ideals. It will be seen that the introduction of the quasi-primary ideals seems to be very useful especially in the last case.

---

[1]) See E. NOETHER, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Annalen*, 83 (1921), pp. 24--66.

§ 1. The quasi-primary ideals.

Let $\mathfrak{R}$ be a domain of integrity[2]) with unit element in which the maximal condition is satisfied. (The elements of $\mathfrak{R}$ shall be denoted with Greek letters.)

Definition 1. *The ideal $\mathfrak{q}$ of the ring $\mathfrak{R}$ is quasi-primary, if the congruence $\alpha\beta \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ implies that among the powers α^r and β^s there exists one which is $\equiv 0\,(\mathfrak{q})$; i. e. $\alpha\beta \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ and $\alpha^r \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r imply the existence of an s such that $\beta^s \equiv 0\,(\mathfrak{q})$.*

The definition can be expressed also in the following form: $\mathfrak{q}$ is quasi-primary if at least one of two conjugate divisors of zero[3]) of the residue-class ring $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ is nilpotent[4]).

Evidently, the definition of the quasi-primary ideals is more symmetrical than that of the primary ideals; furthermore, it is evident that every primary ideal is at the same time quasi-primary too; but it will be seen that the conversion is not always true: there exist quasi-primary ideals which are not primary.

From the maximal condition we obtain that every quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$ is also *strong*; i. e. if $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, but $\mathfrak{a}^r \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r, then there exists an s so that $\mathfrak{b}^s \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. The proof runs as follows.

The ideals $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ have finite bases (this follows immediately from the maximal condition): $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and $\mathfrak{b} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ respectively. Now, for every r we have $\mathfrak{a}^r \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$, thus there is an α which has no power in the ideal $\mathfrak{q}$. Indeed, supposing we should have $\alpha_i^{r_i} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for $i = 1, \dots, n$, then choose $r = \sum_{i=1}^{n} (r_i - 1) + 1$ and so $\mathfrak{a}^r = (\dots, \alpha_1^{t_1} \dots \alpha_n^{t_n}, \dots) \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, because at least for one i we have $t_i \geqq r_i$. This is a contradiction to our hypothesis that $\mathfrak{a}^r \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r. Now, for this α_j by hypothesis $\alpha_j\beta_l \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ $(l = 1, \dots, m)$; but $\alpha_j^t \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every t, consequently there exists an s_l such that $\beta_l^{s_l} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ $(l = 1, \dots, m)$. Let $s = \sum_{l=1}^{m} (s_l - 1) + 1$, then $\mathfrak{b}^s \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, q. e. d.

It is well known that the elements which have a power in the ideal $\mathfrak{a}$, form an ideal, the radical[5]) of $\mathfrak{a}$. Now we shall prove that the quasi-primary ideals can be defined by means of their radical as follows.

---

[2]) I. e., a commutative ring without divisors of zero.

[3]) $a \neq 0$ and $b \neq 0$ are conjugate divisors of zero if $ab = 0$.

[4]) I. e., *one of its powers is zero.*

[5]) For the notion of the radical see W. Krull, *Idealtheorie* (Berlin, 1935), p. 6. If $\mathfrak{r}$ is the radical of $\mathfrak{a}$, then of course $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{r}$.

Definition 2. *An ideal is quasi-primary if its radical is prime.*

Let $\mathfrak{p}$ be the radical of the quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$. If $\alpha\beta\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ but $\alpha\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, then there exists an integer t for which $\alpha^t\beta^t\equiv 0\,(\mathfrak{q})$, but $\alpha^{tr}\not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r; hence $\beta^{ts}\equiv 0\,(\mathfrak{q})$; i. e. $\beta\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Therefore $\mathfrak{p}$ is prime in fact. $\mathfrak{p}$ is the prime ideal belonging to the quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$.

Conversely, let the prime ideal $\mathfrak{p}$ be the radical of the ideal $\mathfrak{q}$. If $\alpha\beta\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ but $\alpha^r\not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r, then $\alpha\beta\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, but $\alpha\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ and this leads to the congruence $\beta\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Consequently $\beta^s\equiv 0\,(\mathfrak{q})$, that is to say, $\mathfrak{q}$ is in fact quasi-primary. $\mathfrak{q}$ is a quasi-primary ideal belonging to the prime ideal $\mathfrak{p}$.

Of course, the primary ideals have also the property that their radical is prime, but an ideal, the radical of which is prime, is not necessarily primary. An instance is given by VAN DER WAERDEN[6]): in the ring of the polynomials $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, where the a_i are rational integers and a_1 is divisible by 3, the ideal $\mathfrak{q}=(9x^2,3x^3,x^4,x^5,x^6)$ is not primary (because $9x^2\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ and $9^r\not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ for every r, but $x^2\not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$, though its radical $\mathfrak{p}=(3x,x^2,x^3)$ is prime.

As the radical of $\mathfrak{a}$ and that of $\mathfrak{a}^t$ are identical, $\mathfrak{a}^t$ is quasi-primary if and only if $\mathfrak{a}$ is quasi-primary too. Thus every power of a prime ideal as well as that of a primary or a quasi-primary ideal is quasi-primary; but a power of a prime ideal must not be primary; see the above instance of VAN DER WAERDEN where $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^2$.

From the second definition of the quasi-primary ideals it is evident that the least common multiple of the quasi-primary ideals $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_r$,

$$\mathfrak{m}=[\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_r]$$

is quasi-primary if and only if the least common multiple of the prime ideals $\mathfrak{p}_i$ belonging to the quasi-primary ideals $\mathfrak{q}_i$,

$$\mathfrak{r}=[\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r]$$

is prime[7]). The intersection of a finite number of prime ideals is prime only if one of them is a multiple of the others[8]); thus we have the following result:

Theorem 1. *The ideal $\mathfrak{m}=[\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_r]$ is quasi-primary if and only if among the prime ideals $\mathfrak{p}_i$ there is a $\mathfrak{p}_k$ such that $\mathfrak{p}_k\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i=1,\ldots,r)$.*

---

[6]) B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, vol. II (Berlin, 1940), p. 27.

[7]) The radical of the l. c. m. of ideals is the l. c. m. of the radicals.

[8]) If $[\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r]=\mathfrak{p}$ is prime, then $\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_r\equiv 0(\mathfrak{p})$, hence $\mathfrak{p}_k\equiv 0(\mathfrak{p})$ for a k, in consequence of the prime-property of $\mathfrak{p}$. Thus $\mathfrak{p}_k=\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{p}_i$.

By making use of the maximal condition we can prove the

Theorem 2. *A power of the prime ideal $\mathfrak{p}$ belonging to the quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$ is a multiple of $\mathfrak{q}$:*

$$\mathfrak{p}^r \equiv 0\,(\mathfrak{q}).$$

Taking $\mathfrak{p} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, the basis-elements γ_q have a power in the ideal $\mathfrak{q}$: $\gamma_q^{r_q} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. Let r have the value $r = \sum_{q=1}^{p} (r_q - 1) + 1$. Now

$$\mathfrak{p}^r = (\ldots, \gamma_1^{s_1} \ldots \gamma_p^{s_p}, \ldots) \equiv 0\,(\mathfrak{q})$$

$\left(\sum_{q=1}^{p} s_q = r\right)$, because at least for one of the subscripts q we have $s_q \geqq r_q$.

The least r for which $\mathfrak{p}^r \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, is called the *exponent* of $\mathfrak{q}$.

We see that the prime ideal $\mathfrak{p}$ belonging to the quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$ has the property:

$$\mathfrak{p}^r \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{1}$$

This relation is characteristic for $\mathfrak{p}$: if $\mathfrak{q}$ is quasi-primary, $\mathfrak{p}'$ is prime and $\mathfrak{p}'^{r'} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}'$, then $\mathfrak{p}'$ is the radical of $\mathfrak{q}$. Indeed, if $\mathfrak{p}$ is the radical of $\mathfrak{q}$, we have

$$\mathfrak{p}^r \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}', \text{ hence } \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}'$$

and

$$\mathfrak{p}'^{r'} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}, \text{ hence } \mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p},$$

whence $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ is obtained.

The relation (1) is characteristic even for quasi-primary ideals if $\mathfrak{p}$ is prime and $\mathfrak{p}^r \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$, then $\mathfrak{q}$ is quasi-primary. Moreover, we can prove the

Theorem 3. *If $\mathfrak{q}_1$ and $\mathfrak{q}_2$ are quasi-primary ideals belonging to the same prime ideal $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}_2$, then $\mathfrak{q}'$ is also quasi-primary belonging to the prime ideal $\mathfrak{p}$.*[9])

The radical $\mathfrak{p}'$ of $\mathfrak{q}'$ is divisor of the radical $\mathfrak{p}$ of $\mathfrak{q}_1$, because the elements of $\mathfrak{p}$ have a power in $\mathfrak{q}_1$ and so a fortiori in $\mathfrak{q}'$, i. e. $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}'$; similarly, the elements of $\mathfrak{p}'$ have a power in $\mathfrak{q}_2$, that is $\mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p}$. Consequently, we have $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. This means, the radical of $\mathfrak{q}'$ is prime; thus $\mathfrak{q}'$ is in fact quasi-primary.

It follows from theorem 3 that a relation $\mathfrak{q}^t \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ implies the quasi-primary property of $\mathfrak{q}'$ provided that $\mathfrak{q}$ is quasi-primary.

It is interesting to note that the quasi-primary ideals can be characterized in rings with maximal condition by theorems 2 and 3 as

[9]) This theorem is not true for primary ideals. It does not follow even from the hypothesis $\mathfrak{p}^r \subseteqq \mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{p}$ that $\mathfrak{q}'$ is primary. See the above example of VAN DER WAERDEN; $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

follows. *A quasi-primary ideal is either a power of a prime ideal or an intermediate ideal between two powers of one and the same prime ideal.*

The following theorem has no analogue in the theory of the primary ideals[10]).

Theorem 4. *If $\mathfrak{q}_1$ and $\mathfrak{q}_2$ are quasi-primary ideals belonging to the prime ideals $\mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{p}_2$ respectively, and $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_2$, then $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ is also quasi-primary belonging to the prime ideal $\mathfrak{p}_1$.*

Taking $\mathfrak{p}_1^{r_1} \subseteqq \mathfrak{q}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{p}_2^{r_2} \subseteqq \mathfrak{q}_2 \subseteqq \mathfrak{p}_2$, furthermore observing the evident facts that $\mathfrak{p}_1^{r_1+r_2} \subseteqq \mathfrak{p}_1^{r_1}\mathfrak{p}_2^{r_2}$ and $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$, we have for $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ the relation

$$\mathfrak{p}_1^{r_1+r_2} \subseteqq \mathfrak{p}_1^{r_1}\mathfrak{p}_2^{r_2} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1.$$

Hence we obtain by theorem 3 that $\mathfrak{q}$ is quasi-primary and indeed, its radical is $\mathfrak{p}_1$.

It is also worth remarking that the hypothesis of theorem 4 also implies that the greatest common divisor of $\mathfrak{q}_1$ and $\mathfrak{q}_2$, $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$, is quasi-primary belonging to the prime ideal $\mathfrak{p}_2$. In fact,

$$\mathfrak{q}_2 \subseteqq (\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) \subseteqq (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_2$$

and by theorem 3, $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ is quasi-primary.

§ 2. The representation of an ideal by means of quasi-primary ideals.

An ideal is called *reducible*, if it is the least common multiple of two of its proper divisors, and is called *irreducible*, if it is not reducible.

E. Noether[1]) proved that every ideal is the intersection of a finite number of irreducible ideals, if the maximal condition is satisfied. Every irreducible ideal is primary and so a fortiori quasi-primary; hence we have

Theorem 5. *Every ideal is the intersection of a finite number of quasi-primary ideals.*

A representation of the ideal $\mathfrak{a}$ as least common multiple of quasi-primary ideals,

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s],$$

is *shortest*, if none of the $\mathfrak{q}_i$ can be omitted and none of the intersections $[\mathfrak{q}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_p}]$ $(p > 1)$ is quasi-primary.

Now omit the superfluous $\mathfrak{q}_i$ of a given quasi-primary representation of $\mathfrak{a}$ and contract the quasi-primary ideals belonging to the

[10]) We can refer to the above example of van der Waerden; $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ is not primary.

non-minimal prime ideals of $\mathfrak{a}$ with a quasi-primary ideal belonging to such a minimal prime ideal of $\mathfrak{a}$ which has the non-minimal prime ideal as its divisor. In this way always quasi-primary ideals are obtained. Proceeding thus, after a finite set of contractions we get a shortest representation of $\mathfrak{a}$ as intersection of quasi-primary ideals.

The prime ideals belonging to the quasi-primary ideals which occur in a shortest representation of $\mathfrak{a}$ have the property that none of them is either a multiple or a divisor of another of them. Indeed, in the opposite case a contraction is possible.

For two shortest representations of $\mathfrak{a}$ the following theorem holds:

T h e o r e m 6. *Supposing that* $\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_s]=[\mathfrak{q}'_1,\ldots,\mathfrak{q}'_r]$ *are two shortest representations of the ideal* $\mathfrak{a}$ *as intersection of quasi-primary ideals; then* $s=r$ *and the prime ideals* $\mathfrak{p}_i$ *belonging to the quasi-primary ideals* $\mathfrak{q}_i$ *must be, without regard to their order, identical to the prime ideals* $\mathfrak{p}'$ *belonging to the quasi-primary ideals* $\mathfrak{q}'_j$.

This theorem is our main result; it can be proved as follows.

The radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{a}$ is of the form

$$\mathfrak{r}=[\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s]$$

and at the same time of the form

$$\mathfrak{r}=[\mathfrak{p}'_1,\ldots,\mathfrak{p}'_r].$$

The identity of these representations is to be shown.

From these two forms of $\mathfrak{r}$ no prime ideal can be omitted, because by hypothesis the representations of $\mathfrak{a}$ are shortest ones. Indeed, in the two representations of $\mathfrak{a}$ the prime ideals belonging to the quasi-primary ideals are the different minimal prime ideals of $\mathfrak{a}$; thus e. g.

$$[\mathfrak{p}_{i_1},\ldots,\mathfrak{p}_{i_p}]\equiv 0 \quad ([\mathfrak{p}_{i'_1},\ldots,\mathfrak{p}_{i'_q}])$$

is impossible if $i_{p'}\neq i'_{q'}$ for every $p'=1,\ldots,p$ and every $q'=1,\ldots,q$. For now $\mathfrak{p}_{i_1}\ldots\mathfrak{p}_{i_p}\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_{i'_1})$ and so, say, $\mathfrak{p}_{i_1}\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_{i'_1})$, i. e. because of $\mathfrak{p}_{i_1}\neq\mathfrak{p}_{i'_1}$, $\mathfrak{p}_{i'_1}$ would not be minimal. This is contradiction to the hypothesis that the representations of $\mathfrak{a}$ are shortest ones.

Now, if in the above two forms of $\mathfrak{r}$ the prime ideals would be different, then at least in one of these forms a maximal prime ideal would be found which occurs only in one of the forms. Indeed, let $\mathfrak{p}$ be such a prime ideal e. g. in the first representation of $\mathfrak{r}$ which does not occur in the second one. The other prime ideals of the first representation of $\mathfrak{r}$ are not divisors of $\mathfrak{p}$. If $\mathfrak{p}$ has no divisor even among the prime ideals of the second representation of $\mathfrak{r}$, then already we have found a suitable prime ideal. If $\mathfrak{p}$ has a divisor $\mathfrak{p}'$ among the $\mathfrak{p}'_j$, then $\mathfrak{p}'$ must be a proper divisor of $\mathfrak{p}$ because of $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{p}'$ being different ideals. This $\mathfrak{p}'$ has a divisor neither among the $\mathfrak{p}'_j$ nor among the $\mathfrak{p}_i$. The first part of our last statement is evident, the second one is also clear, because the divisor of $\mathfrak{p}'$ would be a divisor of $\mathfrak{p}$ and such an ideal does not exist among the $\mathfrak{p}_i$. This means, if the prime ideals of the two forms of $\mathfrak{r}$ are different, then there exists a maximal prime ideal, e. g. $\mathfrak{p}_1$, which occurs only in one of the two forms of $\mathfrak{r}$.

We consider this $\mathfrak{p}_1$ and form the ideal-quotient $\mathfrak{r} : \mathfrak{p}_1$:[11])

$$\mathfrak{r} : \mathfrak{p}_1 = [\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s : \mathfrak{p}_1] = [\mathfrak{p}_1' : \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r' : \mathfrak{p}_1].$$

If $\mathfrak{p}$ is prime and $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, then $\gamma\,\mathfrak{p}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ implies $\gamma \equiv 0\,(\mathfrak{p})$, this means $\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ if $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Therefore,

$$\mathfrak{r} : \mathfrak{p}_1 = [\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s] = [\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_r'] = \mathfrak{r}$$

($\mathfrak{o}$ is the unit ideal of $\mathfrak{R}$). Consequently, $\mathfrak{p}_1$ is superfluous in the first form of $\mathfrak{r}$. It follows from this contradiction that the prime ideals are the same in both forms of $\mathfrak{r}$.

Thus we have proved theorem 6.

We shall give also another proof of our theorem 6 by making use of the similar theorem concerning the primary ideals[12]). The representation of $\mathfrak{a}$ as intersection of primary ideals be already known:

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_n^*].$$

This representation can be considered as a representation of $\mathfrak{a}$ as intersection of quasi-primary ideals. From this representation a shortest quasi-primary representation is obtained by contracting certain primary ideals. This process is similar to that at the beginning of this section and so we need not repeat it. From the uniquely determined prime ideals belonging to the primary ideals in the primary representation of $\mathfrak{a}$, only the minimal prime ideals of $\mathfrak{a}$, determined also uniquely, remain, as the prime ideals belonging to the quasi-primary ideals in a shortest representation. Thus our theorem 6 is proved again[12]).

From the representation of $\mathfrak{a}$ as intersection of primary ideals the representation as intersection of relative-prime-irreducible ideals is obtained as follows[13]). Starting from a primary component of $\mathfrak{a}$, we take all the primary components belonging to such a prime ideal which is multiple or divisor of the prime ideal belonging to the original primary component; then take all the primary components, the prime ideal of which is multiple or divisor of a prime ideal belonging to a primary component obtained formerly, etc. The intersection of all the primary components of $\mathfrak{a}$ obtained in this way is a component of $\mathfrak{a}$ in its representation as intersection of relative-prime-irreducible ideals.

[11]) For the notion of the ideal-quotient and its properties, see e. g. B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 24.

[12]) See E. Noether, loc. cit.[1]), p. 44, and B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 35. — Our second proof is not of general validity, it will do only for quasi-primary representations got by contracting primary components!

[13]) This process is given by E. Noether; see her paper [1]), pp. 47–48.

From the preceding process it is evident that the primary ideals belonging to the same quasi-primary component of $\mathfrak{a}$ belong also to the same component of $\mathfrak{a}$ in its representation as intersection of relative-prime-irreducible ideals. Therefore, the representation as least common multiple of relative-prime-irreducible ideals is obtained by contracting certain quasi-primary ideals of a shortest quasi-primary representation. So, it is shown that there exists a representation of $\mathfrak{a}$ as intersection of quasi-primary ideals as an intermediate one between the representations by means of primary and relative-prime-irreducible ideals.

Now, in order to illustrate that the representation of an ideal as intersection of quasi-primary ideals differs, in general, both from the primary representation and from the relative-prime-irreducible representation, let us consider the ring of the polynomials in x and y with coefficients in a commutative field.

In this ring the ideal

$$\mathfrak{a} = (x^2 y, x y^2)$$

is not quasi-primary, because its radical, (xy) is not prime. $\mathfrak{a}$ has the primary representation

$$\mathfrak{a} = [(x), (y), (x^2, y^2)],$$

where the ideals (x) and (y) are prime, and (x^2, y^2) is primary belonging to the prime ideal (x, y).

From the radicals of the primary components of $\mathfrak{a}$ it is clear that both $[(x), (x^2, y^2)] = (x^2, xy^2)$ and $[(y), (x^2, y^2)] = (x^2 y, y^2)$ are quasi-primary; hence we have for $\mathfrak{a}$ the quasi-primary representations:

$$\mathfrak{a} = [(x), (x^2 y, y^2)] = [(x^2, xy^2), (y)] = [(x^2, xy^2), (x^2 y, y^2)]$$

with the prime ideals (x) and (y) respectively.

On the other hand, the process of NOETHER used above shows that $\mathfrak{a}$ is a relative-prime-irreducible ideal itself.

This example states that the quasi-primary representation of an ideal is, in general, different from the others and so, indeed, we have a right to consider the representation of an ideal by means of quasi-primary ideals as a fifth one.

§ 3. Applications to the theory of algebraic rings and polynomial ideals.

In the first part of this final section, we examine how our results change, if we suppose besides the maximal condition further axioms, especially[14]:

[14]) These axioms are those of B. L. VAN DER WAERDEN, loc. cit.[6]), p. 84. For the notion of entirely-closed ("ganz-abgeschlossen"), see ibidem, p. 78.

I. *every prime ideal is maximal in* $\mathfrak{R}$;

II. *the ring* $\mathfrak{R}$ *is entirely-closed in its quotient-field.*

In the first case the following theorem will be applied.

Theorem 7. *If the prime ideal* $\mathfrak{p}$ *belonging to the quasi-primary ideal* $\mathfrak{q}$ *is maximal in* $\mathfrak{R}$ (*i. e. has no proper divisor*), *then* $\mathfrak{q}$ *is primary.*

Let us consider the representation of $\mathfrak{q}$ as intersection of primary ideals:

$$\mathfrak{q} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_t^*];$$

$\mathfrak{q}$ is quasi-primary, so its radical

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t]$$

is prime ($\mathfrak{p}_{t'}$ belongs to $\mathfrak{q}_{t'}^*$). This is possible only in the case $\mathfrak{p}_1 = \ldots = \mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}$, because $\mathfrak{p}$ has no proper divisor. Now $\mathfrak{q}$ is primary as the least common multiple of the primary ideals $\mathfrak{q}_{t'}^*$ belonging to the same prime ideal $\mathfrak{p}$.[15])

Thus, if axiom I is true, every quasi-primary ideal is at the same time primary. Now, the intersection of the (quasi-) primary ideals belonging to different prime ideals is their product[16]), therefore, every ideal is the product of a finite number of (quasi-) primary ideals,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_s,$$

and the prime ideals $\mathfrak{p}_i$ belonging to $\mathfrak{q}_i$ ($i = 1, \ldots, s$) are uniquely determined.

In the case II the following theorem is obtained.

Theorem 8. *Every quasi-primary ideal is quasi-equal*[17]) *to* $\mathfrak{o}$ *or to a power of a prime ideal, if axiom II holds.*

A quasi-primary ideal has at most one *upper*[18]) prime ideal as divisor; so $\mathfrak{q}$ is quasi-equal to $\mathfrak{o}$ or to a product of equal upper prime ideals according as the prime ideal $\mathfrak{p}$ belonging to $\mathfrak{q}$ is not upper or it is. In the latter case the quasi-primary ideal is quasi-equal to a power of a prime ideal, q. e. d.

If in the ring $\mathfrak{R}$ the axioms I and II are simultaneously satisfied, then the principal theorem of the theory of ideals holds: *every ideal is the product of a finite number of uniquely determined prime-ideal-powers.*

Finally, we shall apply our results to ideals of a polynomial ring with coefficients in a commutative field[19]).

---

[15]) See B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 32.

[16]) See B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 45.

[17]) See B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 93.

[18]) See B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 96 ; he calls it "höheres Ideal".

[19]) The basis-theorem of Hilbert (see e. g. B. L. van der Waerden, loc. cit.[6]), p. 18) states that in this polynomial ring the maximal condition is satisfied. — The rudiments of the theory of polynomial ideals see ibidem, § 91.

The algebraic manifold $\mathfrak{M}$ of the polynomial ideal $\mathfrak{m}$ consists of the zeros of the polynomials of $\mathfrak{m}$. Now, to find the irreducible manifolds belonging to $\mathfrak{M}$, let us take a shortest representation of $\mathfrak{m}$ as intersection of quasi-primary ideals:

$$\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r].$$

$\mathfrak{M}$ is the union of the manifolds of the quasi-primary components. Thus it suffices to examine the irreducible manifolds of a quasi-primary ideal.

Let us consider the quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$ and its radical, the prime ideal $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p}$ belong to the same manifold. Indeed, the zeros of $\mathfrak{q}$ are at the same time zeros of $\mathfrak{p}$ and vice versa, because a relation

$$\mathfrak{p}^n \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$$

holds. The manifold of a prime ideal is irreducible and so the manifold of a quasi-primary ideal is also irreducible. Moreover, an irreducible manifold can belong only to a quasi-primary ideal:

Theorem 9. *The algebraic manifold $\mathfrak{N}$ of the ideal $\mathfrak{a}$ is irreducible if and only if $\mathfrak{a}$ is quasi-primary.*

The first part of our theorem we have already proved. To prove the second part of it, consider the radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{a}$. Even the ideal $\mathfrak{r}$ belongs to $\mathfrak{N}$, because the relation

$$\mathfrak{r}^n \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{r}$$

is true for any ideal $\mathfrak{a}$ and for its radical $\mathfrak{r}$. (The proof runs as that of theorem 2.) We have seen that $\mathfrak{r}$ is either prime or the intersection of a finite number of prime ideals,

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s].$$

(We may suppose that here the superfluous prime ideals have been already omitted.) In the latter case, we have the manifold $\mathfrak{N}$ consisting of the manifolds belonging to $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$, that is to say, $\mathfrak{N}$ is not irreducible. This is a contradiction to the hypothesis. Thus $\mathfrak{r}$ is prime and finally, $\mathfrak{a}$ is quasi-primary. This completes the proof of theorem 9.

Returning to the ideal $\mathfrak{m}$ we get the result:

Theorem 10. *The algebraic manifold of an ideal $\mathfrak{m}$ is the union of a finite number of irreducible algebraic manifolds. These irreducible algebraic manifolds are just all the irreducible manifolds belonging to the quasi-primary ideals of a shortest representation of $\mathfrak{m}$.*

Therefore, the representation of an ideal as intersection of quasi-primary ideals can be considered as the natural representation of the ideal from the point of view of algebraic manifolds.

(Received November 14, 1946.)

Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern"[1]).

Von L. RÉDEI in Szeged.

Nach zwei Arbeiten von SKOLEM[2]), [3]) über die Lösbarkeit der Kongruenzen dritten Grades nach einem Primzahlmodul habe ich in der Arbeit [1]) unter anderem die Anzahl der Wurzeln dieser Kongruenzen in jedem Falle genau bestimmt (s. Satz 1 in der Arbeit [1])). Mein Resultat bezieht sich viel allgemeiner auf die ähnliche Frage über die Gleichungen dritten Grades im endlichen Körper k mit q Elementen, unterworfen der einzigen Einschränkung, daß die Charakteristik p von 2, 3 verschieden ist. Hier werde ich diese Frage auf eine andere Art behandeln, und so wird die Antwort in einer neuen, überraschend eleganter Form erscheinen. Als wesentlich neues stellt sich heraus, daß die Anzahl der Wurzeln nur von einer Invariante (s. unten) der Gleichung abhängt[4]), und dabei erscheinen (im Gegensatz zur Arbeit [1])) beide Fälle $3|q-1$, $3|q+1$ in völliger Symmetrie. Ich hoffe, daß nach diesem Anfang

[1]) *Dieser Band*, S. 96—105. Diese Arbeit wird durch die vorliegende in keiner Hinsicht überflüssig gemacht. Die auf S. 97. aus dem *Zentralblatt für Math.* zitierten Resultate von SKOLEM sind mit der Einschränkung $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ zu verstehen, was das Referat unbemerkt ließ. Ohne diese Einschränkung lauten die Resultate einfacher (vgl. S. 104, Fußanmerkung [8])).

[2]) TH. SKOLEM, Zwei Sätze über kubische Kongruenzen, *Det Kongelige Norske Videnskaber Selskab Forhandlinger*, 10 (1937), S. 89—92. Diese Arbeit ist mir erst neulich bekannt geworden. Der Inhalt ist im wesentlichen die erste Hälfte von Satz 1 meiner Arbeit [1]) für den Spezialfall, daß k ein Primkörper ist, und ein Teil der darauffolgenden Formel (16_2). SKOLEM bedient sich in seiner Arbeit eines biquadratischen (Dirichletschen) Zahlkörpers.

[3]) Zitiert in der Arbeit [1]) auf S. 97.

[4]) Das ist merkwürdig aus dem Grunde, daß es drei Möglichkeiten (keine, eine oder drei Wurzeln) gibt. Im „klassischen" Fall, wo k der Körper der reellen Zahlen ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten (eine oder drei Wurzeln).

sich auch die Gleichungen höheren Grades in endlichen Körpern ähnlich behandeln lassen werden. Das klingt nicht unglaublich, da dieses Problem im bekannten Satz von KÖNIG-RADOS eine Antwort gewonnen hat, und zwar bestimmt dieser die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung (vom Grade $\leqq q-2$) in k aus einer einzigen Invariante, dem Rang der aus den Koeffizienten gebildeten zyklischen Matrix[5]). Ich bemerke noch, daß ich einige Hilfsmittel allgemeiner entwickle, als das zu unserem obigen Zweck nötig ist; auch werde ich am Schluß der Arbeit zeigen, wie die hier zu gewinnende neue Form von Satz 1 der Arbeit [1]) sich auch aus diesem Satz herleiten läßt. Übrigens haben die „alte" und „neue" Form der Lösung unseres Problems jede einen Vorteil über den anderen.

Ein Polynom in k nennen wir kurz ein k-Polynom. Irgendein Polynom mit rationalen Koeffizienten läßt sich üblicherweise auch als ein k-Polynom auffassen, wenn nur die Koeffizienten für p ganz sind (d. h. einen, zu p primen Nenner haben). Den (eindeutig bestimmen) endlichen Erweiterungskörper vom Grade n über k bezeichnen wir mit k_n.

Wir geben eine Gleichung dritten Grades in k in der allgemeinen Form

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

an, und setzen voraus, daß die Diskriminante $\neq 0$ ist. Dann sind die Wurzeln x_1, x_2, x_3 verschieden, sie liegen in k_1, k_2 oder k_3. Wir setzen

$$y_1=x_2-x_3, \qquad y_2=x_3-x_1, \qquad y_3=x_1-x_2 \tag{2}$$

und ähnlich

$$z_1=y_2-y_3, \qquad z_2=y_3-y_1, \qquad z_3=y_1-y_2, \tag{3}$$

d. h.

$$z_i=x_1+x_2+x_3-3x_i \qquad (i=1, 2, 3), \tag{4}$$

führen dann die Invariante[6])

$$\Delta=-\frac{(z_1 z_2 z_3)^2}{27\,(y_1 y_2 y_3)^2} \tag{5}$$

ein. Offenbar ist Δ eine (rationale) symmetrische Funktion der x_i, die sich also durch die a_i ausdrücken läßt. Genauer gesagt, $(y_1 y_2 y_3)^2$ und $z_1 z_2 z_3$ sind für sich symmetrisch in den x_i. Das erste von ihnen ist die Diskriminante von (1):

$$D=(y_1 y_2 y_3)^2=(x_1-x_2)^2\,(x_2-x_3)^2\,(x_3-x_1)^2, \tag{6}$$

---

[5]) Leider läßt sich dieser Rang schwer bestimmen. Das ist der Grund, daß der König-Radossche Satz bisher keine Anwendung fand. Es scheint eine schwere, aber sich lohnende Aufgabe zu sein, aus diesem Satz meine Resultate über die Anzahl der Wurzeln der Gleichungen dritten und vierten Grades abzuleiten.

[6]) Es ist nämlich Δ eine absolute Invariante gegenüber linearer Transformationen $x=ux'+v$ von (1).

das zweite ist:

$$P = z_1 z_2 z_3 = \frac{27}{a_0} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = \frac{27}{a_0} f\left(\frac{-a_1}{3a_0}\right). \tag{7}$$

Dann gilt[7])

$$\Delta = -\frac{P^2}{27D}. \tag{8}$$

Weiter führen wir für jede natürliche Zahl n die k-Polynome

$$\varphi_n(x) = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}x + \binom{n}{5}x^2 + \ldots = \frac{1}{2\sqrt{x}}((1+\sqrt{x})^n - (1-\sqrt{x})^n) \tag{9}$$

ein. Abgesehen vom uninteressanten Fall $p|n$ ist $\varphi_n(x)$ vom Grade $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bezeichnet. Zu unserer Frage über (1) wird $\varphi_n(x)$ nur für $n = q+1$, $\left[\frac{q+1}{3}\right]$ in Betracht kommen, ausführlich geschrieben:

$$\varphi_{q+1}(x) = 1 + x^{\frac{q-1}{2}} \tag{10}$$

und

$$\varphi_{\frac{q-1}{3}}(x) = \binom{\frac{q-1}{3}}{1} + \binom{\frac{q-1}{3}}{3}x + \binom{\frac{q-1}{3}}{5}x^2 + \ldots + \binom{\frac{q-1}{3}}{\frac{q-4}{3}}x^{\frac{q-7}{6}} \tag{11}$$

$$(3|q-1),$$

bzw.

$$\varphi_{\frac{q+1}{3}}(x) = \binom{\frac{q+1}{3}}{1} + \binom{\frac{q+1}{3}}{3}x + \binom{\frac{q+1}{3}}{5}x^2 + \ldots + \binom{\frac{q+1}{3}}{\frac{q-2}{3}}x^{\frac{q-5}{6}} \tag{12}$$

$$(3|q+1).$$

Alle drei (wie überhaupt jedes $\varphi_n(x)$ mit $2|n$) sind symmetrische Polynome, selbst (10) ist das eine der Eulerschen Polynome[8]) $1 \pm x^{\frac{q-1}{2}}$. Wir betonen, daß diese Polynome (10), (11), (12) (von (1) nicht) nur von k abhängen.

Der angekündigte Satz lautet so:

---

[7]) Ausführlich lautet $P = \frac{1}{a_0^3}(2a_1^3 - 9a_0 a_1 a_2 + 27a_0^2 a_3)$. Der zweite Faktor spielt in der Theorie der Invarianten eine Rolle. Nimmt man (1) in der Form $x^3 + ax + b = 0$ an, so ist einfach $D = -4a^3 - 27b^2$, $P = 27b$, $\Delta = \frac{27b^2}{4a^3 + 27b^2}$.

[8]) Diese zerfallen voll in k und haben zu Nullstellen alle (von 0 verschiedenen) Quadrate bzw. Nichtquadrate in k.

Satz 1. *Bezeichne ν die Anzahl der Wurzeln von* (1) *in k. Den Fall $\Delta = 0$ schließen wir aus*[9]). *Es ist dann und nur dann $\nu = 1$, wenn*

$$\varphi_{q+1}(-3\Delta) = 0. \tag{13}$$

Im anderen Fall ist $\nu = 0$ oder 3, letzteres dann und nur dann, wenn

$$\varphi_{\left[\frac{q+1}{3}\right]}(\Delta) = 0. \tag{14}$$

Die erste Hälfte des Satzes werden wir als Spezialfall aus folgendem allgemeinen Satz gewinnen[10]):

Satz 2. *Die Diskriminante eines k-Polynoms ohne mehrfachen Teiler ist dann und nur dann ein Quadrat in k; wenn die Anzahl der irreduzibilen Faktoren von geradem Grad eine gerade Zahl ist.*

Da die multiplikative Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente von k zyklisch und von gerader Ordnung ist, so genügt es wegen der multiplikativen Eigenschaft der Diskriminante zu beweisen, daß die Diskriminante eines irreduzibilen k-Polynoms $f(x)$ vom Grade n dann und nur dann ein Quadrat in k ist, wenn n ungerade ist. Die Wurzeln von $f(x)$ liegen k_n. Mit Hilfe eines erzeugenden Automorphismus S von k_n/k lassen sie sich in der Form $S^i\alpha$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ annehmen. Die Diskrikriminante von $f(x)$ ist das Quadrat von

$$\delta = \prod_{0 \leqq i < j \leqq n-1} (S^i\alpha - S^j\alpha).$$

Da offenbar $S\delta = (-1)^{n-1}\delta$ gilt, so liegt δ dann und nur dann in k, wenn $n-1$ gerade, d. h. n ungerade ist. Satz 2 ist also richtig.

Insbesondere für das k-Polynom $f(x)$ in (1) spricht dieser Satz aus, daß es dann und nur dann einen irreduzibilen Faktor zweiten Grades, d. h. eine einzige Nullstelle in k hat, wenn D, d. h. nach (8), -3Δ kein Quadrat in k ist. Nach (10) ist die Bedingung hierfür eben (13), womit wir die erste Hälfte von Satz 1 bewiesen haben.

Für das übrige setzen wir in k_2:

---

[9]) Im Fall $\Delta = 0$ ist $P = 0$, nach (7) hat also (1) die Wurzel $\frac{-a_1}{3a_0}$; dann ist nach Satz 1 der Arbeit [1]) $\nu = 1$ oder 3, je nachdem D kein Quadrat oder ein Quadrat in k ist. — Im Fall $\Delta \neq 0$ darf man in (13) und (14) Δ durch $\Delta' = \frac{1}{\Delta}$ ersetzen; das ist von Vorteil, wenn die Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ vorgelegt wird, denn dann berechnet man $\Delta' = 1 + \frac{4a^3}{27b^2}$ einfacher als Δ (vgl. [7])).

[10]) Mir war dieser einfache Satz bisher unbekannt. Für die Neuheit des Satzes spricht auch die Arbeit [2]) von Skolem, die im wesentlichen einen (verhältnismäßig komplizierten) Beweis für den Spezialfall enthält, wo k ein Primkörper und das vorgelegte Polynom vom dritten Grade ist.

(15) $$\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\varrho^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \quad \varrho^3 = 1\right).$$

Im Fall $3|q-1$ liegen ϱ, ϱ^2 in k, im Fall $3|q+1$ sind sie konjugiert in k_2/k.

Zunächst wollen wir (14) umgestalten. Für irgendein c ($\neq 0$) in k ist $\varphi_n(c)=0$ nach (9) äquivalent mit

(16) $$\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^n = 1.$$

Nach (8) können wir also (14) in der Form

(17) $$\left(\frac{P+\sqrt{-27D}}{P-\sqrt{-27D}}\right)^{\left[\frac{q+1}{3}\right]} = 1$$

schreiben. Der Nenner ist nach (6), (7) und (3) gleich

$$(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)-3y_1y_2y_3\sqrt{-3}.$$

Wegen (2) ist

(18) $$y_1+y_2+y_3=0,$$

und so bekommen wir weiter

$$(y_1-y_2)(y_1+2y_2)(-2y_1-y_2)+3y_1y_2(y_1+y_2)\sqrt{-3},$$

d. h.

$$-2y_1^3+3y_1^2y_2(-1+\sqrt{-3})+3y_1y_2^2(1+\sqrt{-3})+2y_2^3.$$

Dies ist nach (15) gleich $-2(y_1-\varrho y_2)^3$. Ähnliches gilt für den Zähler in (17) (mit ϱ^2 statt ϱ), und so geht dies in

(19) $$\left(\frac{y_1-\varrho^2 y_2}{y_1-\varrho y_2}\right)^{3\left[\frac{q+1}{3}\right]} = 1$$

über. Das ist die gewünschte andere Form von (14).

Zur zweiten Hälfte von Satz 1 genügt es zu beweisen, daß (19) im Fall $\nu=3$ richtig, im Fall $\nu=0$ falsch ist. Wir schicken die Bemerkung voraus, daß die Zuordnung $x \to x^q$ ein erzeugender Automophismus für jeden Relativkörper k_n/k ist. Im Fall $\nu=0$ wählen wir die Numerierung so, daß $x_1^q=x_2$ (also auch $x_2^q=x_3$, $x_3^q=x_1$) gilt. Dann gilt gleiches für die y_i.

Betrachten wir zuerst den Fall $3|q-1$. Dann ist der Exponent in (19) gleich $q-1$, und so läßt sich dies in der Form

(19') $$\left(\frac{y_1-\varrho^2 y_2}{y_1-\varrho y_2}\right)^q = \frac{y_1-\varrho^2 y_2}{y_1-\varrho y_2}$$

schreiben. Ist $\nu=3$, so liegt jedes y_i in k, und dann ist (19') richtig. Ist dagegen $\nu=0$, so ist die linke Seite von (19') mit Rücksicht auf (18) gleich

$$\frac{y_2-\varrho^2 y_3}{y_2-\varrho y_3}=\varrho\,\frac{\varrho y_2-y_3}{\varrho^2 y_2-y_3}=\varrho\,\frac{y_1+(1+\varrho)y_3}{y_1+(1+\varrho^2)y_2}=\varrho\,\frac{y_1-\varrho^2 y_2}{y_1-\varrho y_2},$$

folglich ist jetzt (19′) falsch.

Betrachten wir nun den Fall $\nu=0$. Jetzt ist der Exponent in (19) $q+1$, und so läßt sich dies in der Form

$$\left(\frac{y_1-\varrho^2 y_2}{y_1-\varrho y_2}\right)^q=\frac{y_1-\varrho y_2}{y_1-\varrho^2 y_2} \tag{19''}$$

schreiben. Wegen $\varrho^q=\varrho^2$ ist dies im Fall $\nu=3$ richtig. Dagegen im Fall $\nu=0$ ist die linke Seite nach einer ähnlichen Rechnung wie oben das ϱ^2-fache der rechten Seite, und so ist jetzt (19″) falsch. Damit haben wir Satz 1 bewiesen.

Um zu zeigen, daß sich Satz 1 auch aus Satz 1 der Arbeit [1]) gewinnen läßt, beweisen wir als Vorbereitung folgenden, auch an sich interessanten Satz (den wir zum genannten Zweck nur für $e=3$ anwenden werden).

Wir bezeichnen mit α, α' entweder ein Elementenpaar in k oder ein (über k) konjugiertes Elementenpaar in k_2, beidesmal eingeschränkt durch $\alpha \neq \pm\alpha'$, so daß also

$$\alpha=r(1+\sqrt{s}),\qquad \alpha'=r(1-\sqrt{s})\qquad (r, s \neq 0) \tag{20}$$

gesetzt werden kann mit eindeutig bestimmten r, s in k. Dann gilt der:

S a t z 3. *Ist $\alpha, \alpha' \in k$ und $\alpha\alpha'$ eine e-te Potenz in k mit $e \mid q-1$, $2 \nmid e$, so ist α (zugleich auch α') dann und nur dann eine e-te Potenz in k, wenn*

$$\varphi_{\frac{q-1}{e}}(s)=0. \tag{21}$$

Ist $\alpha, \alpha' \in k$, $e \mid q+1$ $(e>0)$, so ist α (zugleich auch α') dann und nur dann eine e-te Potenz in k_2, wenn

$$\varphi_{\frac{q+1}{e}}(s)=0. \tag{22}$$

Im ersten Fall ist nämlich $(\alpha\alpha')^{\frac{q-1}{e}}=1$, ferner ist α dann und nur dann eine e-te Potenz in k, wenn $\alpha^{\frac{q-1}{e}}=1$ ist. Da die linke Seite eine e-te Einheitswurzel in k, also gewiß $\neq -1$ ist, so darf diese Bedingungsgleichung durch

$$\alpha^{2\frac{q-1}{e}}=\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^{\frac{q-1}{e}}=1$$

ersetzt werden. Nach (20) und (16) ist dies in der Tat äquivalent mit (21).

Im zweiten Fall ist α dann und nur dann eine e-te Potenz in k_2, wenn

$$\alpha^{\frac{q^2-1}{e}}=1$$

ist. Wegen $\frac{q^2-1}{e}=q\frac{q+1}{e}-\frac{q+1}{e}$ und $\alpha^q=\alpha'$ geht diese Gleichung in

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{q-1}{e}}=1$$

über. Letztere ist wieder nach (20) und (16) äquivalent mit (22). Satz 3 haben wir also bewiesen.

Nunmehr können wir Satz 1 folgenderweise auch aus dem Satz 1 der Arbeit [1]) gewinnen. Da $\varDelta$ eine Invariante ist[6]), dürfen wir uns auf den Spezialfall $x^3+ax+b=0$ von (1) beschränken. Vor (15) haben wir schon gesehen, daß beide Sätze den Fall $\nu=1$ im wesentlichen gleich erledigen. Im anderen Fall ($\nu=0$ oder 3) ist nach dem Satz 1 der Arbeit [1]) dann und nur dann $\nu=3$, wenn

$$\alpha=-\frac{b}{2}+\frac{1}{18}\sqrt{-3D}=-\frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{-D}{27b^2}}\right)=-\frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{\varDelta}}\right)$$

eine dritte Potenz in k ($3|q-1$), bzw. k_2 ($3|q+1$) ist. Dabei gilt nach (6) der Arbeit [1]) $\alpha\alpha'=\left(\frac{-a}{3}\right)^3$, und so läßt sich Satz 3 mit $e=3,\ s=\frac{1}{\varDelta}$ anwenden. In den bezüglichen Bedigungsgleichungen (21), (22) läßt sich $\frac{1}{\varDelta}$ durch $\varDelta$ ersetzen, und dann können wir beide in der Form (14) schreiben. Das ist der gewünschte zweite Beweis von Satz 1.[11])

(Eingegangen am 16. Januar 1947.)

---

[11]) Wir bemerken noch folgendes. Aus (9) folgt $\varphi_{q-1}(x)=-(1-x)^{-1}\left(1-x^{\frac{q-1}{2}}\right)$ (vgl (10)). Weiter gilt allgemein $\varphi_n(x)\,|\,\varphi_{n'}(x)$ $(n|n')$. Hieraus folgt

$$\varphi_n(x)\,|\,1-x^{\frac{q-1}{2}}\quad(n|q-1),\qquad \varphi_n(x)\,|\,1+x^{\frac{q-1}{2}}\ (n|q+1),$$

und so zerfällt $\varphi_n(x)$ $(n|q\pm1)$ in k voll (vgl. [8])). Dies bezieht sich inbesondere auf $\varphi_{\left[\frac{q+1}{3}\right]}(x)$, und das bedeutet, daß im Satz 1 der Grad von (14) nicht erniedrigt werden kann. — Satz 1 wollen wir noch anders formulieren. Wir bezeichnen das vorhergenannte Polynom mit $A(x)$, setzen $B(x)=\varphi_{q+1}(-3x)=1+x^{\frac{q-1}{2}}$ bzw. $1-x^{\frac{q-1}{2}}$ je nachdem $3|q-1$ oder $3|q+1$ ist, und definieren das (ganze) Polynom $C(x)$ durch

$$1-x^{q-1}=A(x)\,B(x)\,C(x).$$

Dann läßt sich Satz 1 so aussprechen: Im Fall $\varDelta\neq0$ ist $\nu=3,1,0$, je nachdem $A(\varDelta), B(\varDelta), C(\varDelta)=0$ ist. — Fassen wir jetzt $\varphi_n(x)$ als ein ganzzahliges Polynom auf, so läßt sich obiges für den Spezialfall $q=p$ folgenderweise sagen: Für die Primzahlen von der Form $p=nt\pm1$ hat die Kongruenz $\varphi_n(x)\equiv0 \pmod p$ so viel Lösungen, wie der Grad ist. — Abgesehen vom Satz 1 gelten die Feststellungen dieser Arbeit auch für $p=3$.

Bibliographie.

Szőkefalvi Nagy Gyula. A geometriai szerkesztések elmélete (Universitas Francisco—Josephina, Acta Sctientiarum Mathematicarum et Naturalium, 18. füzet) VIII. + 87 oldal, Kolozsvár, 1943.

This book is based on the lectures given by the author at the Universities of Szeged and Kolozsvár as well as at a course for public school teachers. It is not the main purpose of the book to give special construction methods; it aims rather to give a concise outline of the general theory of geometrical constructions as complete, as possibile, in a form suitable to be used successfully by students as well as by teachers of mathematics. However, a plenty of concrete constructions are given everywhere it is needed. The author succeeded to reach his aim, besides the lucky choise of the matter dealt with, by means of its good arranging and, in several places, by means of essential simplifications of the known proofs.

The book is divided into seven chapters. In the first ond second one, the algebraic criteria of constructibility are discussed and applied to the classical problem of trisection, to the Delian problem, and to the theory of constructibility of regular polygons, including effective constructions.

After these foundations, the third chapter gives a concise exposition of the theory of constructions by restricted means, especially the theorem of MOHR—MASCHERONI and that of PONCELET—STEINER. The next chapter deals with the extended use of the ruler and the compass. Here comes turn of the theory of construction by paper-folding, based on a new definition, different from that used hitherto, but more natural. Using this definitions, all constructions by means of the ruler and compass can be performed by means of paper-folding too. A special chapter is devoted to the theorem of KORTUM—SMITH; here a much simpler and shorter proof than the known ones is given.

After a chapter giving a short account on geometrography, the book concludes by a chapter on the problem of squaring the circle, reproducing Schottky's proof of the LINDEMANN theorem.

I. S. Gál.

Solomon, Jacques: Protons, Neutrons, Neutrinos, XII + 225 pages, Paris, Gauthier—Villars, 1939.

C'est un excellent ouvrage rendant complete de la marche générale de nos connaissances sur la structure et les propriétés fondamentales de ces éléments constitutifs de la matière que sont les protons et les neutrons ainsi que d'un élément nouveau hypothétique, nommé: le neutrino. Rappelons que le *neutron* (découvert en 1932 par CHADVICK) est une particule élémentaire neutre de masse à peu près égale à celle du *proton* (noyau de l'atome *H)*. Tandis que l'existence de ces deux particules est un fait expérimental, ainsi que, l'existence des électrons et des positrons, le par W. PAULI afin de permettre que les lois de conservation (de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment angulaire) soient respectées même dans les intéractions nucléaires. Cette hypothèse s'est montrée très féconde. Elle a permis — entre autres — de rendre compte des traits essentieles de la désintégration β et de l'allure des forces entre un proton et un neutron.

Béla de Sz. Nagy.

Désirant de renouveler les *liens* interrompus par les événements tristes des dernières années, la redaction prie nos anciens collaborateurs at abonnés ainsi que les institutions scientifiques et les périodiques avec lesquelles nous étions en relations d'échange de vouloir bien nous indiquer leurs adresses actuelles et le dernier fascicule reçu.

Prix d'abonnement du volume courant (à 256 pages au moins): 4 dollars (U. S. A.), ou des ouvrages mathématiques du même prix, parus pendant la guerre.

Nous signalons et autant que possible nous analysons les *ouvrages envoyés* par MM. les auteurs et les éditeurs.

Adresse postale: Acta Scientiarum Mathematicarum, Institut Bolyai de l'Université, 2. Baross-u., Szeged, Hongrie.

The Editors are desirous to re-establish their former *relations abroad*, interrupted by the sorrowful events of these last years. They invite their former contributors, subscribers, scientific institutions as well as the Editorial Boards of periodicals with which they have had connections before the war to let them know their present addresses and the last number which has reached them.

Subscription price for the current volume (of 256 pages at least): 4 U. S. A.-dollars, or mathematical works of the same price, edited during the war.

Books sent on for review by author or publisher are announced and as far as possible discussed.

Postal address: Acta Scientiarum Mathematicarum, The Bolyai Institute of the University, 2 Baross-u., Szeged, Hungary.

Die Schriftleitung ist bestrebt, unsere infolge der bedauerlichen Ereignisse der letzten Jahre zerrissenen *Beziehungen* wieder aufzunehmen. Wir bitten daher unsere früheren Mitarbeiter, Abonnenten, sowie die wissenschaftlichen Institute und Zeitschriften, die mit uns in Tauschbeziehung waren, ihre gegenwärtigen Anschriften und die Nummer des letzten erhaltenen Heftes uns mitteilen zu wollen.

Bezugspreis des laufenden Bandes (wenigstens 256 Seiten): 4 U. S. A.-Dollars oder während des Krieges erschienene mathematische Werke vom selben Preis.

Die von Verfassern oder Verlegern *eingesandten Werke* werden angezeigt und tunlichst besprochen.

Postanschrift: Acta Scientiarum Mathematicarum, Bolyai-Institut der Universität, Szeged, Ungarn, Baross-u. 2.

INDEX — TARTALOM.

PRINTED IN HUNGARY

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R. T. 47—101
Felelős nyomdavezető : Kiss István igazgató