ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

SECTIO SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. de SZ. NAGY, GY. de SZ. NAGY,
L. RÉDEI et F. RIESZ

ACTA

SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XI.

FASC. 4.

SZEGED, 15. VII. 1948.

MINISTRO RELIGIONIS PUBLICAEQUE INSTRUCTIONIS ADIUVANTE
EDIDIT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KALMÁR LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, SZŐKEFALVI NAGY GYULA, RÉDEI LÁSZLÓ és RIESZ FRIGYES

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

XI. KÖTET.

4. FÜZET.

SZEGED, 1948. július 15.

A VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTER TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

On a recent generalisation of G. D. Birkhoff's ergodic theorem.

By FREDERICK RIESZ in Budapest.

I.

Quite recently, in a joint paper, N. DUNFORD and D. S. MILLER have given a most surprising generalisation of Birkhoff's famous theorem[1]). The purpose of the present paper is to work out a simple proof of the generalised theorem, running on the same lines as that one given by the author, a few years ago, for the original theorem[2]). The latter was based upon the following elementary lemma on numerical sequences.

Lemma A. *Given a real, finite sequence $a_1, a_2, \dots, a_n$ and an integer $m \leqq n$, let us consider, if there are any, the sums $a_k + a_{k+1} + \dots + a_l$ of positive value, formed of at most m successive terms of the given sequence. Then the sum of all the a_k figuring as beginning terms in one at least of the said sums, is itself positive.*

For the sake of completeness, let us recall the main lines of our argument. First, to prove the lemma, let a_{k_1} be the first of the "beginning" terms and $a_{k_1} + \dots + a_{l_1}$ the shortest of the positive sums starting from a_{k_1}. Then all terms of this sum are figuring amongst our beginning terms. If not so, if, say, a_h, $k_1 < h \leqq l_1$, would not figure amongst them, then $a_h + \dots + a_{l_1} \leqq 0$ and so $a_{k_1} + \dots + a_{h-1} > 0$ and this sum were shorter than that running from a_{k_1} to a_{l_1}. The same procedure, applied on the remaining terms $a_{l_1+1}, \dots$, leads to a sum $a_{k_2} + \dots + a_{l_2} > 0$ and so on, until all the beginning terms have come in, which concludes the proof.

Next, consider a measurable set Ω, of finite or infinite measure, measure and integral being defined as by LEBESGUE or, more generally, with respect to a distribution of positive masses.

---

1) N. DUNFORD and D. S. MILLER, On the ergodic theorem, *Transactions American Math. Society,* **60** (1946), pp. 538—549.

2) F. RIESZ, Sur quelques problèmes de la théorie ergodique, *Matematikai és Fizikai Lapok,* 49 (1942), pp. 34—62 (in Hungarian, with an abstract in French); Sur la théorie ergodique, *Commentarii Math. Helvetici,* 17 (1944), pp. 221—239.

Let T be a mapping of Ω into itself, not necessarily one-to-one and let us suppose T to be measure-preserving in the sense that, for any measurable set e and its map Te, the set $T^{-1}(Te)$ of points P whose images belong to Te, is of the same measure as Te. Then starting witha summable function $f_1(P)$ and putting $f_k(P)=f_1(T^{k-1}P)$, Birkhoff's theorem states that *the arithmetical mean of* $f_1, \ldots, f_n$ *converges, almost everywhere* (briefly a. e.) *to a summable function* $\varphi(P)$, *invariant with respect to the mapping* T.

Let us remind that Birkhoff's original statement deals only with the one-to-one case, but there is no real difficulty in passing to the more general one. As to Ω, we restrict ourselves, in the first two sections, to the case of finite measure; in fact, our argument for the case of infinite measure seems, at first sight, not to apply immediately to the generalisation to follow, dealing with no measure-preserving mappings.

Birkhoff's original proof was based, in substance, upon the following fact, applied in a slightly different form and which he has established by means of an ingenious dismemberment of the intervening point sets, but which is also an easy consequence of Lemma A.

Lemma B[3]). *Let be E an invariant set of points P for which the least upper bound of the arithmetical means* $\frac{1}{n}(f_1(P)+\ldots+f_n(P))$ *is positive. Then*

$$\int_E f_1(P) \geqq 0. \tag{1}$$

Proof. Let $E^{(m)}$ be the set of points P of E for which one at least of the sums

$$\sum_1^l f_k(P) \qquad (l \leqq m)$$

is positive. The sets $E^{(m)}$, increasing with m, are finally filling up the set E. So, instead of (1), it suffices to verify the similar inequality

$$\int_{E^{(m)}} f_1(P) \geqq 0. \tag{2}$$

To this effect, apply lemma A to the finite sequence $f_1(P), \ldots, f_{n+m}(P)$ (with $n+m$ in place of n), forming for each P the sum of the "beginning" terms. This sum being $\geqq 0$, the same is true for its integral and so

$$\sum_1^{n+m} \int_{E_k} f_k(P) \geqq 0, \tag{3}$$

---

[3]) As a matter of fact, this lemma, due to Yosida and Kakutani and called by its authors the "maximal ergodic theorem", differs from that of Birkhoff only that it deals with the least upper bound in place of the upper limit.

where E_k means the set of points P for which $f_k(P)$ is a beginning term.

Again, obviously, for $k \leqq n$ we have $TE_k = E_{k-1}$, $E_k = T^{-1}E_{k-1}$ and as T preserves the measure and so the integral, the first n integrals in (3) are equal and as $E_1 = E^{(m)}$, their common value is the same which figures in (2). On the other hand, the last m integrals in (3) are dominated by the integral of $|f_1(P)|$ over Ω. Therefore, from (3),

$$n\int_{E^{(m)}} f_1(P) + m\int_{\Omega} |f_1(P)| \geqq 0$$

whence, m being fixed, (2) follows as $n \to \infty$. So Lemma B is proved.

Frome here on, the proof of Birkhoff's theorem runs on the usual line. For any pair of values α, β where $\alpha > \beta$, consider the set $E_{\alpha\beta}$ of all points for which

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f_k(P) > \alpha$$

and, at the same time,

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f_k(P) < \beta.$$

The set $E_{\alpha\beta}$ is manifestly invariant with respect to T, so that it may play the part of E; moreover, applying Lemma B to the functions $f_1(P) - \alpha$ and $\beta - f_1(P)$ in place of $f_1(P)$, respectively, the corresponding set E is identical with $E_{\alpha\beta}$. So, by Lemma B,

$$\int_{E_{\alpha\beta}} (f_1(P) - \alpha) \geqq 0, \quad \int_{E_{\alpha\beta}} (\beta - f_1(P)) \geqq 0$$

and adding, we have

$$\int_{E_{\alpha\beta}} (\beta - \alpha) \geqq 0.$$

As $\alpha > \beta$, this means that $E_{\alpha\beta}$ has to be of measure 0. Finally let α, β run over all rational pairs; then $\sum E_{\alpha\beta}$, sum of a denumerable sequence of nullsets, is itself a nullset and so the limit $\varphi(P)$ of the above mean exists a. e. Since, moreover,

$$\int_{\Omega} \left| \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f_k(P) \right| \leqq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{1}^{n} |f_k(P)| = \int_{\Omega} |f_1(P)|,$$

the limit $\varphi(P)$ is summable on account of Fatou's theorem and so finite a. e.

The invariance of $\varphi(P)$ is, as well known, an immediate consequence of the equation

$$T\left[\frac{1}{n}(f_1 + \ldots + f_n)\right] = \frac{n+1}{n}\left[\frac{1}{n+1}(f_1 + \ldots + f_{n+1})\right] - \frac{f_1}{n}.$$

Thus the proof is concluded. To say a few words about the "integral" form of the theorem in which the iterated mappings T^k are replaced by a group T_t depending upon a continuous parameter t, it is well known how by means of a simple artifice, due to E. HOPF and KHINTCHINE, the corresponding problem may be reduced to the discrete case. It is, however, not without interest to observe that the above argument may be adapted so as to lead directly to the "integral" formulation. One has only to use, instead of Lemma A, the following lemma, equally easy to prove. *Given, for $a \leqq t \leqq b$, a summable function $g(t)$ and a length d, $0 < d \leqq b-a$, let be e the set of points t_0, if there are any, for which there exists an $h < d$ such that the integral of $g(t)$ from t_0 to t_0+h is positive. Then the integral of $g(t)$ over the set e is* $\geqq 0$. This lemma is but a corollary of the following when applied to the integral $G(t)$ of $g(t)$.

Let $G(t)$ be continuous for $a \leqq t \leqq b$ and for a given d, $0 < d \leqq b-a$, consider the set e of all interior points t for which there exists a t', $t < t' < t+d$, so that $G(t) < G(t')$. Then e is an open set, composed of intervals (a_k, b_k) for each of which $G(a_k) \leqq G(b_k)$.

This form of our lemma is but a slight modification of another, used by the author in 1932 to prove the differentiability a. e. of monotone functions as well as a much important inequality of HARDY and LITTLEWOOD[4]). Its proof runs on the same lines.

II.

Now let us turn over to our proper subject, dealing with the generalisation of Birkhoff's theorem by DUNFORD and MILLER. Instead of supposing the mapping to be measure-preserving, they put *the more general hypothesis that, for a fixed constant K and for any measurable set e,*

$$(4) \qquad \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} |T^{-k} e| \leqq K|e|$$

where $|e|$ denotes the measure of e. *From there, at least when Ω is of finite measure, they draw the same conclusion as* BIRKHOFF. In fact, they prove that the said conclusion i. e. the actual, pointwise convergence a. e. of the arithmetical mean of $f_1, \ldots, f_n$ is a consequence of a sort of mean convergence and that the latter is equivalent to the hypothesis (4).

---

[4]) F. RIESZ, Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle, *Verhandlungen des internationalen Math. Kongresses Zürich* 1932, vol. 1, pp. 258—269; Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood, *Journal London Math. Society*, 7 (1932), pp. 1—13. See also G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, *Inequalities* (Cambridge, 1934), p. 293.

In the present paper, I wish to show how the same result may be obtained by means of a slight modification of our above argument.

To tell the whole truth, DUNFORD and MILLER are going farther; in fact, they establish the same conclusion for a group of mappings depending on several parameters, like it has been done by DUNFORD for von Neumann's mean ergodic theorem and by N. WIENER for Birkhoff's theorem[5]). The present argument seems not to apply to this more general case. So we have to restrict ourselves to the case of a single T and its iterates or to that of a group T_t depending on a single parameter t. We content ourselves to expose our argument for the former case, letting the latter to the reader.

In addition to Lemma A, we need another lemma, dealing with infinite numerical sequences.

Lemma C. *Let $a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of positive terms and assume that for a fixed constant K,*

$$\frac{1}{n-h}(a_{h+1}+\ldots+a_n)\leqq Ka_h \tag{5}$$

for any n and any $h<n$. Then $a_n=o(n)$.

(Observe that the evaluation $a_n=O(n)$ is obvious but what we need is the fact that $a_n=o(n)$.)

Proof. Adding $K(a_{h+1}+\ldots+a_n)$ to both sides of (5) and dividing by K, we get

$$a_h+\ldots+a_n\geqq\left(1+\frac{1}{(n-h)K}\right)(a_{h+1}+\ldots+a_n).$$

Putting $h=2,3,\ldots,n-1$ and multiplying, we have

$$a_2+\ldots+a_n\geqq a_n\prod_{h=2}^{n-1}\left(1+\frac{1}{(n-h)K}\right).$$

Confronting this with the case $h=1$ of (5) we get

$$a_n\leqq\frac{(n-1)Ka_1}{\prod\limits_{h=2}^{n-1}\left(1+\frac{1}{(n-h)K}\right)}\leqq\frac{(n-1)K^2a_1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-2}}=O\left(\frac{n}{\log n}\right)=o(n)$$

and so Lemma C is proved.

Let us apply it to

$$a_n=\int_\Omega|f_n(P)|.$$

For these a_n, the validity of (5) follows at once from our hypothesis (4)

---

[5]) N. DUNFORD, A mean ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, 5 (1939), pp. 635–646; N. WIENER, The ergodic theorem, *ibidem*, pp. 1—18.

and so when this hypothesis is fulfilled then

$$\int_{\Omega} |f_n(P)| = o(n).$$

Now we are in a position to ask what Lemma B goes over into under the broader hypothesis. From the above proof of the lemma let us preserve the meaning of the sets $E, E^{(m)}$ and E_k, and nothing in our argument has to be changed until we come to the inequality (3). From here on, writing (3) in the form

$$\sum_1^n \int_{E_k} f_k(P) + \sum_{k=1}^m \int_{E_{n+k}} f_{n+k}(P) = \Sigma' + \Sigma'' \geqq 0,$$

consider first the behaviour of Σ' when m increases. Then the set $E_1 = E^{(m)}$ is also increasing and it is going over into E for $m \to \infty$. So, for m sufficiently large, the integral of $|f_1(P)|$ over $E - E_1$ is less than an arbitrary fixed $\varepsilon > 0$. By hypothesis (4), as for $k = 1, 2, \ldots, n$, $E - E_k = T^{1-k}(E - E_1)$, it follows immediately that

$$\sum_2^n \int_{E-E_k} |f_k(P)| \leqq (n-1) K \int_{E-E_1} |f_1(P)| < n K \varepsilon.$$

Therefore Σ' differs from

$$\sum_1^n \int_E f_k(P)$$

by less than $\varepsilon(1 + nK)$. Having now fixed ε and so m too, let n go to infinity; then the terms of Σ'' the absolute values of which are dominated by the corresponding integrals of $|f_k|$ over Ω, are, by Lemma C, of order $o(n+k) = o(n+m) = o(n)$ and so $\Sigma'' = m o(n) = o(n)$. Summing up,

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \int_E f_k(P) \geqq -\varepsilon \frac{1+nK}{n} + o(1)$$

where $\varepsilon > 0$ is arbitrary and so finally

$$\varliminf \frac{1}{n} \sum_1^n \int_E f_k(P) \geqq 0. \tag{6}$$

This is the result that has to take over the part played by Lemma B. In fact, let as above, $E_{\alpha\beta}$ be the set for which the upper limit of the arithmetical mean of $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ is $> \alpha$ and its lower limit $< \beta$; then by replacing $f_1(P)$ by $f_1(P) - \alpha$ and by $\beta - f_1(P)$ resp. like above, and the set $E_{\alpha\beta}$, evidently invariant with respect to T, taking over the part of Ω, the same set will play, in both cases, also the part of E and so, by (6),

$$\underline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\int_{E_{\alpha\beta}}(f_k(P)-\alpha)\geqq 0,\quad \underline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\int_{E_{\alpha\beta}}(\beta-f_k(P))\geqq 0$$

and hence, adding,

$$(\beta-\alpha)|E_{\alpha\beta}|\geqq 0.$$

As $\alpha>\beta$, this implies that $|E_{\alpha\beta}|=0$.

The proof concludes like the above one of Birkhoff's theorem.

III.

Finally, I should like to say a few words about the case when Ω is *of infinite measure.* As we know, Birkhoff's theorem holds true in this case; to prove it, we only have, before integrating $f_1(P)-\alpha$ over $E_{\alpha\beta}$, to ascertain that the constant is a summable function i. e. that $E_{\alpha\beta}$ is of finite measure. Let us assume that $\alpha>0$; if not, then $\beta<0$ and we had to reason on $\beta-f_1(P)=-f_1(P)-(-\beta)$ instead of $f_1(P)-\alpha$.

Let E' be a subset of $E_{\alpha\beta}$, of finite measure, but otherwise arbitrary. Let $e_1(P)$ be its characteristic function. Apply Lemma B to the function $g_1(P)=f_1(P)-\alpha e_1(P)$ in place of $f_1(P)$; then, for the set E corresponding to $g_1(P)$, we have

$$\int_E g_1(P)\geqq 0 \tag{7}$$

and so, as manifestly $E'\subset E$,

$$\int_E f_1(P)\geqq \alpha\int_E e_1(P)=\alpha|E'|. \tag{8}$$

Therefore

$$|E'|\leqq\frac{1}{\alpha}\int_\Omega|f_1(P)|;$$

thus, for all subsets E' of finite measure of $E_{\alpha\beta}$, a common bound is established; therefore $E_{\alpha\beta}$ itself is of finite measure.

Now, after having recalled the argument for Birkhoff's problem, we try to extend it to the more general one, dealt with in Section II. There the integral in (7) has to be replaced by

$$\underline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}g_k(P)$$

and so, by (8),

$$\underline{\lim}\frac{1}{n}\int_E\sum_{1}^{n}f_k(P)\geqq\alpha\ \underline{\lim}\ \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\int_E e_k(P)= \tag{9}$$

$$=\alpha\ \underline{\lim}\frac{1}{n}\left\{|E'|+\sum_{1}^{n-1}|T^{-k}E'|\right\}.$$

By our hypothesis (4), the mean value on the left, and therefore its lower limit too, are dominated by

$$\frac{1+(n-1)K}{n}\int_{\Omega}|f_1(P)|\leqq C\int_{\Omega}|f_1(P)|$$

where C is independent of n. On the other hand, however, if we want to get an upper estimate of $|E'|$, we cannot do, as it seems, without an additional hypothesis. The simplest one that suggests itself, is *the counterpart of hypothesis* (4), *namely that for a certain constant* $K'>0$ *and for any measurable set* e

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}|T^{-k}e|\geqq K'|e|.$$

In fact, assuming the latter hypothesis, the right hand side of (9) is greater than $C_1|E'|$ where $C_1>0$ is independent of n. So finally

$$|E'|\leqq\frac{C}{C_1}\int_{\Omega}|f_1(P)|$$

and from there the finiteness of $|E'_{\alpha\beta}|$ follows like above in Birkhoff's case.

(Received June 20, 1947.)

A series associated with Dirichlet's series.

By C. T. RAJAGOPAL in Tambaram.

The object of this note is to make explicit the fact that we can associate with the Dirichlet series

$$\text{(D)} \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n/D_n^s, \qquad 0 = D_0 < D_1 < \ldots, D_n \to \infty,$$

whenever $d_n \equiv D_n - D_{n-1} = O(1),$[1] a generalised factorial series

$$\text{(F)} \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(1+\frac{d_1}{D_1}s\right)\left(1+\frac{d_2}{D_2}s\right)\ldots\left(1+\frac{d_n}{D_n}s\right)},$$

the association implying that (F) reflects some of the well-known properties of (D) including those familiar to us as Tauberian theorems. It will be recalled in this connection that LANDAU [5] has considered a series more general than (F), with $\{d_n/D_n\}$ changed to a positive sequence $\{p_n\}$ satisfying the conditions: $p_n \to 0$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to \infty$. A Tauberian theorem which he proves for such a series yields Theorem II below, however, with o in place of O in the condition imposed on a_n.

Theorem I. (F) *converges — with the exclusion of the points* $s = -D_n/d_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — *whenever* (D) *converges; and conversely,* (D) *converges whenever* (F) *does so. The convergence is uniform in any finite region of the s-plane for either series, when it is so for the other, provided the region contains none of the points* $-D_n/d_n$.

Proof. We have only to note that

the nth term of (D) = the nth term of (F) $\times P(s, d_n)$,

where

[1] This assumption, supposed to hold throughout our discussion, makes $\Sigma(d_n/D_n)^{\mu}$ convergent when $\mu > 1$ and divergent when $\mu = 1$; in the latter case ensuring a finite value for $\lim \left(\frac{d_1}{D_1} + \ldots + \frac{d_n}{D_n} - \log D_n\right)$ as $n \to \infty$. It is further supposed that a_n and s are complex whenever their reality is not definitely affirmed.

$$(1) \qquad P(s, d_n) = \left(1+\frac{d_1}{D_1}s\right)\ldots\quad\left(1+\frac{d_n}{D_n}s\right)\Big/D_n^s$$

and appeal to Abel's test for (uniform) convergence, justifying this appeal by

L e m m a 1. *The series*

$$(2) \qquad \sum\left|P(s,d_n)-P(s,d_{n-1})\right|, \qquad \sum\left|\frac{1}{P(s,d_n)}-\frac{1}{P(s,d_{n-1})}\right|$$

converge uniformly in any finite part of the s-plane from which, in the case of the latter series, the points $-D_n/d_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *are excluded.*

P r o o f. For $n \geqq 2$,

$$P(s,d_n)-P(s,d_{n-1}) = P(s,d_{n-1})\left[\left(1+\frac{d_n}{D_n}s\right)\left(1-\frac{d_n}{D_n}\right)^s-1\right]$$

$$= P(s,d_{n-1})\left[-\frac{d_n^2}{D_n^2}s^2+\frac{d_n^2}{D_n^2}\vartheta_n(s)+\frac{d_n^3}{D_n^3}s\vartheta_n(s)\right]$$

where it is easy to prove that $|P(s,d_{n-1})|<A, |\vartheta_n(s)|<B$, A and B being constants independent of s when s is restricted to a finite region. This proves that $|P(s,d_n)-P(s,d_{n-1})|<K d_n^2/D_n^2$ and so establishes the conclusion in respect of the first series in (2). The conclusion in respect of the second series in (2) can be proved similarly since, in any finite s-region from which we have excluded $s=-D_n/d_n$ $(n=1,2,\ldots)$, we have $1/|P(s,d_{n-1})|<A'$ independent of s.

The details which I have omitted from the foregoing proofs are supplied by the similar discussion of the case $d_n \equiv 1$ which is well known [3, pp. 440f., 446f.].

T h e o r e m II. *If* (F) *converges for* $\mathrm{Rl}\, s>0$, *its sum being denoted by* $F(s)$, *and if* (*i*) $F(s)\to C$ *as* $s\to 0$ *through real positive values,* (*ii*) $a_n = O\,[d_n/D_n \log D_n]$,[2]) *then* $\Sigma a_n = C$.

This theorem is an immediate consequence of the next two lemmas of which the first, in a slightly different form, is a well-known result of HARDY and LITTLEWOOD [2, Theorem F].

L e m m a 2. *If* (D) *converges for* $\mathrm{Rl}\, s>0$ *to the sum* $D(s)$ *and if* (*i*) $D(s)\to C$ *as* $s\to 0$ *through positive values,* (*ii*) $a_n = O[d_n/D_n \log D_n]$, *then* $\Sigma a_n = C$.

L e m m a 3. *If* $a_n = o(d_n/D_n)$, *then* $F(s)-D(s)\to 0$ *as* $s\to 0$ *through positive values; and so, in particular, when* $a_n = O[d_n/D_n \log D_n]$,

$$F(s)\to C \text{ implies } D(s)\to C.$$

---

[2]) This condition implies, when $\mathrm{Rl}\, s>0$, the (absolute) convergence of (D) and hence, by Theorem I, the convergence of (F).

Proof. Let $s>0$ be chosen so that $sd_n/D_n<1$ for $n=1,2,\ldots$ Then, if $P(s,d_n)$ is defined by (1), we have

$$\exp\left[\sum_1^3 c_r(n)s^r\right]<\frac{1}{P(s,d_n)}<\exp\left[\sum_1^2 c_r(n)s^r\right]$$

where

$$c_1(n)=\log D_n-\frac{d_1}{D_1}-\ldots-\frac{d_n}{D_n},$$

$$c_r(n)=\frac{(-1)^r}{r}\left[\frac{d_1^r}{D_1^r}+\ldots+\frac{d_n^r}{D_n^r}\right],\quad r=2,3,\ldots,$$

tend to finite limits as $n\to\infty$. Consequently

(3) $$\frac{1}{P(s,d_n)}=e^{O(s)},\quad s\to+0,$$

uniformly with respect to n.

Now

(4) $$D(s)-F(s)=\sum_1^N\frac{a_n}{D_n^s}\left[1-\frac{1}{P(s,d_n)}\right]+\sum_{N+1}^\infty\frac{a_n}{D_n^s}\left[1-\frac{1}{P(s,d_n)}\right]$$

where (as a result of the condition satisfied by a_n) N can be chosen so that, for $n>N$,

$$|a_n|<\varepsilon d_n/D_n$$

and therefore

(5) $$\left|\sum_{N+1}^\infty\ldots\right|<\varepsilon\sum_{N+1}^\infty\frac{d_n}{D_n^{s+1}}\left|1-\frac{1}{P(s,d_n)}\right|.$$

Using (3) in each term on the right-hand side of (5) we get

$$\left|\sum_{N+1}^\infty\ldots\right|<\varepsilon Ks\sum_{N+1}^\infty\frac{d_n}{D_n^{s+1}},\qquad 0<s<s_0,$$

and thence, recalling that

$$\lim_{s\to+0}s\sum_{N+1}^\infty\frac{d_n}{D_n^{s+1}}=1\quad\text{when}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{D_{n+1}}{D_n}=1,$$ [3])

we are led to

(6) $$\left|\sum_{N+1}^\infty\ldots\right|\to0,\quad s\to+0.$$

Employing (6) in (4), where obviously $\left|\sum_1^n\ldots\right|\to0$ as $s\to+0$, we complete the proof of the lemma.

[3]) For a straightforward proof of results of this type, the reader is referred to my discussion cited at the end [6].

An obvious modification of Lemma 3 is

Lemma 3a. *If $a_n = O(d_n/D_n)$, then $F(s) - D(s) = O(1)$ as $s \to 0$ through positive values.*

Remark. The Abelian theorem which is the converse of Theorem II follows from the uniform convergence of (D) reflected by (F) as stated in Theorem I. It can be enunciated thus:

If $\Sigma a_n = C$, then $F(s)$, representing the sum of (F) *for* $\mathrm{Rl}\, s > 0$, *tends to* C *as* $s \to 0$ *along any path lying entirely within the region* $|\mathrm{am}\ s| \leqq \varkappa < \pi/2$.

Theorem III. *Let $a_n \geqq 0$. Let* (F) *be convergent for $s > 0$, its sum $F(s)$ satisfying the condition*

$$F(s) \sim C s^{-\alpha} (l_1 s^{-1})^{\alpha_1} \ldots (l_m s^{-1})^{\alpha_m}, \quad s \to +0, \tag{7}$$

where $l_r u = \log\log \ldots$ (r times) u, $\alpha \geqq 0$ and either the first non-zero α is positive or every α is zero. Then

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \sim C \frac{(l_1 D_n)^{\alpha} (l_2 D_n)^{\alpha_1} \ldots (l_{m+1} D_n)^{\alpha_m}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{8}$$

Conversely (7) *follows from* (8) *when* $a_n \geqq 0$.

This theorem is obtained by combining the two lemmas given below.

Lemma 4. *Let $a_n \geqq 0$. Then* (7) *implies and is implied by the similar relation in which $F(s)$ is replaced by $D(s)$, the sum of* (D) *for* $s > 0$.

Proof. For $s > 0$, let us write

$$D_N(s) = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{a_n}{D_n^s}.$$

$$F_N(s) = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(1 + \frac{d_1}{D_1} s\right)\left(1 + \frac{d_2}{D_2} s\right) \ldots \left(1 + \frac{d_n}{D_n} s\right)} = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{a_n}{D_n^s} \frac{1}{P(s, d_n)},$$

so that $D_0(s) = D(s)$, $F_0(s) = F(s)$. Let

$$\frac{1}{\Pi_d(s)} = \lim_{n \to \infty} P(s, d_n) = e^{\nu_d s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{d_n}{D_n} s\right) e^{-s d_n / D_n},$$

where $\nu_d = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \ldots + \frac{d_n}{D_n} - \log D_n\right)$, denote the reciprocal of CESÀRO's generalization of GAUSS's function $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$.

Then we can choose N so that, for $n > N$,

$$\frac{1 - \varepsilon}{\Pi_d(s)} < P(s, d_n) < \frac{1 + \varepsilon}{\Pi_d(s)}$$

and hence

$$\frac{1 - \varepsilon}{\Pi_d(s)} F_N(s) < D_N(s) < \frac{1 + \varepsilon}{\Pi_d(s)} F_N(s). \tag{9}$$

Since (7) implies

$$F_N(s) \sim Cs^{-\alpha}(l_1 s^{-1})^{\alpha_1} \dots (l_m s^{-1})^{\alpha_m}, \quad s \to +0,$$

and we have also $\Pi_d(s) \to 1$ as $s \to +0$, it follows from (9) that

$$D_N(s) \sim Cs^{-\alpha}(l_1 s^{-1})^{\alpha_1} \dots (l_m s^{-1})^{\alpha_m}, \quad s \to +0$$

and therefore

$$D(s) \sim Cs^{-\alpha}(l_1 s^{-1})^{\alpha_1} \dots (l_m s^{-1})^{\alpha_m}, \quad s \to +0. \tag{10}$$

Thus, when $a_n \geqq 0$, (7) involves (10) and similarly (10) involves (7)[4].

Lemma 5. *Let $a_n \geqq 0$; then* (10) *involves* (8). *Conversely* (8) *involves* (10), *even without any explicit assumption regarding a_n.*

The first part of the lemma is a classical result of HARDY and LITTLEWOOD [2, Theorem D and p. 141, footnote †]; the second (converse) part can be proved by a method suggested by GANAPATHY IYER [1, § 7].

Theorem IV. *Let a_n be real and satisfy the condition*

$$a_n \geqq -K \frac{d_n}{D_n (l_1 D_n)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leqq 1.$$

Let (F) *be convergent for $s > 0$, its sum $F(s)$ being such that*

$$F(s) \sim Cs^{-\alpha}, \quad s \to +0.$$

Then

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \sim \frac{C(l_1 D_n)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Proof. The series $\Delta(s) = \Sigma d_n / D_n^{s+1}(l_1 D_n)^{1-\alpha}$ is convergent for $s > 0$ and hence, by Theorem I, also

$$\Phi(s) = \frac{d_n}{D_n (l_1 D_n)^{1-\alpha}} \Bigg/ \left(1 + \frac{d_1}{D_1} s\right) \dots \left(1 + \frac{d_n}{D_n} s\right).$$

Since $\Delta(s) \sim \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $s \to +0$,[5]) we can take $a_n = d_n / D_n (l_1 D_n)^{1-\alpha}$ in Lemma 3a and obtain

$$\Phi(s) \sim \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqq 1, \quad s \to +0.$$

The series

$$G(s) = F(s) + K\Phi(s)$$

is got by changing a_n in (F) to

$$b_n = a_n + K d_n / D_n (l_1 D_n)^{1-\alpha} \geqq 0$$

---

[4]) The argument tacitly assumes that $s^{-\alpha}(l s^{-1})^{\alpha_1}, \dots (l_m s^{-1})^{\alpha_m} \to \infty$ as $s \to +0$. The case in which $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ is dealt with by an obvious modification of the argument.

[5]) Knopp's proof of this result for $d_n \equiv 1$ [4, pp. 180–1] can obviously be modified when $d_n = O(1)$ as we have supposed.

and is subject to the condition

$$G(s) \sim \{C + K\Gamma(\alpha)\}\, s^{-\alpha}, \quad s \to +0.$$

Hence, by Theorem III,

$$\sum_1^n b_\nu \sim \left\{\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{\alpha}\right\} (l_1 D_n)^\alpha$$

and since, when $\alpha > 0$ and $\lim\limits_{n\to\infty} D_{n+1}/D_n = 1$,

$$\sum_1^n \frac{d_\nu}{D_\nu (l_1 D_2)^{1-\alpha}} \sim \frac{(l_1 D_n)^\alpha}{\alpha},$$

it follows that

$$\sum_1^n a_\nu \sim \frac{C(l_1 D_n)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

It may be mentioned in conclusion that Theorems I—IV can be restated with the series

(F′) $$\sum_1^\infty a_n \left(1 - \frac{d_1}{D_1} s\right) \dots \left(1 - \frac{d_n}{D_n} s\right)$$

taking the place of the series (F) and with the obvious difference that in Theorem I points $(s = D_n/d_n)$ are excluded only when the convergence of (F') is posited.

References.

1. V. Ganapathy Iyer, Tauberian theorems on generalized Lambert's series, *Journal Indian Math. Society* (2), **1** (1934), pp. 73—87.
2. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some theorems concerning Dirichlet's series, *Messenger of Math.*, **43** (1914), pp. 134—147.
3. K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series* (English translation, London, 1928).
4. K. Knopp, Divergenzcharactere gewissser Dirichlet'scher Reihen, *Acta Math.*, **34** (1911), pp. 165—204.
5. E. Landau, Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes, *Monatshefte für Math. Phys.*, **18** (1907), pp. 8—28.
6. C. T. Rajagopal, On certain theorems of Pringsheim, *Tôhoku Math. Journal*, **43** (1937), pp. 122—126.

Madras Christian College,
Tambaram, S. India.

(Received May 28, 1947.)

Über die allgemeinen Lemniskaten.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

§. 1. Einleitung.

Die allgemeine *Lemniskate* $L_n(\varrho)$ n-ten Grades oder kurz L_n ist der Ort der Punkte in einer Ebene, deren Abstände von n festen Punkten der Ebene ein konstantes Produkt ϱ^n ergeben. Die festen Punkte sind die *Mittelpunkte* (Pole, oder Brennpunkte), ϱ ist der *Radius* der Lemniskate. Ein Mittelpunkt ist p-fach, wenn er unter den Mittelpunkten p-mal vorkommt. Die voneinander verschiedenen Mittelpunkte sind die *Kerne* der Lemniskate. Eine Lemniskate n-ten Grades hat also höchstens n Kerne. Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit nur einem Kern ist ein (n-facher) Kreis. Wir nehmen im folgenden an, daß die Lemniskate mindestens zwei Kerne besitzt. Dann sind die Kurven $L_2(\varrho)$ Cassinische Kurven. Bezeichnet $2r$ den Abstand der Kerne einer Kurve $L_2(\varrho)$, so ist die Kurve $L_2(r)$ eine Bernoullische Lemniskate.

Besitzen die Lemniskaten $L_n(\varrho)$ und $L_n(\varrho')$ dieselben Mittelpunkte (und hat jeder Mittelpunkt für beide Lemniskaten dieselbe Vielfachheit), so sind die Lemniskaten *konzentrisch* (oder konfokal). Unter den konzentrischen Lemniskaten $L_n(\varrho)$ gibt es eine *uneigentliche* Kurve, und zwar die Kurve $L_n(0)$, die aus isolierten Punkten, aus den Mittelpunkten der eigentlichen Lemniskaten $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ besteht.

Bezeichnen $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ und ist $z = x + iy$ ein beliebiger Punkt von $L_n(\varrho)$, so wird die Lemniskate durch die Gleichung

$$(1) \qquad |f(z)| \equiv |(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)| = \varrho^n$$

oder

$$(2) \qquad |f(z)|^2 \equiv f(z)\,.\,\overline{f(z)} \equiv \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k) \equiv \prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^2 \equiv$$
$$\equiv \prod_{k=1}^{n}\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right] = \varrho^{2n}$$

dargestellt. Setzt man

$$(3) \qquad f(x+iy) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

so kann die Gleichung (2) auch in der Form

$$(4) \qquad U^2(x,y) + V^2(x,y) - \varrho^{2n} = 0$$

geschrieben werden.

Eine Lemniskate n-ten Grades ist der Ort der Punkte z in der komplexen Ebene, in denen der absolute Betrag eines Polynoms n-ten Grades derselbe ist. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Mittelpunkte der Lemniskate. Durch einen beliebigen Punkt ζ geht eine und nur eine der konzentrischen Lemniskaten.

Die durch den Punkt ζ gehende und mit (1) konzentrische Lemniskate besitzt nämlich die Gleichung

$$|f(z)| = |f(\zeta)|. \tag{5}$$

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist nach (2) und (4) eine n-fach zirkuläre algebraische Kurve $2n$-ter Ordnung, weil die zyklischen (absoluten) Punkte für sie n-fache Punkte sind. Sie besitzt also mit einem Kreis höchstens $2n$ reelle Punkte gemeinsam.

Die geometrische bzw. *zyklische Ordnung* einer (reellen) ebenen Kurve bedeutet die Maximalanzahl der reellen Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden bzw. von einem Kreis der Ebene getroffen werden kann. Es gilt also der Satz:

I. *Die geometrische und auch die zyklische Ordnung einer Lemniskate n-ten Grades ist höchstens $2n$ gleich.*

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ $2n$-ter geometrischer Ordnung besitzt offenbar auch die zyklische Ordnung $2n$. Die geometrische Ordnung einer Lemniskate $2n$-ter zyklischer Ordnung kann aber kleiner als $2n$ sein.

Ist $f_0(z)$ ein Polynom ν-ten Grades und ist

$$f(z) = [f_0(z)]^k \quad (n = k\nu, k > 1), \tag{6}$$

so stimmt die Lemniskate (1) mit der k-fach gerechneten Lemniskate

$$|f_0(z)| = \varrho^\nu$$

überein. Wir nehmen im folgenden an, daß das Polynom $f(z)$ keine Darstellung von der Form (6) besitzt.

Besitzt die Lage der Mittelpunkte einer Lemniskate eine Symmetrie in bezug auf eine Gerade oder auf einen Punkt, so besitzt auch die Lemniskate diese Symmetrie. Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ heißt *regelmäßig*, wenn ihre Mittelpunkte die Ecken einer regelmäßigen n-Ecks sind. Die Gleichung einer regelmäßigen Lemniskate hat also die Form

$$|(z-a)^n - b| = \varrho^n, \quad b \neq 0. \tag{7}$$

Wegen der Literatur der Lemniskaten verweisen wir auf ein Werk von G. LORIA[1]). Die Lemniskaten kommen in der neuesten Literatur bei

---

[1]) G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven*, Bd. I, *Algebraische Kurven* (Leipzig, 1910), S. 445–446.

J. L. WALSH[2]) und bei L. HIBBERT[3]) vor. Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich um die rein geometrischen Eigenschaften der Lemniskaten[4]).

§. 2. Die singulären Lemniskaten.

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist *singulär,* wenn sie mindestens einen reellen singulären Punkt besitzt. Die uneigentliche Lemniskate $L_n(0)$ ist offenbar singulär. Die eigentlichen singulären Lemniskaten besitzen außer den zyklischen Punkten die einfachsten singulären Punkte, und zwar reelle mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten.

II. *Ist*

$$(8)\quad f(z)=(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\dots(z-z_m)^{p_m}$$
$$(p_k\geqq 1,\ p_1+p_2+\dots+p_m=n,\ z_h\neq z_k,\ h\neq k),$$

so ist die eigentliche Lemniskate

$$|f(z)|=|f(\zeta)|\equiv\varrho^n\,(\neq 0;\ \ \zeta\neq z_k,\ \ k=1,2,\dots,m)$$

dann und nur dann singulär, wenn ζ eine Nullstelle der Derivierten $f'(z)$ ist (für welche $f(\zeta)\neq 0$ ist). Ist ζ eine einfache Nullstelle von $f'(z)$, so ist ζ ein Doppelpunkt der Lemniskate mit senkrechten Tangenten. Ist der Punkt ζ eine k-fache Nullstelle von $f'(z)$, so ist er ein $(k+1)$-facher Punkt der Lemniskate. Seine Tangenten bilden eine $(k+1)$-strahlige Windrose. Hat eine Lemniskate m Kerne, so gibt es höchstens $m-1$ mit ihr konzentrische singuläre eigentliche Lemniskaten.

Dieser Satz folgt aus der Taylorschen Formel des Polynoms $f(z)$. Sind

$$f(\zeta)\neq 0, f'(\zeta)=f''(\zeta)=\dots=f^{(k)}(\zeta)=0, f^{(k+1)}(\zeta)\neq 0,$$
$$z-\zeta=re^{i\varphi}\ \text{und}\ \overline{f(\zeta)}f^{(k+1)}(\zeta)=(k+1)!\,Re^{i\alpha},$$

so ist

$$(9)\quad |f(z)|^2=\overline{f(z)}\,f(z)=|\,f(\zeta)|^2+r^{k+1}\,[2R\cos(k\varphi+\varphi+\alpha)+\dots+r^{2n-k-1}].$$

Der Punkt ζ liegt auf der Lemniskate $|f(z)|=|f(\zeta)|$. Er ist ein gewöhnlicher bzw. $(k+1)$-facher Punkt, je nachdem $k=0$, bzw. $k>0$ ist. Die Winkel φ der Tangenten der Lemniskate im Punkt ζ genügen der Gleichung $\cos\,[(k+1)\varphi+\alpha]=0$.

Damit ist der Satz bewiesen, weil die Derivierte des Polynoms (8) höchstens $m-1$ solche Nullstellen besitzt, die von Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichen.

---

[2]) J. L. WALSH, Lemniskaten and equipotential curves of Green's function, *American Math. Monthly,* **42** (1935), S. 1—17.

[3]) L. HIBBERT, Univalence et automorphie pour les polynomes et les fonctions entières, *Bulletin de la Société Math. de France,* **46** (1938), S. 81—113.

[4]) Die gegenwärtige Arbeit hat gewisse Berührungspunkte mit meiner Arbeit, Die Lage der *A*-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, *diese Acta,* **11** (1947), S. 147—151.

Aus dem Satz II folgt, daß die eigentliche regelmäßige Lemniskate (7) nur dann singulär ist, wenn $|b| = \varrho^n$ ist. Ist $b = -\varrho^n$, ist a^0 der Pol und ist die positive reelle Achse die Polarachse eines Polarkoordinatensystems, so hat die Lemniskate (7) die Gleichung

$$r^n = 2\varrho^n \cos n\varphi. \tag{10}$$

Die regelmäßigen singulären Lemniskaten n-ten Grades sind also Sinusspiralen vom Index n.[5]) Umgekehrt: jede Sinusspirale, deren Index eine natürliche Zahl ist, ist eine regelmäßige Lemniskate.

Aus dem bekannten Gauss-Lucasschen bzw. Jensenschen Satz[6]) über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms folgen die Sätze:

III. *Die singulären Punkte der konzentrischen eigentlichen Lemniskaten fallen in das Innere der konvexen Hülle H ihrer Mittelpunkte.*

IV. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ symmetrisch in bezug auf die Achse a und bezeichnet K_h $(h = 1, 2, \ldots \nu)$ je einen Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungsstrecke von zwei in bezug auf die Achse a symmetrischen Mittelpunkten ist, so liegt jeder außerhalb der Achse liegende singuläre Punkt der konzentrischen Lemniskaten mindestens auf einer der Kreisscheiben K_h $(h = 1, 2, \ldots, \nu)$.*

§. 3. Topologische Eigenschaften der Lemniskaten.

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ ist eine reelle endliche algebraische Kurve. Sie besitzt deshalb eine endliche Anzahl von Zügen. *Ein Zug* ist ein geschlossener Teil der Kurve, der stetige Tangenten besitzt. Eine Lemniskate bestimmt ihre Züge eindeutig, weil sie keinen Selbstberührungspunkt besitzt.

Ein einfach geschlossener Teil eines Zuges der Lemniskate ist ein *Zykel.* Schneidet ein Zug sich nicht, so ist er ein Zykel. Ein Zykel kann auch Winkelpunkte besitzen. Ein Zug mit dem einzigen Doppelpunkt P besteht aus zwei Zykeln, die in P einen Winkelpunkt haben.

Ein Zykel C einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ begrenzt einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$. Ein Punkt z liegt innerhalb von C, wenn er ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist. Dann wird der Punkt z von C umschlossen.

Nach einem klassischen Satz von Cauchy über die analytischen Funktionen erreicht der absolute Betrag des Polynoms $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ sein Maximum in keinem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$. Der Wert von $|f(z)|$ ist in jedem Punkte von C gleich ϱ^n, weil C ein Teil der Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist. Für jeden inneren Punkt ζ von $\mathfrak{B}$ besteht also die Ungleichung $|f(\zeta)| < \varrho^n$. ζ ist also kein Punkt der Lemniskate $L_n(\varrho)$.[7])

[5]) Loria, a. a. O., S. 470–477. Die Figur 15 bei Hibbert (a. a. O., S. 111) stellt eine regelmäßige Lemniskate 4-ten Grades dar.

[6]) G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin, 1925), Bd. I, S. 89, Aufgabe 31; S. 90, Aufgabe 35.

[7]) Vgl. Pólya–Szegő, a. a. O., S. 111–112, Aufgaben 137–139, 142, 143.

Die Funktion $|f(z)|$ ist im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ stetig und erreicht dort in einem inneren Punkt z_0 sein Minimum $M = |f(z_0)| = \varrho_0^n < \varrho^n$. Wäre nun $M > 0$, so hätte die Lemniskate $|f(z)| = \varrho_0^n$ in $\mathfrak{B}$ einen durch z_0 gehenden Zykel C_0, weil sie wegen der Ungleichung $\varrho_0^n < \varrho^n$ den Rand von $\mathfrak{B}$ nicht übertreten kann. Dann bestände die Ungleichung $|f(z)| < M$ für jeden innerhalb von C_0 liegenden Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$; M wäre also kein Minimum von $|f(z)|$ in $\mathfrak{B}$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $f(z_0) = 0$ und deshalb z_0 ein Kern der Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist. Aus der Stetigkeit von $|f(z)|$ folgt, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ mindestens einen Zug jeder konzentrischen Lemniskate $L_n(\varrho'), 0 \leqq \varrho' < \varrho$, enthält. Es gilt also der Satz:

V. *Kein Zykel einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ schneidet oder umschließt einen anderen Zykel. Zwei Zykel haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Jeder Zykel umschließt mindestens einen Kern. Keine Lemniskate besitzt mehr Zykel, als Kerne.*

Ist $0 < \varrho' < \varrho$, so besitzt die Lemniskate $L_n(\varrho')$ innerhalb jedes Zykels der konzentrischen Lemniskate $L_n(\varrho)$ mindestens einen Zug.

Zum Beweis dieses Satzes muß man noch zeigen, daß zwei Zykel C_1 und C_2 einer Lemniskate nicht zwei verschiedene gemeinsame Punkte A und B haben können. Widrigenfalls könnte man nämlich aus den vier Bögen, in welche das Zykelpaar C_1, C_2 von den Punkten A und B geteilt wird, zwei schneidende Zykel zusammensetzen.

Ein Zug oder ein Zykel einer Lemniskate heißt von Kern k, wenn es innerhalb von ihm k Kerne der Lemniskate gibt. Aus dem Satz V folgt der Satz

VI. *Kein Zug einer Lemniskate wird von einem anderen Zug umschlossen. Zwei Züge einer Lemniskate können einander in einem Punkte P nur dann schneiden, wenn P für beide Züge ein Doppelpunkt, für die Lemniskate ein mindestens vierfacher Punkt ist. Ein k-kerniger Zug besitzt höchstens $k-1$ Doppelpunkte.*

Die Sinusspirale (10) liefert ein Beispiel für Lemniskaten mit schneidenden Zügen. Ist nämlich $n = 2k$ eine gerade Zahl, so besteht die Sinusspirale aus k Zügen mit je einem Doppelpunkt, und zwar mit je einem Inflexionsknoten. Die k Doppelpunkte fallen in den n-fachen Punkt der Lemniskate zusammen.

Aus den Sätzen II, V und VI ergibt sich der Satz

VII. *Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bzw. $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m-1}$ die verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades bzw. die von $z_1, z_2, \ldots, z_m$ abweichenden Nullstellen der Derivierten $f'(z)$, sind ferner*

$$0 < |f(\zeta_1)| \leqq |f(\zeta_2)| \leqq \ldots \leqq |f(\zeta_p)| < |f(\zeta_{p+1})| \leqq |f(\zeta_{p+2})| \leqq \ldots \leqq |f(\zeta_{m-1})|,$$
$$|f(\zeta_h)| = (\varrho_h^*)^n \quad (h = 1, 2, \ldots, m-1), \quad 0 < \varrho_0 < \varrho_1^*, \ \varrho_p^* < \varrho_p < \varrho_{p+1}^*$$
$$\textit{und } \varrho_{m-1}^* < \varrho_{m-1},$$

und bezeichnet endlich $L(\varrho)$ die Lemniskate $|f(z)| = \varrho^n$, so besitzt jede Lemniskate $L(\varrho_0)$, $L(\varrho_p)$ bzw. $L(\varrho_{m-1})$ m, $m-p$ Züge bzw. einen Zug. Die Lemniskaten $L(\varrho_h^*)$ sind singulär. Die Lemniskate $L(\varrho_p^*)$ besteht aus $m-p$ Zügen.

Ist ϱ genügend klein, so liegt die Lemniskate $L(\varrho)$ in der Umgebung der Kerne $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Sie besteht aus m einkernigen Zügen. Diese Züge bleiben getrennt, solange $\varrho < \varrho_1$ ist. Die Anzahl der Züge von $L(\varrho)$ kann nämlich bei Vergrößerung des Radius ϱ sich nur dann verändern, wenn zwei oder mehrere Züge sich in einem singulären Punkt vereinigen. Dies findet nur bei einer singulären Lemniskate $L(\varrho)$ statt.

Wir nehmen erstens an, daß $\varrho_1^* < \varrho_2^* < \ldots < \varrho_p^*$ sind. Die Lemniskate $L(\varrho_1^*)$ hat dann einen Doppelpunkt in ζ_1, wo zwei bei den Kurven $L(\varrho_0)$ getrennte Züge sich in einen Zug vereinigen. Die Kurve $L(\varrho_1^*)$ besitzt also $m-1$ Züge und diese Anzahl bleibt bei den Lemniskaten $L(\varrho_1)$ unverändert. Bei der singulären Lemniskate $L(\varrho_2^*)$ gehen zwei Züge der Lemniskaten $L(\varrho_1)$ in einen Zug über. Die Lemniskate $L(\varrho_2^*)$ und die Lemniskaten $L(\varrho_2)$ bestehen also aus $m-2$ Zügen. So sieht man ein, daß die Lemniskaten $L(\varrho_p)$ bzw. $L(\varrho_{m-1})$ $m-p$ Züge bzw. einen Zug besitzen.

Es seien im zweiten Fall $\varrho_1^* = \varrho_2^* = \ldots = \varrho_p^*$ und $\zeta_h \neq \zeta_k$ $(h = 1, 2, \ldots, p;$ $k = h+1, h+2, \ldots, p)$. Dann wird die Anzahl der Züge der Lemniskaten $L(\varrho_0)$ bei der Lemniskate $L(\varrho_1^*)$ durch die in den Doppelpunkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ stattfindenden Verschmelzungen um p verkleinert.

Im dritten Fall sind $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_p$. Dann werden $p+1$ getrennte Züge der Lemniskaten $L(\varrho_0)$ bei der Kurve $L(\varrho_1^*) \equiv L(\varrho_p^*)$ in einen Zug vereinigt, der in ζ_1 einen $(p+1)$-fachen Punkt besitzt. Die Lemniskaten $L(\varrho_p^*)$ und $L(\varrho_p)$ bestehen wieder aus $m-p$ Zügen.

Die betrachteten drei Fälle können verwechselt und kombiniert vorkommen, während man von einer Lemniskate $L(\varrho_0)$ ausgehend durch die Vergrößerung des Radius ϱ zu einer Lemniskate $L(\varrho_p)$ gelangt. Jedesmal nimmt die Anzahl der Züge um p ab. Damit ist der Satz VII bewiesen, weil jede Lemniskate $L(\varrho_{m-1})$ aus $m-(m-1) = 1$ Zug besteht.

§. 4. Die Lage der Lemniskaten $L_n(\varrho)$ in bezug auf die konzentrischen Kreise vom Halbmesser ϱ.

Es gilt der Satz

VIII. *In einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe vom Mittelpunkt Q und vom Halbmesser ϱ besitzt jede Lemniskate vom Radius ϱ, die in Q einen Mittelpunkt hat, mindestens einen Punkt*[8]).

---

[8]) Nach einem Satz von PÓLYA—SZEGŐ, a. a. O., Aufgabe 139, gilt auch der Satz: Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ innerhalb eines Kreises K vom Halbmesser ϱ, so besitzt die Lemniskate mindestens einen Punkt auf K.

Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die Kerne einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, so liegt kein Punkt der Lemniskate außerhalb der m Kreise K_h

$$|z-z_h| = \varrho \quad (h = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

oder innerhalb jedes dieser m Kreise.

Die Gesamtheit der m Kreisscheiben K_h enthält jeden Punkt der Lemniskate. Haben diese m Kreisscheiben einen Bereich gemeinsam, so liegt kein Punkt der Lemniskate im Innern dieses Bereiches.

Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ hat in diesem Satz eine Gleichung von der Form

$$|f(z)| \equiv |(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\ldots(z-z_m)^{p_m}| = \varrho^n \tag{12}$$
$$(p_h \geqq 1,\; p_1+p_2+\ldots+p_m = n).$$

Enthält die Kreisscheibe K_1 keinen Punkt der Lemniskate, so enthält sie keine Nullstelle des Polynoms

$$g(z) \equiv f(z) - \varrho^n \equiv (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n).$$

Es bestehen also die Ungleichungen

$$|z_1-a_h| > \varrho \quad (h=1,2,\ldots,n) \text{ und } |g(z_1)| \equiv |(z_1-a_1)(z_1-a_2)\ldots(z_1-a_n)| > \varrho^n.$$

Dies ist aber unmöglich, weil

$$|g(z_1)| = |f(z_1)-\varrho^n| = |0-\varrho^n| = \varrho^n$$

ist. Dieser Widerspruch rechtfertigt den ersten Absatz von VIII.

Für einen beliebigen Punkt z_0, der außerhalb bzw. innerhalb jedes der m Kreise K_h liegt, bestehen die Ungleichungen

$$|z_0-z_h| > \varrho \text{ bzw. } |z_0-z_h| < \varrho \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

woraus die Ungleichung

$$|f(z_0)| > \varrho^n \text{ bzw. } |f(z_0)| < \varrho^n$$

folgt. Der Punkt z_0 liegt also nicht auf der Lemniskate. — Damit ist der Satz VIII bewiesen, weil sein dritter Absatz aus dem zweiten einfach folgt.

Aus dem Satz VIII folgt:

IX. *Enthält die Kreisscheibe K: $|z-\alpha| \leqq r$ jeden Kern einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, so liegt die Lemniskate in der Kreisscheibe $|z-\alpha| \leqq \varrho + r$. Ist $\varrho > r$, so liegt die Lemniskate ganz im Kreisring*

$$\varrho - r \leqq |z-\alpha| \leqq \varrho + r. \tag{13}$$

Ist $\varrho > 2r$, so besteht die Lemniskate $L_n(\varrho)$ aus einem Zug.

Jede Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist kreisförmig, wenn ihr Radius genügend groß ist[9]).

Der zweite Absatz dieses Satzes folgt aus dem ersten und aus dem Satz III, weil die singulären Punkte der konzentrischen Lemnis-

---

[9]) Dieser Satz wurde von F. LUCAS, Statique des polynomes, *Bulletin de la Société Math. de France*, **17** (1888), S. 17—69, ohne Beweis ausgesprochen.

katen $L_n(\varrho)$ im Kreise K liegen. Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist also nicht singulär, wenn $\varrho - r \geqq r$ ist, weil sie im Kreis K keinen Punkt besitzt.

Der dritte Absatz des Satzes IX folgt aus der folgenden Form von (13)

$$\varrho\left(1-\frac{r}{\varrho}\right) \leqq |z-\alpha| \leqq \varrho\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).$$

§ 5. Konzentrische Kreissysteme einer Lemniskate $L_n(\varrho)$.

Genügen die positiven Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ der Gleichung

(14) $$\varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho^n,$$

so bilden die Kreisscheiben K_h

(15) $$|z-z_h| \leqq \varrho_h \quad (h=1,2,\ldots m)$$

ein *konzentrisches Kreissystem* der Lemniskate (12). Die Gesamtheit der Kreisscheiben (11) ist auch ein konzentrisches Kreissystem der Lemniskate (12).

X. *Jedes konzentrische Kreissystem einer Lemniskate enthält die ganze Lemniskate. Der Durchschnitt der Kreisscheiben eines konzentrischen Systems enthält keinen Punkt der Lemniskate im Innern.*

Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots$ verschiedene konzentrische Kreissysteme, so enthält ihr Durchschnitt jeden Punkt der Lemniskate.

Hat die Kreisscheibe K_1 eines konzentrischen Kreissystems S von einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit keiner der übrigen Kreisscheiben von S einen Punkt gemeinsam, so enthält die Kreisscheibe K_1 einen ganzen Zug und außerdem keinen anderen Punkt der Lemniskate. Dieser Zug besitzt keinen singulären Punkt.

Liegt nämlich ein Punkt z_0 außerhalb bzw. innerhalb jeder Kreisscheibe des Kreissystems (14), so sind

$$|z_0-z_h| > \varrho_h \quad \text{bzw.} \quad |z_0-z_h| < \varrho_h \quad (h=1,2,\ldots,m)$$

und

$$|f(z_0)| \equiv |(z_0-z_1)^{p_1}(z_0-z_2)^{p_2}\ldots(z_0-z_m)^{p_m}| > \varrho_1^{p_1}\varrho_2^{p_2}\ldots\varrho_m^{p_m} = \varrho^n$$
$$\text{bzw.} \quad |f(z_0)| < \varrho^n.$$

Der Punkt z_0 ist also kein Punkt der Lemniskate (12). Damit ist der erste Absatz von X bewiesen. Der zweite Absatz folgt aus dem ersten ohne Weiteres.

Für einen beliebigen Randpunkt z_0' der Kreisscheibe K_1 im dritten Absatz von X bestehen die Ungleichungen $|z_0'-z_h| > \varrho \; (h=2,3,\ldots,m)$ und $|f(z_0')| > \varrho^n$.

Der Rand der Kreisscheibe K_1 wird also von keinem Zug der Lemniskate geschnitten. Die Kreisscheibe K_1 enthält den Kern z_1, wo $|f(z_1)| = 0$ ist. Aus der Stetigkeit von $|f(z)|$ folgt, daß es auf jedem

Halbmesser (z_1, z_0') mindestens einen Punkt z gibt, wo $|f(z)| = \varrho^n$ ist. Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ besitzt mindestens einen Zug Z_1 in der Kreisscheibe K_1, weil Z_1 den Rand von K_1 nicht übertreten kann. Aus demselben Grunde enthielte die Kreisscheibe K_1 mit einem Punkte eines anderen Zuges den ganzen Zug. Der Kern z_1 der Lemniskate $L_n(\varrho)$ wird nach Sätzen V und VI nur von einem Zykel der Kurve umschlossen. Daraus folgt, daß der Zug Z_1 aus einem Zykel besteht und daß die Lemniskate außerhalb von Z_1 in K_1 keinen anderen Punkt besitzt.

Der Satz IX läßt sich auf folgende Weise ergänzen:

XI. *Bezeichnet δ bzw. Δ den kleinsten bzw. den größten Abstand zwischen je zwei Kernen einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit m Kernen, so besteht die Lemniskate aus m Zügen bzw. aus einem Zug, je nachdem $\varrho < \frac{\delta}{2}$ bzw. $\varrho \geqq \Delta$ ist.*

Ist der Radius der Lemniskate genügend klein, so besteht sie aus m kreisförmigen Zügen.

Sind $2\varrho < \delta$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho$, so hat eine Kreisscheibe des zugehörigen konzentrischen Kreissystems S mit keiner der übrigen Kreisscheiben von S einen Punkt gemeinsam. Jede Kreisscheibe enthält also einen Zug der Lemniskate.

Sind $\varrho \geqq \Delta$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho$, so enthält jede Kreisscheibe des zugehörigen konzentrischen Kreissystems jeden Mittelpunkt der Lemniskate und damit ihre konvexe Hülle H. Die konzentrischen Lemniskaten $L_n(\varrho)$, $\varrho \geqq \Delta$, haben also in H keinen Punkt und deshalb keinen singulären Punkt. Sie bestehen also aus einem Zug.

Damit ist der erste Absatz von XI bewiesen.

Sind

$$(16) \qquad |z_k - z_1| = d_k, \quad 0 < d = \operatorname{Min} d_k \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \ 2\varrho \leqq d$$

und

$$(17) \qquad \varrho_k = d_k - \varrho_1 \ \text{bzw.} \ \varrho_k' = d_k + \varrho_1' \quad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

und besteht die Gleichung

$$(18) \qquad \varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho_1'^{p_1} \varrho_2'^{p_2} \ldots \varrho_m'^{p_m} = \varrho^n \quad (2\varrho \leqq d),$$

so besitzt die Lemniskate (12) im Kreise $|z - z_1| \leqq \varrho_1$ einen Zug, weil dieser Kreis außerhalb der Kreise $|z - z_k| \leqq \varrho_k$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$ liegt. Die Lemniskate hat im Innern des Kreises $|z - z_1| \leqq \varrho_1'$ keinen Punkt, weil dieser Kreis innerhalb der Kreise $|z - z_k| \leqq \varrho_k'$ liegt. Die Lemniskate besitzt also einen Zug im Kreisring

$$(19) \qquad \varrho_1' \leqq |z - z_1| \leqq \varrho_1 \leqq \varrho.$$

Aus der Gleichung (18) folgt die Ungleichung

$$(20)\quad 1>\left(\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}\right)^{p_1}=\prod_{k=2}^{m}\left(\frac{\varrho_k}{\varrho_k'}\right)^{p_k}=\prod_{k=2}^{m}\left(\frac{1-\frac{\varrho_1}{d_k}}{1+\frac{\varrho_1'}{d_k}}\right)^{p_k}\geqq\left(\frac{1-\frac{\varrho_1}{d}}{1+\frac{\varrho_1'}{d}}\right)^{n-p_1}>\left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{n-p_1},$$

also

$$(21)\quad 1>\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}>\left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{\frac{n}{p_1}-1}\geqq\left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{n-1}>\left(1-\frac{2\varrho}{d}\right)^{n-1}>1-2\varrho\frac{n-1}{d}.$$

Ist also $\frac{2(n-1)\varrho}{d}=\varepsilon<1$, so gilt die Ungleichung $1-\varepsilon<\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}<1$. Durch diese Ungleichung ist auch der zweite Absatz des Satzes XI bewiesen.

§. 6. Sternartige Lemniskaten.

XII. *Enthält die eine von der Geraden g begrenzte (abgeschlossene) Halbebene E die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate, so wird die in der anderen Halbebene E' liegende Teilmenge der Lemniskate von einer zu g senkrechten beliebigen Geraden f entweder in einem, oder in keinem Punkte getroffen.*

Liegen die Punkte ζ_1' und ζ_2' der Halbebene E' auf einer zu g senkrechten Geraden f und liegt ζ_1' der Geraden g näher als ζ_2', so liegt ζ_1' jedem Punkte z von E näher als ζ_2'. Dies ist klar, wenn auch der Punkt z auf f ist. Sind z, ζ_1', ζ_2' die Ecken eines Dreieckes, so hat dieses Dreieck bei ζ_1' einen Stumpfwinkel. Deshalb ist $|\zeta_1'-z|<|\zeta_2'-z|$. Diese Ungleichung besteht für jeden Mittelpunkt z_h der Lemniskate (12). Hieraus folgt, daß $|f(\zeta_1')|<|f(\zeta_2')|$ ist. Die Lemniskate (12) enthält also höchstens einen der Punkte ζ_1' und ζ_2'[10]). Damit ist der Satz bewiesen.

Eine Punktmenge M wird in bezug auf die Punktmenge M^* *sternartig* genannt, wenn jede von einem beliebigen Punkt A^* der Menge M^* ausgehende Halbgerade mit der Menge M höchstens einen Punkt gemeinsam hat.

Wendet man den Satz XII auf die Stützgeraden g des konvexen Bereiches H an, so erhält man leicht den Satz

XIII. *Bezeichnet $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Menge der Punkte, von denen aus die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate unter einem*

---

[10]) Das Prinzip dieses Beweises rührt von L. Fejér her; vgl. seine Arbeit: Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimalforderungen gewisser Art entspringen, *Math. Annalen*, **85** (1922), S. 41—48.

Winkel $\leqq \frac{\pi}{2}$ *erscheint, so ist die in* $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *liegende Teilmenge der Lemniskate sternartig in bezug auf die Punktmenge* H.

Dieser Satz enthält den folgenden Satz[11]) von WALSH in sich:

Enthält eine Kreisscheibe K vom Halbmesser R jeden Mittelpunkt einer Lemniskate und bezeichnet K' die konzentrische Kreisscheibe vom Halbmesser $R' = R\sqrt{2}$, so ist die außerhalb von K' liegende Teilmenge der Lemniskate sternartig in bezug auf die Kreisscheibe K.

Aus einem Punkte des Randkreises von K' erscheint nämlich die Kreisscheibe K unter einem Rechtwinkel.

Aus den Sätzen VIII, XII und II folgt

XIV. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *auf einer Geraden* a, *so ist die Lemniskate symmetrisch auf die Achse* a *und liegt in einem Parallelstreifen von der Breite* 2ϱ, *dessen Mittelgerade die Achse* a *ist. Diese Lemniskate besitzt mit einer zu der Achse* a *senkrechten Geraden entweder zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Punkte gemeinsam, oder keine.*

Ist diese Lemniskate singulär, so ist ihr singulärer Punkt notwendigerweise ein Doppelpunkt, dessen Tangenten mit der Achse die Winkel $\pm\frac{\pi}{4}$ bilden. Dies folgt aus der Eigenschaft eines Polynoms $f(z)$ mit lauter reellen Nullstellen, daß jede von den mehrfachen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichende Nullstelle der Derivierten $f'(z)$ einfach ist. Eine zu a senkrechte Gerade besitzt also mit der Lemniskate auch dann nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam, wenn sie durch einen singulären Punkt der Kurve geht. Damit ist der Satz XIV bewiesen.

§. 7. Tangenten und Normalen der Lemniskate.

Ist

$$F(x, y) = \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2+(y-y_k)^2], \tag{22}$$

so hat die Gleichung (2) die Form

$$G(x, y) \equiv F(x, y) - \varrho^{2n} = 0. \tag{23}$$

Für einen Punkt (x, y) der eigentlichen Lemniskate $L_n(\varrho)$ bestehen dann die Gleichungen

$$F(x, y) = \varrho^{2n} \neq 0,\quad G_x(x, y) = F_x(x, y),\quad G_y(x, y) = F_y(x, y)$$

und

$$\frac{F_x(x, y)}{F(x, y)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}, \tag{24}$$

$$\frac{F_y(x, y)}{F(x, y)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{y-y_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}.$$

11) A. a O.

Wir können annehmen, daß die Lemniskate (23) im Nullpunkt von der x-Achse berührt wird, weil man diese Lage durch eine Koordinatentransformation immer erreichen kann.

Aus diesen Annahmen folgt, daß

$$F(0,0)=\prod_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2)=\varrho^{2n}\neq 0,\quad \frac{F_x(0,0)}{F(0,0)}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=0$$

und

$$\frac{F_y(0,0)}{F(0,0)}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k^2+y_k^2}\neq 0 \text{ bzw.} =0$$

sind, je nachdem der Nullpunkt ein gewöhnlicher bzw. singulärer Punkt der Lemniskate ist.

Bezeichnet $z_k'=x_k'+iy_k'$ das Spiegelbild des Mittelpunktes $z_k=x_k+iy_k$ an dem Einheitskreis, so sind

$$x_k'=\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=\frac{x_k}{r_k^2} \text{ und } y_k'=\frac{y_k}{x_k^2+y_k^2}=\frac{y_k}{r_k^2}\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Ist also der Nullpunkt ein gewöhnlicher Punkt der Lemniskate (23) und wird sie dort von der x-Achse berührt, so sind

$$(25)\qquad X'=n\xi'=\sum_{k=1}^{n}x_k'=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=0 \text{ und } Y'=n\eta'=\sum_{k=1}^{n}y_k'\neq 0.$$

Der Schwerpunkt $\zeta'=\xi'+i\eta'$ der Punkte z_k' $(k=1,2,\ldots,n)$ und damit auch der Punkt $Z'=X'+iY'=n\zeta'=\sum_{k=1}^{n}z_k'$, fallen also auf die y-Achse, d. h. auf die zum Nullpunkt gehörige Normale der Lemniskate.

Daraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion der Normalen der Lemniskate in einem gewöhnlichen Punkt:

XV. *Ist ζ ein gewöhnlicher Punkt der Lemniskate*

$$|f(z)|\equiv|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)|=|f(\zeta)|\quad (f(\zeta)\neq 0,\ f'(\zeta)\neq 0),$$

bezeichnet z_k' das Spiegelbild des Mittelpunktes z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ am Kreis $|z-\zeta|=1$ (oder an einem Kreis $|z-\zeta|=R$) und bezeichnet ζ' den Schwerpunkt der n Punkte z_k', so ist $\zeta'\neq\zeta$ und die Verbindungsgerade der Punkte ζ und ζ' schneidet die Lemniskate im Punkt ζ senkrecht. In dieser Konstruktion läßt sich der Punkt ζ' durch den Punkt Z' ersetzen, wenn

$$Z'-\zeta=\sum_{k=1}^{n}(z_k'-\zeta)=n(\zeta'-\zeta)$$

ist.

Aus diesem Satz folgt die bekannte Konstruktion[12]) der Normalen in einem Punkte M der Cassinischen Kurve mit den Mittelpunkten (Brennpunkten) F_1 und F_2:

[12]) LORIA, a. a. O., S. 217, Tafel VII, Fig. 53.

Man trage auf die Halbgerade MF_1 bzw. MF_2 die Strecke $\overline{MG_1} = \overline{MF_2}$ bzw. $\overline{MG_2} = \overline{MF_1}$ ab. Wenn N die vierte Ecke des Parallelogramms ist, das MG_1 und MG_2 als anstoßende Seiten hat, so ist die Gerade MN die Normale der Kurve im Punkte M.

Gehören nämlich die Zahlen 0, z_1, z_2, z_1', z_2', bzw. Z' zu den Punkten M, F_1, F_2, G_1, G_2, bzw. N, so ist $Z' = z_1' + z_2'$ und der Punkt G_k ist das Spiegelbild des Punktes F_k ($k = 1, 2$) am Kreis $|z| = R$, wenn

$$R^2 = |z_1 z_2| = |z_1 z_1'| = |z_2 z_2'|$$

ist.

Aus dem Satz XV folgt

XVI. *Die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate wird von jeder Normalen der Kurve in zwei Stücke geteilt. Eine Ausnahme kommt nur dann vor, wenn die Mittelpunkte der Lemniskate auf einer Geraden a liegen, weil dann auch diese Gerade eine Normale der Kurve ist.*

Die Gleichung (25) läßt sich auch in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} = 0, \quad \frac{1}{d_k} = x_k' = \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2} \tag{26}$$

schreiben. Hier bedeutet d_k den mit Vorzeichen versehenen Durchmesser des Kreises, der durch den Punkt z_k geht und im Nullpunkt die y-Achse berührt. Die Durchmesser d_h und d_k besitzen entgegengesetzte Vorzeichen bzw. dasselbe Vorzeichen, je nachdem die Punkte z_h und z_k von der y-Achse getrennt bzw. nicht getrennt werden. Liegt z_k auf der y-Achse, so ist $\frac{1}{d_k} = 0$.

Wir können die Indizes der Punkte z_k so wählen, daß

$$\frac{1}{d_1} \geqq \frac{1}{d_2} \geqq \ldots \geqq \frac{1}{d_n} \text{ und } -d_n = D \geqq 0.$$

Gibt es in der Summe (26) mindestens p positive und höchstens q negative Glieder, so sind

$$\frac{p}{d_p} \leqq \frac{q}{D} \text{ und } \frac{p}{d_1} \geqq \frac{1}{D} \text{ oder } D \leqq \frac{q d_p}{p} \leqq (n-1)\, d_p \text{ und } d_1 \leqq pD \leqq (n-1)\, D.$$

Hieraus erhält man unter anderem den Satz

XVII. *Es seien k und K einander in einem Punkte ζ der Lemniskate $L_n(\varrho)$ von außen berührende Kreise vom Durchmesser d bzw. $D = (n-1)\, d$. Enthält die Kreisscheibe k mindestens einen Kern der Lemniskate, so enthält die Kreisscheibe K mindestens einen. Enthält die Kreisscheibe k mindestens p Mittelpunkte der Lemniskate (jeden Mittelpunkt nach seiner*

Vielfachheit gerechnet), so enthält die Kreisscheibe K' vom Durchmesser $D'=\frac{n-p}{p}d$, von der die Kreisscheibe k im Punkt ζ von außen berührt wird, mindestens einen Kern der Lemniskate.

Aus dem Satz XV läßt sich der Satz ableiten:

XVIII. *Hat eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ die Kerne $z_1, z_2, \ldots, z_m$, bezeichnet p_h die Vielfachheit des Mittelpunktes z_h ($p_h \geqq 1$, $p_1+p_2+\ldots+p_m=n$) und bezeichnet $K(\sigma)$ $(0<\sigma\leqq 1)$ den Durchschnitt der $m-1$ Kreisscheiben*

$$|z-z_1|\leqq\frac{\sigma p_1}{n-p_1}|z-z_h| \qquad (h=2, 3,\ldots, m),$$

so bilden die zu einem in $K(\sigma)$ liegenden beliebigen Punkt ζ der Lemniskate gehörige Normale und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi\leqq\operatorname{arc}\sin\sigma\leqq\frac{\pi}{2}$.

Im Innern des konvexen Bereichs $K(1)$ besitzt die Lemniskate keinen singulären Punkt.

Dieser Satz gilt für die Normale in jedem Punkt ζ der Lemniskate, der in der Kreisscheibe

$$|z-z_1|=\sigma r,\ \sigma\leqq 1,\ r=\frac{\operatorname{Min}|z_h-z_1|}{n} \qquad (h=2, 3,\ldots, m)$$

liegt.

Jeder im Kreisring KR

$$\frac{r}{2}\leqq|z-z_1|\leqq\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

liegende (zusammenhängende) Bogen der Lemniskate ist sternartig in bezug auf die inneren Punkte der Kreisscheibe K_1: $|z-z_1|\leqq\frac{r\sqrt{2}}{4}$.

Zum Beweis dieses Satzes können wir annehmen, daß $\zeta=0$ ist. Dann hat man nach Satz XV

$$Z'=\sum_{k=1}^{m}p_h z_k'=z_0+Z_0,\ z_0=p_1 z_1',\ Z_0=\sum_{k=2}^{m}p_k z_k'$$

und

$$\varphi=\operatorname{arc}\frac{Z'-\zeta}{z_1-\zeta}=\operatorname{arc}\frac{Z'}{z_1}=\operatorname{arc}\frac{Z'}{z_1'}=\operatorname{arc}\frac{z_0+Z_0}{z_0}=\operatorname{arc}\left(1+\frac{Z_0}{z_0}\right),$$

weil $\operatorname{arc} z_1=\operatorname{arc} z_1'=\operatorname{arc} z_0$ ist.

Aus den Annahmen des Satzes XVIII folgt, daß

$$\left|\frac{z_h'}{z_1'}\right|=\left|\frac{z_1}{z_h}\right|\leqq\frac{\sigma p_1}{n-p_1} \quad\text{und}\quad \left|\frac{Z_0}{z_0}\right|\leqq\sum_{h=2}^{m}\frac{p_h}{p_1}\left|\frac{z_h'}{z_1'}\right|\leqq\sigma\frac{p_2+p_3+\ldots+p_m}{n-p_1}=\sigma$$

sind. Der Punkt $Z'=z_0+Z_0$ liegt also im Kreise K_0: $|z-z_0|\leqq\sigma|z_0|$.

Der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_0}$ und damit auch der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ bildet zum Vektor $\overrightarrow{\zeta Z'}$ einen nicht größeren Winkel φ als zu den Tangenten des Kreises K_0

von ζ aus. Daraus folgt daß $\sin\varphi \leqq \sigma$ ist. Damit ist der erste Absatz von XVIII bewiesen.

Liegt der Punkt ζ innerhalb von $K(1)$, so ist $Z' = z_0 + Z_0 \neq 0$, weil

$$\left|\frac{z'_h}{z'_1}\right| = \left|\frac{z_1}{z_h}\right| < \frac{p_1}{n-p_1} \text{ und deshalb } \left|\frac{Z_0}{z_0}\right| < 1 \text{ ist.}$$

Daraus folgt, daß ζ kein singulärer Punkt der Lemniskate ist. Damit ist der zweite Absatz von XVIII bewiesen.

Der Kreis $|z-z_1| = r$ liegt offenbar im Bereich $K(\sigma)$. Daraus folgt die Richtigkeit des dritten Absatzes von XVIII.

Liegt der Punkt ζ der Lemniskate im Kreisring KR, so bilden die zugehörige Normale und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi \leqq \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Tangente t von $L_n(\varrho)$ im Punkt ζ und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ bilden also einen Winkel $\psi \geqq \frac{\pi}{2} - \varphi \geqq \frac{\pi}{4}$. Für den Abstand d dieser Tangente vom Mittelpunkt z_1 aus gilt also die Ungleichung

$$d = |\zeta - z_1| \sin\psi \geqq \frac{r}{2} \sin\psi \geqq \frac{r}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{4}.$$

Die Tangente t geht also durch keinen inneren Punkt S der Kreisscheibe K_1.

Wir bezeichnen mit Γ einen (zusammenhängenden) Bogen der Lemniskate im Kreisring KR, mit P einen beliebigen Punkt von Γ und mit g_S die von einem inneren Punkt S der Kreisscheibe K_1 ausgehende Halbgerade durch P.

Die Halbgerade g_S berührt den Bogen Γ nicht, P ist kein singulärer Punkt der Lemniskate. Die gemeinsamen Punkte von Γ und g_S bleiben also getrennt und ihre Anzahl A verändert sich nicht, während der Punkt P den Bogen Γ beschreibt. Wäre nun $A > 1$, so bestände Γ aus A miteinander nicht zusammenhängenden Teilbogen. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des vierten Absatzes von XIX.

§. 8. Die Wendepunkte der Lemniskaten.

Ist der Nullpunkt ein Wendepunkt der Lemniskate (23) und ist die x-Achse die zugehörige Wendetangente, so ist $x=0$ eine mindestens dreifache Nullstelle des Polynoms

$$g(x) \equiv G(x,0) \equiv F(x,0) - F(0,0) \equiv \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + y_k^2] - \prod_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Daraus folgt, daß $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 0$ sind. Wegen der

Identitäten

$$\frac{g''(x)}{g(x)} \equiv \left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]' + \left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]^2, \quad \frac{g'(x)}{g(x)} \equiv 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+y_k^2},$$

$$\left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]' \equiv 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2-(x-x_k)^2}{[(x-x_k)^2+y_k^2]^2}$$

bestehen also die Gleichungen

$$(27) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2-y_k^2}{r_k^4} \equiv \sum_{k=1}^{n} (x_k'^2 - y_k'^2) = 0,$$

$$\sum x_k' = 0, \quad x_k' = \frac{x_k}{r_k^2}, \quad y_k' = \frac{y_k}{r_k^2}, \quad r_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Hieraus erhält man den Satz

XIX. *Ist ζ ein Wendepunkt der Lemniskate*

$$|f(z)| = |(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)| = |f(\zeta)| \neq 0,$$

bezeichnet t bzw. f die Wendetangente bzw. die Normale der Lemniskate im Punkt ζ und bezeichnet W_t bzw. W_f den rechtwinkligen Doppelwinkelraum vom Scheitel ζ mit der Winkelhalbierenden t bzw. f, so besitzt die Lemniskate im Innern beider Winkelräume mindestens je einen Mittelpunkt, oder ihre Mittelpunkte liegen alle auf den gemeinsamen Schenkeln von W_t und W_f.

Bezeichnet z_k' das Spiegelbild des Mittelpunktes z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ an einem Kreis $|z-\zeta| = R$, so besitzt das Punktsystems $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ in bezug auf die Achsen t und f dasselbe Trägheitsmoment.

Bezeichnet $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ die Menge der Punkte der Ebene, von denen die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate unter einem Winkel $\geqq \frac{\pi}{4}$ erscheint, so enthält der Bereich $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ jeden Wendepunkt der Lemniskate.

Der erste und zweite Absatz von XIX folgen aus der ersten Gleichung von (27). Der Wert $x_k^2 - y_k^2$ ist nämlich positiv bzw. negativ, wenn der Punkt z_k im Innern von $W_t \equiv W_x$ bzw. $W_f \equiv W_y$ liegt.

Wäre nun ein Wendepunkt ζ außerhalb von $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gelegen, so enthielte das Winkelraum W_f den Bereich H und damit jeden Mittelpunkt der Lemniskate im Innern, weil H von der Normalen f geschnitten wird (Satz XVI). Dies ist aber nach dem ersten Absatz unmöglich. Damit ist der Satz XIX bewiesen.

Hieraus folgt der Satz[13]) von WALSH: Enthält eine Kreisscheibe vom Halbmesser r jeden Mittelpunkt einer Lemniskate, so enthält die

---

[13]) A. a. O.

konzentrische Kreisscheibe vom Halbmesser r cosec $\frac{\pi}{8}$ die Wendepunkte der Kurve.

§. 9. Konvexe Züge der Lemniskaten.

Nach einem Satz[14]) von A. KNESER ist eine endliche, geschlossene und stetige Tangenten besitzende ebene Kurve, die keine singuläre Punkte und keine Wendepunkte besitzt, eine konvexe Kurve. Ein Zug einer Lemniskate ist also eine konvexe Kurve, wenn er keinen mehrfachen Punkt und keinen Wendepunkt besitzt.

Der Satz IX läßt sich also auf folgende Weise ergänzen:

XX. *Enthält die Kreisscheibe* $|z-a|\leqq r$ *die Mittelpunkte einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *und ist* $\varrho\geqq r\left(1+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\right)=r.\ 3.613\ldots$, *so ist die Lemniskate eine konvexe Kurve.*

Ist nämlich $\varrho\geqq r\left(1+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\right)$, so liegt die Lemniskate $L_n(\varrho)$ nach Satz X außerhalb des Kreises $|z-\alpha|\geqq\varrho-r=r\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}$. Sie besitzt also keinen singulären Punkt und keinen Wendepunkt.

Aus dem Satz XIX folgt

XXI. *Sind* $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *die Kerne einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *und ist*

$$\varrho\leqq r=\frac{\operatorname{Min}|z_h-z_1|}{2n}\qquad(h=2, 3,\ldots, m),$$

so besitzt die Lemniskate im Kreise K_1: $|z-z_1|\leqq r$ *einen konvexen Zug* Z_1.

Es gibt Lemniskaten n-ten Grades, die von 2n-ter zyklischer und 4-ter geometrischer Ordnung sind.

Der Kreis K_1 hat mit keinem Kreis $|z-z_h|=r\quad(h=2,3,\ldots,m)$ einen Punkt gemeinsam, weil $2r<|z_h-z_1|$ ist. Die Kreisscheibe K_1 enthält also einen Zug Z_1 der Lemniskate im Innern. Sie ist offenbar ein Teil des Bereichs $K\left(\frac{1}{2}\right)$ von XIX. Die Normale f in einem Punkt ζ von Z_1 bildet also mit dem Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi<\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Wir müssen nur zeigen, daß ζ kein Wendepunkt ist.

Wir können annehmen, daß der Punkt ζ mit dem Nullpunkt und die Normale f mit der reellen Achse zusammenfällt. Ist dann p_h die

---

[14]) A. KNESER, Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, *Math. Annalen,* **41** (1893), S. 349—376. Vgl. GY. v. SZ. NAGY, Einige Sätze über ebene Elementarkurven, *diese Acta,* **5** (1931), S. 83—89.

Vielfachheit des Mittelpunktes $z_h = x_h + iy_h = r_h(\cos\varphi_h + i\cdot\sin\varphi_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$, so läßt sich die Gleichung (27) des Wendepunktes $\zeta = 0$ in der Form

$$W \equiv \sum_{h=1}^{m}{}' \frac{p_h \cos 2\varphi_h}{r_h^2} = 0 \tag{28}$$

schreiben. In dieser Gleichung ist $\cos 2\varphi_1 > \frac{1}{2}$, weil $\varphi_1 < \frac{\pi}{6}$ ist.

Aus den Annahmen des Satzes XXI folgt, daß

$$W \geqq \frac{p_1 \cos 2\varphi_1}{r_1^2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h |\cos 2\varphi_h|}{r_h^2} >$$

$$> \frac{p_1}{2r_1^2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h}{r_h^2} = \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h r_1^2}{r_h^2}\right] = W_0 > 0,$$

weil

$$W_0 \geqq \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \frac{\Sigma p_h}{(2n-1)^2}\right] = \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \frac{n - p_1}{(2n-1)^2}\right] > 0.$$

Der Punkt ζ ist also kein Wendepunkt des Zuges Z_1.

Bezeichnet d den Minimalabstand zwischen je zwei Kernen einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, $\varrho \leqq \frac{d}{2n}$, so besitzt die Kurve in jedem Kreise $|z - z_h| \leqq \varrho$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ einen konvexen Zug. Ist $m = n$ und liegen die n Kerne auf einem Kreis K, so wird die Lemniskate von K in genau $2n$ Punkten getroffen, weil der Kreis K mit jedem Zug mindestens zwei, mit der Lemniskate aber nach Satz I höchstens $2n$ Punkte gemeinsam hat. Damit ist der Satz XXI bewiesen.[15])

(Eingegangen am 15. September 1947.)

[15]) Der Satz XXI ist nicht genau. Vermutlich ist ein einkerniger Zug einer Lemniskate eine konvexe Kurve. Der letzte Paragraph der Arbeit von Walsh (a. a. O.) erwähnt mehrere offene Fragen über die Lemniskaten.

On ellipsoids circumscribed and inscribed to polyhedra.

By LÁSZLÓ FEJES TÓTH in Budapest.

1. The ellipses (ellipsoids) circumscribed and inscribed to a polygon (polyhedron) Π are defined as the ellipse (ellipsoid) of smallest area (volume) containing Π, and that of largest area (volume) contained in Π, respectively. We shall denote in this paper a domain and its area (volume) by the same letter.

As a generalization of the fact that the radius of the circumscribed circle of an arbitrary triangle is at least twice as large as the radius of the inscribed circle[1]), we have the following proposition[2]):

If E_n and e_n are the circumscribed and inscribed ellipses of an n-sided polygon, then

$$E_n/e_n \geqq \cos^{-2}\frac{\pi}{n}.$$

Equality holds only for the affine images of regular polygons. Hence the ellipses circumscribed and inscribed to the "best" n-sided polygon — i. e. for which E_n/e_n takes its minimal value — are concentric and homothetic.

The analogous question in the space is to find among the polyhedra with n vertices or n faces those which minimize the quotient E_n/e_n of the volumes of the circumscribed and inscribed ellipsoids.

It follows from the nature of the problem that we cannot expect to obtain in such a simple manner the set of the best polyhedra for all values of n as in the two-dimensional case. Thus the question arises

---

1) To this fact and to the analogous problem for tetrahedra my attention was turned by Professor L. FEJÉR, who remarked the above inequality in 1897 as a competitor at the mathematical competition of the Loránd Eötvös Mathematical and Physical Society. *Cf:* J. KÜRSCHÁK, *Matematikai versenytételek* (Szeged, 1929); T. RADÓ, On mathematical life in Hungary, *American Math. Monthly,* 39 (1932), pp. 85—90.

2) *Cf.* L. FEJES TÓTH, An inequality concerning polyhedra, *Bulletin of the American Math. Society* (in the press), where — in footnote 5) — the affirmative part of the theorem below is also announced. We return to this question in view of the result in the negative direction.

whether at least — analogously to the two-dimensional problem — the ellipsoids circumscribed and inscribed to the best n-verticed or n-faced polyhedron are for all values of n concentric and homothetic, or they are not.

The answer to this question is given by the following

Theorem. *Consider the set of the pairs $\{E_n, e_n\}$ of ellipsoids circumscribed and inscribed to convex polyhedra, having either a given number n of vertices or a given number n of faces. In both cases the ellipsoids of any pair for which E_n/e_n takes its minimal value, are concentric but generally not homothetic.*

The natural and apparently easier question whether for the n-verticed or n-faced polyhedra which minimize the quotient R_n/r_n of the radii of the spheres containing and contained in the polyhedron, the corresponding spheres are concentric for all $n \geqq 4$ or not, is still undecided.

2. The affirmative part of the theorem announced above is a consequence of the following

Lemma. *If E_1, E_2, E_3 denote three ellipsoids, E_1 and E_3 being polar reciprocals of each other with respect to E_2, then*

$$E_1/E_2 \geqq E_2/E_3.$$

Equality holds only if E_1, E_2, E_3 are concentric.

It may be supposed that E_2 is the unit sphere with its centre at the origin, and that the x, y, z-axes are parallel to the principal axes $2a, 2b, 2c$ of E_1, respectively. Let ξ, η, ζ be the coordinates of the centre of E_1. Since, by hypothesis, the ellipsoid E_1 is carried by the polar reciprocity with respect to E_2 into an ellipsoid, it follows that there is no tangent plane of E_1 passing through the centre of E_2. (For to such a plane would correspond, by the polar reciprocity, a point at the infinity.) Consequently, E_1 contains the centre of E_2, thus $|\xi| < a, |\eta| < b, |\zeta| < c$.

The reciprocity, applied to the tangent planes of E_1 at the end-points of the axis of length $2a$, yields two points of E_3 lying on the x-axis, the distance of which is given by

$$\frac{1}{a+\xi} + \frac{1}{a-\xi} = \frac{2a}{a^2-\xi^2} \geqq \frac{2}{a}.$$

Similar considerations applied to the other axes of E_1 yield three mutually perpendicular chords of E_3 whose lengths are not less than $2/a$, $2/b$, $2/c$, respectively.

The diameters 2α, 2β, 2γ of E_3 parallel to these chords are, *a fortiori*, $\geqq 2/a, 2/b, 2/c$, respectively.

Consider the octahedron Ω with diameters $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$. We have $\Omega = \frac{4}{3}\alpha\beta\gamma \geqq \frac{4}{3}\frac{1}{abc}$.

Let us replace 2α by the diameter $2\alpha'$ of E_3 conjugate with respect to E_3 to the diametral plane $\beta\gamma$. Similarly, let us replace 2β by the diameter $2\beta'$ conjugate to the diametral plane $\alpha'\gamma$. The volume of the octahedron Ω has been increased by both steps. The diameters α', β', γ of the new octahedron Ω' are pair by pair conjugate with respect to E_3 and thus $\Omega' = \frac{4}{3}\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$, where $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ denote the principal axes of E_3. Since $\Omega' \geqq \Omega$, we have $E_3 = \frac{4\pi}{3}\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} \geqq \frac{4\pi}{3}\frac{1}{abc}$, i. e.

$$E_1 E_3 \geqq \frac{4\pi}{3} abc \frac{4\pi}{3}\frac{1}{abc} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 = E_2^2,$$

which proves the lemma. Equality holds only if $\xi = \eta = \zeta = 0$. In this case E_3 is also concentric with E_2 and its principal axes are $2/a$, $2/b$, $2/c$.

Let us suppose now that the ellipsoids E_n and e_n circumscribed and inscribed to the best n-verticed (n-faced) polyhedron P_n are not concentric. Taking polar reciprocals with respect to e_n, there corresponds to P_n a polyhedron P_n' with n-faces (vertices) contained in e_n and containing the ellipsoid E_n' reciprocal to E_n. A second polar reciprocity with respect to E_n' carries P_n' into a polyhedron P_n'' with n vertices (faces) contained in E_n' and containing the ellipsoid e_n' reciprocal to e_n. According to the lemma and to our hypothesis, we have

$$E_n / e_n > e_n / E_n' > E_n' / e_n'.$$

Hence P_n'' is better than P_n; this contradiction proves the theorem.

Since the ellipsoids of any extremal pair are generally not homothetic, the result proved just now is the most which can be said in this direction and it is surprising that this result could be obtained by such simple means, without using any of the more intricate properties of polyhedra.

3. Let us now turn to the negative part of our theorem.

The above considerations show that the minimal value of E_n/e_n for polyhedra having n vertices is equal to the minimal value of E_n/e_n for polyhedra having n faces and the best n-verticed and n-faced polyhedra are mutually polar reciprocals of each other with respect to the inscribed or circumscribed ellipsoid.

Therefore we can restrict ourselves to n-verticed polyhedra.

The circumscribed and inscribed ellipsoids of a tetrahedron are — as affine images of two concentric spheres — always homothetic. But the case $n = 5$ furnishes already the required exemple of an extremal pair E_5, e_5 of ellipsoids which are not homothetic.

A convex polyhedron with 5 vertices is generally a 6-faced double pyramid which can degenerate to a 4-sided pyramid (or to the convex envelope of 4 or less points).

It follows immediately that among the 5-verticed polyhedra P_5 contained in a sphere S, the double pyramid d, formed by the vertices of an equilateral triangle inscribed in the equator and of the two poles, has the greatest volume.

Somewhat more complicated is to determine the 5-verticed polyhedron D containing the sphere S, which has the least volume.

LHUILIER[3]) determined the $2m$-faced double pyramid D_m having the minimal value of $|D_m|^3/D_m^2$ where the sign of the absolute value denotes the surface area. D_m is composed by two congruent straight pyramids with regular m-goned bases, so that the greatest sphere S contained in D_m touches all faces at their centre of gravity.

We assert that D_3 is at the same time the polyhedron D having the least volume among the polyhedra P_5 with 5 vertices containing the sphere S of radius r and centre O. For decompose P_5 into 6 tetrahedra having the common vertex O. The altitudes of these tetrahedra being $\geqq r$, we have $P_5 \geqq \frac{r}{3}|P_5|$. Hence indeed, we have for all P_5 incongruent to D_3:

$$P_5 \geqq \frac{r^3}{27}\frac{|P_5|^3}{P_5^2} > \frac{r^3}{27}\frac{|D_3|^3}{D_3^2} = D_3.$$

From the extremum properties of the polyhedra d and D we obtain by well known properties of the affinity, for all 5-verticed convex polyhedra P_5:

$$e_5 \frac{D}{S} \leqq P_5 \leqq E_5 \frac{d}{S}$$

and hence

$$E_5/e_5 \geqq D/d.$$

The lower bound on the right side is reached e. g. for the 5-verticed double pyramid d. In this case E_5 is a sphere; on the other hand e_5 is an ellipsoid of revolution which touches the faces of d in their centre of gravity.

(Received September 15, 1947.)

[3]) S. LHUILIER, *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, etc.* (Varsaviae, 1782).

On straight line representation of planar graphs.

By ISTVÁN FÁRY in Szeged.

In the present note I shall prove that if a finite graph can be represented on the plane at all, it can be represented with straight segments as edges too, provided that the graph does not contain two edges joining the same nodes[1]).

Let us sketch the main ideas of the proof. Suppose the theorem holds for graphs with n nodes. Let G be a graph with $n+1$ nodes and having no multiple edges. By letting one of its edges shrink into a point we get a graph G^* having n nodes. Suppose first this graph G^* has no multiple edges; then by hypothesis we can draw it with straight segments as edges. Now, stretch the node which corresponds to the shrinken edge of G into a short straight edge. Thus we get G drawn with straight segments as edges. Secondly, if G^* has multiple edges, we can divide G by a circuit of three edges into two subgraphs; drawing these with straight segments as edges, one outside and the other inside of a triangle, we obtain a straight representation of the graph G.

Section **1** is devoted to the most important definitions. After stating our theorem in its exact form we show that it suffices to prove it for graphs, each region of which is bounded by a circuit of three edges (sections **2** and **3**). Section **4** is dealing with such "triangulated" graphs. In section **5** we construct to any given triangulated simple graph another which has one node less, but which is not necessarily simple. Making use of this reduction, we establish the theorem in section **6.**

1. In what follows we call a finite graph *planar* if it is represented

[1]) There is a well known theorem of KURATOWSKI (Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fundamenta Math.*, **15** (1930), pp. 271—283) which gives a necessary and sufficient condition of drawing an abstract graph on the plane. It was Mr. T. SZELE who posed the question what are the necessary and sufficient conditions *that a given abstract graph could be drawn with straight segments as edges.* He conjectured the above theorem.

on the plane with Jordan arcs as edges, meeting only at their endpoints: the *nodes* of the graph. If every edge of a planar graph is a straight segment, we call it a *straight graph.* A graph having no multiple edges (i. e. more than one edge joining the same nodes), will be called a *simple graph.* The plane is divided by the edges of the graph into a number of regions called the *regions of the graph.* A graph each region of which is bounded by a circuit of three edges will be called a *triangulated graph.*

The definition of *adjoining elements* is the following. A node is adjoining an edge if it is an endpoint of the edge. A node or an edge is adjoining to a region if it lies on the boundary of the region.

Definition. The graphs G and G' will be called *equal* if there can be established a *one-to-one correspondence* between the nodes, edges and regions of G and G' such that (1) adjoining elements correspond to adjoining elements, (2) the regions containing the point at infinity correspond to each other.

We shall prove the following

Theorem. *Every simple graph is equal to a straight graph*[2]).

2. Let G' be a given graph, D one of its regions, P and Q two different nodes adjoining to D. Let us join P and Q within D by an edge (Jordan arc) which meets G' only in the points P and Q. The graph thus completed will be denoted by G. If G is equal to a straight graph, then by leaving off the segment (edge) corresponding to the new edge we get a straight graph which is equal to G'. By induction we get easily the

Lemma 1. *If a graph is equal to a straight graph, then any of its subgraphs is also equal to a straight graph.*

As the structure of a graph may be "simplified" by adding new edges, it suffices, by our above remark, to deal with such completed graphs.

As a consequence of Lemma 1, our theorem will be proved if we establish the following two lemmas.

Lemma 2. *Every simple graph is a subgraph of a triangulated simple graph.*

Lemma 3. *Every triangulated simple graph is equal to a straight graph.*

3. In this section we prove Lemma 2.

---

[2]) Under topological transformations of the whole plane, graphs are transformed into equal ones. The converse is not generally true. However, we remark that our theorem holds true even if we modify the definition of equality, calling two graphs equal if they may be carried one into the other by a topological transformation of the whole plane.

Let be G a simple graph containing at least four nodes. We construct a triangulated simple graph G' having G as its subgraph.

The construction of G' is as follows. Let us select two nodes on the boundary of a region of G which are connected neither on the boundary of the region nor outside it. Connecting these nodes by an edge (a Jordan arc) which lies, except its endpoints, inside the region, we get a new graph: G_1. By definition, G_1 is a simple graph. Proceeding in a similar way with the graph G_i we construct a graph G_{i+1} $(i=1, 2, \ldots)$. As the number of nodes in G_i is the same as in G_{i+1}, we arrive at last to a graph G_k to which no G_{k+1} can be constructed, i. e. such that every couple of nodes adjoining to the same region of G_k are connected by an edge.

This graph $G'=G_k$ is connected[3]). For in the opposite case there would exist a region D which is adjoining two different parts of G'. Choosing the nodes P and Q on different parts of G', both adjoining to this region D, they would be connected by an edge. This is a contradiction.

Now we show that this connected simple graph G' is triangulated, i. e. every region D of it is bounded by a circuit of three edges. If there were on the boundary of D only one or two edges[4]), then G' and hence G would contain only three nodes, as G' is connected and simple. This contradicts to our hypothesis. Thus there are at least three edges a, b, c on the boundary of D. If these do not form a circuit, then there are at least four nodes P, Q, R, S on the boundary of the region D. But G' contains edges connecting the nodes adjoining to D, i. e. edges PQ, PR, PS, QR, QS, RS. These edges divide the plane into four regions, on the boundary of each of which there are only three nodes, and so D, which is a part one of the four regions, can not have all four points as boundary points. Having thus arrived to a contradiction, we have proved that all regions of G' are bounded by circuits of three edges.

4. Before proving the Lemma 3, we shall deal in this section with triangulated graphs and prove the following

Lemma 4. *Let G be a simple triangulated graph which has at least four nodes. If $PP_1, PP_2, \ldots, PP_k$ are all the edges starting from P, in their cyclic order, then the edges $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_kP_1$ are contained in G and form a circuit C_P which separates P from every other node of G.*

---

[3]) A graph is connected if it is connected as a point set. If in a graph every region is bounded by a circuit of three edges then it is connected. Conversely, if the graph is connected, then its regions are simply connected.

[4]) On the boundary of a region, there is always an edge. If there are only two nodes on the boundary of the region, then the graph, being connected, consists of this single edge.

Proof. Let us suppose first that P does not lie on the boundary of the region containing the point at infinity. In this case, P lies inside some circuits of the graph. Hence there exists an innermost circuit C'_P, with the nodes $P'_1, P'_2, \ldots, P'_m$, which contains P in its interior. The region adjoining to $P'_i\, P'_{i+1}$ inside C'_P has a third node on its boundary, say P'. We assert that $P' = P$. For, if $P' \neq P$, then $[P'_1P'_2, P'_2P'_3, \ldots, P'_iP', P'P'_{i+1}, \ldots, P'_mP'_1]$ is a circuit having P in its interior and lying inside C'_P which is a contradiction. Thus the triangular regions adjoining to the edges of C'_P have the common third node P, and as G has no multiple edges, these regions form a simply connected region, i. e. they fill out the interior of C'_P. As G has no node inside C'_P except P, C'_P coincides necessary with C_P and the lemma is proved for this case.

Analogously, if P is adjoining to the unbounded region, then $C_P = [P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_kP_1]$ is the outermost circuit which contains P in its exterior. The proof runs on the same lines as above, and hence our lemma is completely established.

5. Let G be a triangulated simple graph having more than three nodes. To prepare the proof by induction we construct from G a not necessarily simple graph G^* having one node less.

Construction of G^*. Let P be a node of G which does not adjoin to the unbounded region. If we leave off the edges starting from P, the graph thus obtained will coincide with G outside C_P and the interior of C_P will be empty. Let us join the point P_1 with the points $P_3, P_4, \ldots, P_{k-1}$ by lines not crossing each other and lying inside C_P. Denote by G^* the graph thus obtained.

The connection between G and G^* is stated in the following

Lemma 5. *If G^* is not a simple graph, then G has a circuit of three edges which separates two nodes.*

Proof. Suppose G^* is not simple. This can be the case only if two nodes are connected by a new edge and an edge running outside C_P, hence there is a node P_i $(2 \leqq i \leqq k-1)$ which is joined with P_1 by an edge outside C_P. As the nodes P_1, P_2, P_i, P_k follow in this order on C_P and are all different, the circuit $[P_1P, PP_i; P_iP_1]$ (P_iP_1 *outside* C_P) separates P_2 from P_k. Hence our lemma is proved.

6. Now we are able to prove Lemma 3. As our lemma is trivial for graphs having three nodes, suppose it holds for graphs having ν nodes, where $3 \leqq \nu \leqq n$. Let G be a graph with $n+1$ nodes. Let P be a node of G, not adjoining to the unbounded region and construct the graph G^* as above. As P does not lie on the boundary of the region which contains the point at infinity, this region is bounded by the same circuit in G^* as in G. We distinguish two cases according to as G^* is simple or not.

If G^* is simple, then by hypothesis there exists a straight graph $\bar{G}^*$ equal to $\bar{G}^*$. Denote by $\bar{X}$ the node of G^* corresponding to the node X of G^*. Consider the circuit $\bar{C}_P=[\bar{P}_1 P_2,\ldots,\bar{P}_k\bar{P}_1]$ of the straight graph $\bar{G}^*$. The straight lines through $\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$ $(2\leqq i\leqq k-1)$ do not pass through $\bar{P}_1$ as otherwise the edges $\bar{P}_1\bar{P}_i$ and $\bar{P}_1\bar{P}_{i+1}$ would have a common segment. One of the two half-planes defined by the straight line $\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$ $(2\leqq i\leqq k-1)$ is thus characterised by the point $\bar{P}_1$. The intersection of these half-planes (for $i=2, 3,\ldots, k-1$) is a convex region K' with inner points. Let K be the common part of K' and of the interior of $\bar{C}_P$. It can be easily seen that any segment connecting an arbitrary inner point of K with a boundary point of $\bar{C}_P$ lies inside $\bar{C}_P$ but its endpoint. Leaving off the segments $\bar{P}_1\bar{P}_3, \bar{P}_1\bar{P}_4,\ldots,\bar{P}_1\bar{P}_{k-1}$ from $\bar{G}^*$, the interior of $\bar{C}_P$ will be empty. Choosing a point $\bar{P}$ inside K and drawing the segments $\bar{P}\bar{P}_1, \bar{P}\bar{P}_2,\ldots,\bar{P}\bar{P}_k$, we get a graph which is equal to G.

If G^* is not a simple graph, then, by Lemma 5, there exists a circuit of three edges $\varDelta$ in G which separates two nodes. In this case $\varDelta$ and the edges outside it form a triangulated graph G_1. Similarly $\varDelta$ and the edges inside it form another triangulated graph G_2. Both graphs have at most n nodes. Let $\bar{G}_i$ be a straight graph equal to G $(i=1,2)$. The triangle $\varDelta_1$ corresponding to $\varDelta$ in $\bar{G}_1$ is empty; $\bar{G}_2$ lies inside $\varDelta_2$ corresponding to $\varDelta$ in $\bar{G}_2$ (this holds by the property (2) of equality given in section **1**). By an aptly chosen affine transformation we can transform $\varDelta_2$ into $\varDelta_1$ so that adjoining regions in G shall be transformed into adjoining regions. Thus Lemma 3 has been proved and this concludes the demonstration of our theorem.

(Received November 25, 1946.)

Über die Lage der Doppelgeraden von gewissen Flächen gegebener geometrischer Ordnung.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

1. Unter einer Fläche verstehen wir eine stetige und geschlossene Fläche, die in jedem ihrer Punkte eine stetige Berührungsebene besitzt, die kein ebenes Flächenstück enthält und für die und für ihre Berührungskegel jede ebene Schnittkurve sich in eine endliche Anzahl von Konvexbogen zerlegen läßt. Die ebenen Schnittkurven können ganze Geraden enthalten. Es handelt sich in dieser Arbeit nur um *solche Flächen, die keine Ebene und keine Regelfläche zweiter Ordnung enthalten.*

Die *geometrische Ordnung* (oder kurz die *Ordnung*) einer Fläche ist die höchste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Fläche von einer nicht ganz der Fläche zugehörigen Geraden getroffen wird. Es wird angenommen, daß jede Gerade, die mit der Fläche eine größere Anzahl von Punkten gemeinsam hat, als die Ordnung angibt, ganz auf der Fläche liegt und daß die Fläche von jeder Geraden, die durch einen Punkt P einer k-fachen Geraden der Fläche geht, k-fach in P getroffen wird.

Früher habe ich den Satz bewiesen[1]):

Hat eine Fläche n-ter Ordnung $n-2$ Schalen dritter Ordnung (und höchstens eine Schale zweiter Ordnung), so haben die Doppelgeraden der Fläche einen Punkt gemeinsam. Die einzige Ausnahme kann im Falle $n=6$ auftreten. Es gibt nämlich eine Fläche 6-ter Ordnung, die vier Schalen 3-ter Ordnung besitzt und deren Doppelgeraden die sechs Kanten eines Tetraeders sind. Diese Flächen n-ter bzw. 6-ter Ordnung sind vom Maximalindex, d. h. sie haben mit jeder Geraden mindestens $n-2$ bzw. 4 Punkte gemeinsam.

Ist die Ordnung n einer Fläche kleiner als 6, oder hat die Fläche eine $(n-3)$-fache, oder $(n-2)$-fache Gerade, so kann man die Lage

[1]) GY. (J.) v. SZ. NAGY, Über Flächen vom Maximalindex, *Math. Annalen,* **98** (1928), S. 657–683.

ihrer Doppelgeraden auch dann einfach charakterisieren, wenn die Fläche nicht vom Maximalindex ist.

2. Man kann leicht einsehen, daß eine Fläche 3-ter Ordnung, die keine Ebene enthält, höchstens eine Doppelgerade besitzt.

Bezeichnet F eine Fläche 4-ter oder 5-ter geometrischer Ordnung, (die keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält), so gelten die Sätze:

I. *Eine Fläche F besitzt nicht drei solche Doppelgeraden, die in einer Ebene liegen, oder windschief sind.*

II. *Enthält eine Ebene zwei Doppelgeraden g_1 und g_2 einer Fläche F, so enthält sie außerhalb beider Geraden g_1 und g_2 keinen Doppelpunkt der Fläche.*

III. *Besitzt eine Fläche F zwei windschiefe Doppelgeraden g_1 und g_2, so wird das Geradenpaar $g_1 g_2$ von jeder anderen Doppelgeraden der Fläche geschnitten. Hat die Fläche außer g_1 und g_2 noch die Doppelgeraden g_3 und g_4, so sind auch g_3 und g_4 windschief. Die Geraden g_1, g_2, g_3, und g_4 bilden dann ein räumliches Viereck und die Fläche hat keine andere Doppelgerade.*

IV. *Haben drei Doppelgeraden einer Fläche F einen Punkt P gemeinsam, so gehen auch ihre übrigen Doppelgeraden durch P.*

V. *Besitzt eine Fläche F mindestens 5 (verschiedene) Doppelgeraden, so haben ihre Doppelgeraden einen Punkt gemeinsam.*

VI. *Es gibt Flächen F, deren Doppelgeraden die Seiten eines räumlichen Vierecks sind. Es gibt Flächen F mit beliebig vielen Doppelgeraden.*

3. Hätte eine Fläche F (4-ter oder 5-ter Ordnung) in einer Ebene drei Doppelgeraden oder zwei Doppelgeraden g_1 und g_2 und einen außerhalb von g_1 und g_2 liegenden Doppelpunkt A, so würde die Fläche von jeder Geraden bzw. von jeder durch A gehenden Geraden der Ebene in mindestens 6 Punkten getroffen. Darum müßten diese Geraden und damit auch ihre Ebene der Fläche zugehören. Hätte eine Fläche F drei windschiefe Doppelgeraden g_1, g_2 und g_3, so würde sie von jeder gemeinsamen Transversalen t der Geraden g_1, g_2 und g_3 in mindestens 6 Punkten getroffen. Deshalb müßten die Transversalen t und auch die von ihnen gebildete Regelfläche 2-ter Ordnung der Fläche zugehören.

Damit sind die Sätze I und II bewiesen, weil F keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält.

Besitzt eine Fläche F die Doppelgeraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_d$ $(d \geqq 3)$ und sind g_1 und g_2 windschief, so trifft g_3 mindestens eine der Geraden g_1 und g_2 (Satz I). Würde g_2 von g_3 nicht getroffen, so würde die Ebene $g_1 g_3$ von g_2 außerhalb von g_1 und g_3 getroffen. Dies ist aber unmöglich (Satz II). g_3 trifft also beide Geraden g_1 und g_2. Ist $d \geqq 4$, so fallen die Geraden g_3 und g_4 nicht in eine Ebene. Widrigenfalls enthielte die Ebene $g_3 g_4$ drei Doppelgeraden: g_3, g_4 und eine der Geraden g_1 und g_2. Dies ist aber nach Satz I unmöglich. Im Falle $d \geqq 5$ wären also die Geraden g_3, g_4 und g_5, im Widerspruch zum Satz I, windschief.

Damit ist der Satz III bewiesen.

Bilden die Doppelgeraden g_1, g_2 und g_3 einer Fläche F eine Ecke, so fällt der Schnittpunkt eines vierten Doppelgeraden g_4 mit einer Ebene der Ecke nach Satz II mindestens auf eine Kante der Ecke. Dies ist nur dann möglich, wenn g_4 durch den Scheitel der Ecke geht. Damit ist der Satz IV bewiesen.

Der Satz V folgt aus den Sätzen III und IV.

Es gibt nämlich unter den Doppelgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ einer Fläche F im Falle $d > 4$ kein windschiefes Paar. Die Gerade g_3 schneidet deshalb beide Geraden g_1 und g_2 und geht deshalb durch den gemeinsamen Punkt von g_1 und g_2, weil sie nicht in die Ebene $g_1 g_2$ fallen kann. Damit ist der Satz V bewiesen.

4. Man kann leicht einsehen, daß die Gleichung

$$H_4(x, y, z, t) = x^2 t^2 + xyzt + y^2 z^2 = 0$$

bzw.

$$H_5(x, y, z, t) = x^3 t^2 + x^2 t^3 + y^2 z^3 + y^3 z^2 + xyzt(x + y + z + t) = 0$$

in homogenen Tetraederkoordinaten eine Fläche F 4-ter bzw. 5-ter geometrischer Ordnung herstellt, für welche die vier Kanten des Koordinatentetraeders

$$x = 0, y = 0;\ x = 0, z = 0;\ y = 0, t = 0 \text{ und } z = 0, t = 0$$

Doppelgeraden sind.

Bezeichnet C eine aus einem Oval Z_0 und aus einem Zug Z_1 3-ter Ordnung bestehende Kurve 3-ter Ordnung und bezeichnet n eine beliebige natürliche Zahl, so kann man leicht ein zweites Oval Z_0' konstruieren, so daß Z_0' von Z_0 in $2n$ Punkten geschnitten wird und daß Z_0' (wie Z_0) von keiner Geraden getroffen wird, die mit Z_1 drei Punkte gemeinsam hat. Die Züge Z_0 und Z_0' bzw. Z_0, Z_0' und Z_1 bilden dann eine Kurve K_4 bzw. K_5 4-ter bzw. 5-ter Ordnung mit $2n$ Doppelpunkten. Projiziert man die Kurve K_4 bzw. K_5 von einem außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt aus, so erhält man eine Kegelfläche F 4-ter bzw. 5-ter Ordnung mit $2n$ Doppelgeraden. Damit ist der Satz VI bewiesen.

5. Die Sätze I—VI lassen sich so verallgemeinern:

Bezeichnet F eine Fläche n-ter Ordnung ($n \geqq 4$), die keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält und die eine $(n-3)$-fache *oder* $(n-2)$*-fache Gerade* g_0 *und* d (>2) *Doppelgeraden* $g_1, g_2, \ldots, g_d$ *besitzt, so gelten die Sätze:*

VII. *Es gibt kein Geradentripel* g_0, g_i, g_k $(1 \leqq i < k \leqq d)$, *dessen Geraden in einer Ebene liegen oder windschief sind.*

VIII. *Enthält eine Ebene die Geraden* g_0 *und* g_1, *so enthält sie außerhalb von* g_0 *und* g_1 *keinen Doppelpunkt der Fläche F. Liegen die Geraden* g_1 *und* g_2 *in einer Ebene, so fällt der Schnittpunkt dieser Ebene mit* g_0 *mindestens auf eine der Geraden* g_1 *und* g_2.

IX. *Sind die Geraden* g_0 *und* g_1 *windschief, so werden beide Geraden von jeder der übrigen* $d-1$ *Doppelgeraden* $g_2, g_3, \ldots, g_d$ *getroffen.*

X. *Die* $(n-3)$*-fache, oder* $(n-2)$*-fache Gerade* g_0 *wird von mindestens* $d-1$ *Doppelgeraden der Fläche geschnitten.*

6. Hätte eine Fläche F (n-ter Ordnung mit einer $(n-3)$-fachen oder $(n-2)$-fachen Geraden g_0 und mit den Doppelgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$) in einer Ebene E zwei unter den Geraden g_0, g_1 und g_2 und einen außerhalb beider Geraden liegenden Punkt A der dritten Geraden, so würde die Fläche von jeder durch A gehenden Geraden der Ebene E in mindestens $(n-3)+2+2=n+1$ Punkten getroffen. Deshalb müßte die Ebene E der Fläche F zugehören. Wären die Geraden g_0, g_1 und g_2 windschief, so würden ihre Transversalen der Fläche zugehören. Daraus folgen die Sätze VII und VIII.

Sind g_0 und g_1 windschief, so trifft g_2 (nach Satz VII) mindestens eine von ihnen. Würde g_0 bzw. g_1 von g_2 nicht getroffen, so müßte die Ebene $g_1 g_2$ bzw. $g_0 g_2$ (nach Satz VIII) der Fläche zugehören. Daraus folgt der Satz IX.

Wird g_0 von einer Geraden g_i $(i>0)$ nicht getroffen, so wird sie (und g_i) von den übrigen $d-1$ Geraden g_k geschnitten. Daraus folgt der Satz X.

Die Sätze VII—X gelten offenbar auch dann, wenn die Vielfachheit einiger Geraden unter $g_1, g_2, \ldots, g_d$ für F größer als Zwei ist.

7. Die Sätze III und IV lassen sich auch auf folgende Weise verallgemeinern:

Bezeichnet F' *eine Fläche n-ter Ordnung, welche die mehrfachen Geraden* $g_1, g_2, \ldots, g_d$ *von den Vielfachheiten* $m_1, m_2, \ldots, m_d$ $(m_k \geqq 2, d>2)$ *besitzt, so gelten die Sätze:*

XI. *Sind* g_1 *und* g_2 *windschief und ist* $n-1 \leqq m_1+m_2 \leqq n$, *so wird das Geradenpaar* g_1, g_2, *von jeder der übrigen* $d-2$ *Geraden* g_k *geschnitten.*

XII. *Sind* $m_1+m_2 \geqq n-1$, $m_1+m_3 \geqq n-1$, $m_2+m_3 \geqq n-1$ *und haben die Geraden* g_1, g_2 *und* g_3 *einen Punkt S gemeinsam, so geht auch jede andere Gerade* g_k *durch S.*

Der Beweis des Satzes XI geschieht ebenso, wie derjenige des Satzes IX.

Die Geraden g_1, g_2, g_3 im Satz XII sind Kanten einer Ecke vom Scheitel S, weil sie nicht in eine Ebene fallen können. Der Schnittpunkt A der Geraden g_4 mit der Ebene $g_1 g_2$ ($g_1 g_3$ bzw. $g_2 g_3$) fällt nicht außerhalb beider Geraden g_1, g_2 (g_1, g_3 bzw. g_2, g_3). Widrigenfalls hätte jede durch A gehende Gerade der Ebene mit F' mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam. Daraus folgt, daß g_4 jede der Geraden g_1, g_2, g_3 schneidet und deshalb durch S geht. Damit ist der Satz XII bewiesen.

Aus den Sätzen XI und XII folgt die folgende Verallgemeinerung von V:

XIII. *Bezeichnet F_6 bzw. F_7 eine Fläche 6-ter bzw. 7-ter Ordnung, welche $d\,(\geqq 5)$ mehrfache Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ besitzt, unter denen die Geraden g_1, g_2, bzw. g_1, g_2, g_3, dreifache Geraden sind, so haben die d Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ einen Punkt gemeinsam.*

Wir nehmen erst an, daß g_1 und g_2 windschief sind. Dann wird das Geradenpaar g_1, g_2 (nach Satz IX) von den Geraden $g_3, g_4, g_5, \ldots$ geschnitten. Die Geraden g_3, g_4, g_5 sind windschief. Widrigenfalls enthielte die Ebene $g_3 g_4$ ($g_3 g_5$ oder $g_4 g_5$) noch eine der Geraden g_1 und g_2. Dann würde die Fläche F_6 bzw. F_7 von jeder Geraden der betreffenden Ebene in mindestens 7 bzw. 8 Punkten getroffen.

Daraus folgt, daß je zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 sich schneiden müssen. Die Geraden g_1, g_2, g_3 bilden eine Ecke, weil sie nicht in eine Ebene fallen können. Damit ist der Satz XIII auf Grund von XII bewiesen.

8. Wir beweisen noch die Sätze:

XIV. *Enthält eine Fläche F_0 n-ter Ordnung keine Ebene und besitzt sie eine $(n-1)$-fache Gerade g_0, so ist sie eine Regelfläche, die außerhalb von g_0 keinen singulären Punkt besitzt.*

XV. *Enthält eine Fläche F'_0 n-ter Ordnung keine Regelfläche 2-ter Ordnung, besitzt sie eine m-fache Gerade g_0 und eine $m'=(n-m)$-fache Gerade g'_0 und sind g_0 und g'_0 windschief, so ist F'_0 eine Regelfläche.*

Die Fläche F_0 wird von einer Ebene, die durch g_0 und durch einen außerhalb von g_0 liegenden beliebigen Punkt P von F_0 geht, in der $(n-1)$-fach zu rechnenden Geraden g_0 und in einer durch P gehenden Geraden getroffen. Wäre P ein singulärer Punkt von F_0, so würde E zu F_0 gehören, weil jede durch P gehende Gerade der Ebene mit F_0 mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam hätte.

Bezeichnet P einen außerhalb beider Geraden g_0 und g'_0 liegenden Punkt der Fläche F'_0, so liegt die durch P gehende Transversale von g_0 und g'_0 ganz auf der Fläche, weil sie mit F'_0 mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam hat.

(Eingegangen am 10. Dezember 1946.)

Über die Theorie der Mittelwerte.

Von J. ACZÉL und ST. FENYŐ in Budapest.

Einleitung. Zu den meisten vorkommenden Mittelwerten (z. B. dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, den Potenzmitteln; und auch zu ihren Gewichtsmitteln) kann man eine Funktion $f(x)$ und eine solche reelle Zahl p finden, daß

$$f[M(x,y)] = pf(x) + qf(y) \qquad (p+q=1) \tag{1}$$

für jede $a \leqq x, y \leqq b$ stattfindet, für welche die Mittelwertfunktion $M(x,y)$ (im folgenden meistens Mittelwert, oder Mittel genannt) einen Sinn hat[1]. Mittelwerte solcher Natur werden *quasiarithmetische Mittel* genannt. Die Funktion $f(x)$ in (1) nennen wir (nach den ersten Verfassern, die Resultate dieser Art erhalten haben) die „Kolmogoroff-Nagumosche" oder kurz „K-N" Funktion[2]. Z. B. sind die K-N Funktionen der oben genannten Mittel der Reihe nach x, $\log x$, $\frac{1}{x}$, x^n. Aus (1) ersieht man ohne weiteres, daß mit $f(x)$ zugleich auch jede Funktion der Form $\alpha f(x) + \beta$ K-N Funktion des Mittels $M(x,y)$ ist. Ist $M(x,y)$ ein symmetrisches Mittel, so muß in (1) offenbar $p = q = \frac{1}{2}$, $f[M(x,y)] = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ sein.

Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Quasiarithmetizität eines Mittels $M(x,y)$ wurde für symmetrische Mittel zuerst von A. KOLMOGOROFF und M. NAGUMO[2] beantwortet. Ihr Bedingungssystem enthält die Annahme, daß die Mittelwertfunktion für beliebig viele Veränderliche definiert ist. Für symmetrische *analytische* Mittelwertfunktionen einer bestimmten Anzahl von *komplexen* Veränder-

[1] Es ist leicht zu sehen, wie die Gleichung (1) und alle folgenden Erörterungen auf Mittelwertfunktionen von n Veränderlichen übertragen werden können.

[2] A. KOLMOGOROFF, Sur la notion de la moyenne, *Atti dei Lincei*, 12 (1930), S. 388—391; M. NAGUMO, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Math.*, 7 (1930), S. 71—79.

lichen gab G. AUMANN[3]) ein Bedingungssystem der Quasiarithmetizität. Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen ohne jede Annahme über die Differentierbarkeit wurde im Falle solcher symmetrischen Mittel, die nur für *eine bestimmte Anzahl* der Veränderlichen (z. B. nur für zwei Veränderliche) definiert sind, in der Dissertation von ST. FENYŐ (Budapest, 1945) aufgeworfen. Solche Bedingungen wurden für symmetrische und nicht-symmetrische Mittel von J. ACZÉL[4]) angegeben[5]).

Keine der genannten Arbeiten enthält aber eine explizite Darstellung der K-N Funktion durch $M(x, y)$.[6]) Ihre Existenz wurde vielmehr nur durch einen mehr oder minder verwickelten Konstruktionsprozeß bewiesen. Das Ziel der gegenwärtigen Abhandlung ist die Angabe solcher notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Quasiarithmetizität, welche zugleich die explizite Darstellung der K-N Funktion durch $M(x, y)$ enthüllen. Wir beweisen den

Satz. *$M(x, y)$ ist dann und nur dann quasiarithmetisch, das heißt, es gibt dann und nur dann eine streng monotone und zweimal stetig differentierbare Funktion*[7]) *$f(x)$, die der Gleichung* (1) *genügt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

I. *$M(x, y)$ ist in beiden Variabeln streng monoton und besitzt stetige zweite partielle Ableitungen;*

II. $M(t, t) = t$;

III. $M_1(t, t) = p$, *konstant (das ist die in* (1) *vorkommende Zahl p);*

IV.[8]) $\dfrac{M_{12}(x, y)}{M_1(x, y)\, M_2(x, y)} = \pi[M(x, y)]$ *(also eine Funktion von $M(x, y)$ allein).* (§. **1.**)

Bedingung IV *läßt sich durch* ***eine*** *der folgenden ersetzen*[9]):

---

[3]) G. AUMANN, Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, II (analytische Mittelwerte), *Math. Annalen,* **111** (1935), S. 713—730. Die Bedingungen und Rechnungen sind hier wesentlich mehr verwickelt, als in den übrigen zitierten Arbeiten.

[4]) J. ACZÉL, The notion of mean values, *Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger,* **19** (1946), S. 83—86 und J. ACZÉL, On mean values, *Bulletin of the American Math. Society,* im Erscheinen.

[5]) Bedingungssysteme etwas anderer Art wurden von B. DE FINETTI, Sul concetto di media, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuarii,* **2** (1931), S. 369—396, T. KITAGAWA, On some class of weighted means, *Proceedings Phys.-Math. Society of Japan,* **16** (1934), S. 117—126 und J. ACZÉL, Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris,* im Erscheinen, angegeben, indem sie nämlich Gewichtsmittel mit gegebenen Gewichten betrachteten.

[6]) Außer den in [5]) genannten Arbeiten von B. DE FINETTI und J. ACZÉL.

[7]) Den leicht zu erledigenden Fall, wo eine Ableitung von $f(x)$ oder eine partielle Ableitung von $M(x, y)$ identisch verschwindet, lassen wir im Folgenden außer Acht.

[8]) Wir bezeichnen: $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial x} = M_1(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x \partial y} = M_{12}(x, y)$ usw.

[9]) IVa enthält keine indirekte Funktion mehr; IVb zeigt, daß in I die Forderung der Existenz und Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen genügt.

IV*a*. $\dfrac{M_{11}(x,y)\,M_2(x,y)-M_1(x,y)\,M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)\,M_2(x,y)}=\varrho(x)$ (*eine Funktion von x allein*);

IV*b*. $\dfrac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)}=\dfrac{\sigma(x)}{\tau(y)}$ (*die Veränderlichen x, y sind in ihr „getrennt"*).

Die explizite Form der K-N Funktion ist dementsprechend:

$$\text{(IV*)}\qquad f(x)=\int^x e^{-\int^z \pi(t)\,dt}\,dz=\int^x e^{-\frac{1}{pq}\int^z M_{12}(t,t)\,dt}\,dz,$$

bzw.

$$\text{(IV}a^*\text{)}\qquad f(x)=\int^x e^{\int^z \varrho(t)\,dt}\,dz,$$

bzw.

$$\text{(IV}b^*\text{)}\qquad f(x)=c\int^x \sigma(z)\,dz=k\int^x \tau(z)\,dz=\int^x \frac{M_1(u,v)}{M_2(u,v)}\,du$$

(*c, k, v sowie auch die unteren Grenzen der Integrale sind beliebige Konstanten*) (§. 2).

Den gewonnenen Satz wollen wir auch auf einen konkreten Fall anwenden (§. 3). Endlich (§. 4) weisen wir noch kurz darauf hin, daß diese Bedingungen im Wesentlichen mit denen der unter[4]) zitierten Arbeiten äquivalent sind.

§. 1. Wir beginnen mit der Notwendigkeit der Bedingungen, das heißt, mit dem Beweise, daß sie aus der Existenz einer streng monotonen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ folgen, die der Gleichung (1) genügt. Da man aus (1) $M(x,y)=f^{-1}[pf(x)+qf(y)]$ gewinnt, folgt aus ihr I und II unmittelbar. Derivieren wir (1) nach x bzw. nach y, so erhalten wir:

$$\text{(2)}\qquad f'[M(x,y)]\,M_1(x,y)=pf'(x),$$

$$\text{(3)}\qquad f'[M(x,y)]\,M_2(x,y)=qf'(y).$$

Setzen wir in beiden Gleichungen $x=y=t$, so bekommen wir $M_1(t,t)=p$, d. h. III, ferner die neue Gleichung

$$\text{(III')}\qquad M_2(t,t)=q=1-p.$$

Wird nun (2) weiter deriviert nach y, so erhalten wir:

$$f''[M(x,y)]\,M_1(x,y)\,M_2(x,y)+f'[M(x,y)]\,M_{12}(x,y)=0,$$

$$\frac{M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)\,M_2(x,y)}=-\frac{f''[M(x,y)]}{f'[M(x,y)]}=\pi(M)$$

und dies ist eben IV. Schreiben wir ferner in der letzten Gleichung $x=y=t$, so folgt aus II, III und (III')

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=-\pi(t)=-\frac{M_{12}(t,t)}{pq},$$

d. h.

$$\log f'(z) = -\int^{z} \pi(t)\,dt = -\frac{1}{pq}\int^{z} M_{12}(t,t)\,dt,$$

woraus unmittelbar

$$f(x) = \int^{x} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz = \int^{x} e^{-\frac{1}{pq}\int^{z} M_{12}(t,t)\,dt}\,dz,$$

also (IV*) folgt.

Wir bemerken noch, daß (III′) auch allein aus II und III abgeleitet werden kann: derivieren wir II nach t und setzen III in die erhaltene Gleichung $M_1(t,t)+M_2(t,t)=1$ ein, so erhalten wir (III′).

Nun wollen wir beweisen, daß die Bedingungen I—IV auch hinreichen, d. h. daß die Funktion (IV*) der Gleichung (1) genügt, falls die Bedingungen I—IV gültig sind.

Aus der in der Gestalt

$$M_{12}(x,y) - \pi(M)\,M_1(x,y)\,M_2(x,y) = 0$$

geschriebenen Gleichung IV folgt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,dt} M_1(x,y)\right] = e^{-\int^{M}\pi(t)\,dt}\,[M_{12}(x,y)-\pi(M)\,M_2(x,y)\,M_1(x,y)]=0,$$

das heißt, die in der ersten Klammer stehende Funktion $F(x,y)$ ist von y unabhängig, deshalb ist $F(x,y)=F(x,x)$, d. h., unter Anwendung von II und III:

$$e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,dt} M_1(x,y) = p\,e^{-\int^{x}\pi(t)\,dt},$$

oder

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\int^{M(x,y)} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz - p\int^{x} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz\right] =$$

$$= p\,e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt} - e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,d}\;M_1(x,y) = 0;$$

also ist die in der Klammer stehende Funktion, die wegen IV nichts anderes, als $G(x,y)=f[M(x,y)]-pf(x)$ ist, von x unabhängig. Deshalb muß $G(x,y)=G(y,y)$ sein, d. h. $f[M(x,y)]-pf(x)=(1-p)f(y)=$ $=qf(y)$, w. z. b. w.

§. 2. Auch die Systeme I—II—III—IVa, bzw. I—II—III—IVb reichen hin und sind notwendig zur Quasiarithmetizität des Mittels $M(x,y)$. Vorderhand beweisen wir, daß die Bedingungen IVa und IVb mit einander äquivalent sind. Es folgt nämlich z. B. aus IVa

$$\varrho(x) = \frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)} - \frac{M_{12}(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}[\log M_1(x,y) - \log M_2(x,y)].$$

Integrieren wir nach x, so erhalten wir

$$\log \frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \log \sigma(x) - \log \tau(y),$$

also eben IVb. Hier ist $\sigma(x) = e^{\int^x \varrho(z)\,dz}$, $\tau(y)$ eine beliebige (positive) Funktion von y, also ist auch (IVa^*) mit (IVb^*) äquivalent. Dieser Beweisgang läßt sich offenbar umkehren; deshalb sind IVa und IVb äquivalent. Im Folgenden wollen wir uns nur mit IVb beschäftigen. [Wir bemerken noch, daß IV (resp. IVa, IVb) durch zahlreiche andere ähnliche Bedingungen ersetzt werden kann. Z. B. durch

$$M_{11}(M, M) M_1(x, y) + pq \frac{M_{11}(x, y)}{M_1(x, y)} = \varphi(x)$$

(von y unabhängig); oder durch

$$\frac{M_1[M(x, y), z]}{M_2[M(x, y), z]} M_2(x, y) = \psi(y, z)$$

(von x unabhängig). Die Beweise verlaufen auch in diesen Fällen ganz ähnlich.]

Die Notwendigkeit der Bedigung IVb (also auch von IVa) folgt durch Division der beiden aus (1) erhaltenen Gleichungen (2) und (3). Dies ergibt nämlich

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{pf'(x)}{qf'(y)}$$

und das ist eben IVb mit $\sigma(x) = pf'(x)$, $\tau(y) = qf'(y)$. Zugleich gewinnt man auch (IVb^*) (wir setzen $f(y) = k$; eine multiplikative Konstante darf der K-N Funktion immer beigefügt werden; vgl. Einleitung).

Umgekehrt sind die Bedingungen I—IVb (also auch I—IVa) auch hinreichend, d. h. die Gleichung (1) folgt aus ihnen und aus (IVb^*) [bzw. (IVa^*)]. Da, wie wir in §. 1 sahen, (III′) eine unmittelbare Folge von II und III ist, bekommen wir aus IV, falls wir $x = y = t$ einsetzen und III, (III′) beachten,

$$\frac{\sigma(t)}{\tau(t)} = \frac{M_1(t, t)}{M_2(t, t)} = \frac{p}{q}, \qquad \tau(t) = \frac{q}{p}\,\sigma(t),$$

und so nimmt IVb die Gestalt

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{p\,\sigma(x)}{q\,\sigma(y)}$$

an. Daher ist

$$p\,\sigma(x) M_2(x, y) - q\,\sigma(y) M_1(x, y) = 0$$

oder, $g(x, y) = pc\int^x \sigma(z)\,dz + qc\int^y \sigma(z)\,dz$ gesetzt,

$$\begin{vmatrix} g_1(x,y) & g_2(x,y) \\ M_1(x,y) & M_2(x,y) \end{vmatrix} = g_1(x,y) M_2(x,y) - g_2(x,y) M_1(x,y) = 0.$$

Es ist bekannt, daß dies eben die Existenz einer Funktion $w(t)$ bedeutet, für die [wegen (IV b^*)]

$$w[M(x,y)] = g(x,y) = pc\int^x \sigma(z)\,dz + qc\int^y \sigma(z)\,dz = pf(x) + qf(y)$$

gilt. Setzen wir $x = y = t$, so folgt wegen II $w(t) = f(t)$ und

$$f[M(x,y)] = pf(x) + qf(y), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

§. 3. Die Brauchbarkeit der gewonnenen Ergebnisse möchten wir an einem ganz einfachen Beispiel zeigen. Ist

$$M(x,y) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+y)} - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{2}$$

ein quasiarithmetisches Mittel? Und falls ja, wie lautet dann seine K-N Funktion? Die Bedingungen I und II sind offensichtlich erfüllt. Bilden wir nun die ersten partiellen Ableitungen:

$$M_1(x,y) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1+y}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right) = \frac{\sqrt{(1-x)(1+y)} + \sqrt{(1+x)(1-y)}}{4\sqrt{1-x^2}},$$

$$M_2(x,y) = \frac{\sqrt{(1-y)(1+x)} + \sqrt{(1+y)(1-x)}}{4\sqrt{1-y^2}}.$$

Es ist $M_1(t,t) = M_2(t,t) = \dfrac{2\sqrt{1-t^2}}{4\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{2}$, also ist auch III erfüllt. (Wegen der Symmetrie $M(x,y) = M(y,x)$ dieses Mittels muß $p = q = \dfrac{1}{2}$ sein; vgl. Einleitung.) Prüfen wir nach, ob $M(x,y)$ z. B. der Bedingung IV b genügt! Es ist

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}},$$

also gilt IV b und zwar mit $\sigma(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$. Also ist wegen (IV b^*)

$$f(x) = c\int^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -c \arccos x + \beta = \alpha \arccos x + \beta$$

die K-N Funktion. Daher ist

$$\frac{\sqrt{(1+x)(1+y)} - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{2} = M(x,y) =$$

$$= f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\arccos x + \arccos y}{2}\right),$$

was leicht zu verifizieren ist.

§. 4. Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß unser Bedingungssystem mit dem der unter [4]) zitierten Arbeiten übereinstimmt, indem es nur mit der Forderung der Differenzierbarkeit verschärft wurde. Das fragliche Bedingungssystem von J. ACZÉL lautet: (*i*) $M(x, y)$ ist stetig und wachsend; (*ii*) $M(t, t) = t$; (*iii*) $M[M(x, u), M(y, v)] = M[M(x, y), M(u, v)]$ („Bisymmetrie"). Augensichtlich muß nur die Äquivalenz von (*iii*) mit III und IV (resp. IV*a*, IV*b*) bewiesen werden.

Derivieren wir (*iii*) nach x:

$$M_1[M(x, u), M(y, v)]\, M_1(x, u) = M_1[M(x, y), M(u, v)]\, M_1(x, y) \tag{4}$$

bzw. nach y:

$$M_1[M(x, u), M(y, v)]\, M_1(y, v) = M_1[M(x, y), M(u, v)]\, M_2(x, y),$$

$$\left.\begin{matrix} x = u = s \\ y = v = t \end{matrix}\right\} \text{ gesetzt folgt } \left\{\begin{matrix} M_1(s, s) = M_1[M(s, t), M(s, t)] \\ M_1(t, t) \;= M_1[M(s, t), M(s, t)]; \end{matrix}\right.$$

daher ist

$$M_1(s, s) = M_1(t, t) = p \text{ (konstant).} \tag{III}$$

Derivieren wir (4) weiter nach v und schreiben wir wieder $x = u = s$, $y = v = t$, so wird

$$M_{12}[M(s, t), M(s, t)]\, M_1(s, t)\, M_2(s, t) = pq M_{12}(s, t);$$

$$\frac{M_{12}(x, y)}{M_1(x, y)\, M_2(x, y)} = \pi(M), \tag{IV}$$

w. z. b. w. Ähnlicherweise lassen sich IV*a* und IV*b* aus (*iii*) ableiten.

(Eingegangen am 15. Januar 1948.)

Ein Satz über die Struktur der endlichen Ringe.

Von T. SZELE in Szeged.

Es ist bekannt, daß sich jeder endliche Ring[1]) $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe von eindeutig bestimmten p-Ringen[2]) $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_m$ zerlegen läßt, die zu verschiedenen $p_1, \ldots, p_m$ gehören, und einander (beiderseits) annulieren[3]). Durch diesen Satz wird das Problem der Struktur der endlichen Ringe auf das von p-Ringen zurückgeführt.

Leider weiß man über die Struktur der p-Ringe nur sehr wenig. Bekannte wichtige Beispiele sind: die endlichen (kommutativen) Körper, ferner die p-Ringe $\mathfrak{R}$ mit zyklischer additiver Gruppe $\mathfrak{R}^+$; letztere sind sämtliche Unterringe der Restklassenringe mod p^e (im Ring der ganzen Zahlen)[4]). Als weitere Beispiele sind noch alle $\mathfrak{R}$ mit p^2 Elementen und nichtzyklischem $\mathfrak{R}^+$ bekannt[5]). Darunter gibt es 6 kommutative und 2 nichtkommutative Ringe[6]). Wir erwähnen noch die Untersuchungen von VANDIVER[7]) über die endlichen kommutativen Ringe mit mindestens einem Nicht-nullteiler.

---

[1]) Wir lassen durchwegs auch nichtkommutative Ringe zu.

[2]) Als Analogon von p-Gruppen verstehen wir unter einem p-Ring einen Ring mit p^e Elementen (p Primzahl).

[3]) Die $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_m$ entstehen einfach so, daß man in der additiven Gruppe $\mathfrak{R}^+$ (der Elemente) von $\mathfrak{R}$ die Menge aller Elemente bildet, deren Ordnungen Potenzen eines festen Primfaktors der Ordnung von $\mathfrak{R}^+$ sind.

[4]) Bezeichne man mit $\mathfrak{R}(p^e, p^f)$ den Ring derjenigen Restklassen mod p^e, die aus lauter durch p^f teilbaren Zahlen gebildet sind ($e \geqq f \geqq 0$). Dann sieht man leicht ein, daß alle Ringe mit p^n Elementen und zyklischer additiver Gruppe die folgenden sind: $\mathfrak{R}(p^n, 1), \mathfrak{R}(p^{n+1}, p), \ldots, \mathfrak{R}(p^{2n}, p^n)$. Ihre Anzahl ist $n+1$. Vgl. R. BALLIEU, Anneaux finis; systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, (1) **61** (1947), S. 117—126. Diese Arbeit war mir bisher nicht zugänglich.

[5]) Siehe die am Ende von [4]) zitierte Arbeit von R. BALLIEU und außerdem die Arbeit von CAYLEY, On double algebra, *Proceedings London Math. Society*, (1) 15 (1883), S. 185—197. CAYLEY beschäftigt sich dabei mit allgemeineren Strukturfragen, welche als Spezialfall auch die obigen endlichen Ringe (ausgenommen den endlichen Körper) umfassen.

[6]) Folglich ist die Gesamtzahl der Ringe mit p^2 Elementen 11.

[7]) H. S. VANDIVER, Theory of finite algebras, *Transaction American Math. Society,* **13** (1912), S. 293—304.

In dieser Arbeit geben wir gewisse leicht konstruierbare endliche Matrizenringe von ganzzahligen Matrizen (mit aber nur nach gewissen Moduln p^e in Betracht kommenden Elementen) an, deren Unterringe alle denkbaren p-Ringe sind. Um den diesbezüglichen Satz aussprechen zu können, schicken wir Folgendes voran.

Es sei gegeben eine (endliche) Folge von natürlichen Zahlen:

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \qquad (\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq 1).$$

Diese Folge läßt sich auch so schreiben:

$$(2) \qquad \beta_1 \ (n_1\text{-mal}), \ldots, \beta_r \ (n_r\text{-mal}) \qquad (\beta_1 > \ldots > \beta_r \geqq 1),$$

wobei dann $n_1 + \ldots + n_r = n$ ist. Betrachten wir alle ganzzahligen Matrizen (a_{ik}) vom Typ n^2 mit der Nebenbedingung für die Elemente unterhalb der Hauptdiagonale:

$$(3) \qquad p^{\alpha_k - \alpha_i} \mid a_{ik} \qquad (i > k).\text{[8]}$$

Wir nennen zwei solche Matrizen (a_{ik}), (a'_{ik}) gleich, wenn

$$(4) \qquad a_{ik} \equiv a'_{ik} \ (\mathrm{mod}\ p^{\alpha_k}) \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

gilt. Die Bedingung (3) können wir so veranschaulichen, daß wir die Matrix (a_{ik}) in r^2 rechteckige „Kästchen" (Teilmatrizen) K_{uv} entsprechend der Multiplizitätszahlen n_j in (2) einteilen (wie das das beigelegte Schema für $r = 3$ andeutet), und dann lautet (3) (wegen (2)) so, daß die Elemente im Kästchen K_{uv} $(u > v)$ durch $p^{\beta_v - \beta_u}$ teilbar sind. Die Definition (4) der Gleichheit kommt darauf hinaus, daß die Elemente in der v-ten „Kästchenspalte" einer Matrix nur mod p^{β_v} in Betracht kommen.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & n_1 & n_2 & n_3 \\ \hline n_1 & & & \\ \hline n_2 & K_{21} & & \\ \hline n_3 & K_{31} & K_{32} & \\ \hline \end{array}$$

Offenbar bilden die verschiedenen Matrizen (a_{ik}) einen Ring, den wir mit $\mathfrak{M}_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{M}_p$ bezeichnen. Die additive Gruppe $\mathfrak{M}_p^+$ dieses Ringes ist vom Typ $(p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, p^{\alpha_2}, p^{\alpha_2}, p^{\alpha_3}, p^{\alpha_3}, p^{\alpha_3}, p^{\alpha_3}, p^{\alpha_3}, \ldots)$, woraus man die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}_p$ unmittelbar entnehmen kann.

Nunmehr können wir den oben angekündigten Satz so aussprechen:

Satz. *Jeder p-Ring ist ein Unterring eines $\mathfrak{M}_p$. Und zwar, wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Rechtsannihilator*[9]) *und dabei $\mathfrak{R}^+$ eine Gruppe vom*

---

[8]) Die Einschränkung „$i > k$" dürfte weggelassen werden, denn im Fall $i \leqq k$ ist der Quotient der rechten und linken Seite von (3) eine ganze Zahl und so ist die Teilbarkeit von selbst erfüllt.

[9]) Wir nennen ein Element A von $\mathfrak{R}$ einen Rechtsannihilator, wenn $XA = 0$ für alle $X \in \mathfrak{R}$ gilt.

Typ $(p^{\alpha_1},\ldots,p^{\alpha_n})$ *ist*[10]), *so ist* $\mathfrak{R}$ *gewiß ein Unterring von* $\mathfrak{M}_p(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. *Läßt man dagegen auch die Existenz eines Rechtsannihilators von* $\mathfrak{R}$ *zu, so kommt man mit* $\mathfrak{M}_p(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ *aus*[11]).

Der Beweis des Satzes geschieht mit Hilfe von folgendem

Lemma. *Hat ein Ring* $\mathfrak{R}$ *keinen Rechtsannihilator, so ist* $\mathfrak{R}$ *ein Unterring des Endomorphismenringes der Gruppe* $\mathfrak{R}^+$.[12]) [13])

Ordnen wir nämlich jedem Element A von $\mathfrak{R}$ den Endomorphismus

(5) $$X \to XA \qquad (X \in \mathfrak{R})$$

der additiven Gruppe $\mathfrak{R}^+$ zu. Diese bilden einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Unterring des Endomorphismenringes von $\mathfrak{R}^+$. Um dies einzusehen, betrachten wir neben (5) auch den zu B zugeordneten Endomorphismus:

(6) $$X \to XB.$$

Wegen $X(A+B)=XA+XB$, $X(AB)=(XA)B$ ist den Elementen $A+B, AB$ die Summe und das Produkt der Endomorphismen (5) (6) zugeordnet, und so ist die Zuordnung homomorph. Sie ist aber auch isomorph, denn sind (5) und (6) gleich, d. h. gilt $XA=XB$, also $X(A-B)=0$, für jedes $X(\in\mathfrak{R})$, so muß wegen des Fehlens eines Rechtsannihilators in der Tat $A-B=0$, $A=B$ sein. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nunmehr sei $\mathfrak{R}$ endlich und $\mathfrak{R}^+$ eine Gruppe vom Typ $(p^{\alpha_1},\ldots,p^{\alpha_n})$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{M}_p(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ der Endomorphismenring der Gruppe $\mathfrak{R}^+$ ist[14]), woraus nach dem eben bewiesenen Lemma eine Behauptung

---

[10]) Dabei soll $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n$ angenommen werden.

[11]) Nach (3) und (4) ließen sich die Elemente a_{ik} im Kästchen K_{uv} einer Matrix (a_{ik}) von $\mathfrak{M}_p(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ auch als Elemente von $\mathfrak{R}(p^{\beta_v}, p^{\beta_v-\beta_u})$ (vgl. [4])) betrachten, wobei $p^{\beta_v-\beta_u}$ im Fall eines negativen Exponenten durch 1 zu ersetzen ist. Das bedeutet, daß bei der Konstruktion von $\mathfrak{M}_p(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ allein mit Verwendung von Unterringen der Restklassenringe auskommen kann. Allerdings wäre dann die Multiplikationsvorschrift in $\mathfrak{M}_p$ schwerfällig.

[12]) Das ist eine Verschärfung des ähnlichen Satzes für Ringe mit Einselement (N. Jacobson, *The theory of rings* (New York, 1943), S. 54, Theorem 1), denn ein solcher Ring hat keinen Rechtsannihilator, während das Umgekehrte nicht gilt. Beispiele für Ringe ohne Rechtsannihilator und Einselement: der Ring der geraden Zahlen, oder der Ring bestehend aus den vier Elementen $0, A, B, A+B$ mit den definierenden Relationen $A+A=B+B=0$; $A^2=A$, $AB=B$, $B^2=BA=0$.

[13]) Unter einem Endomorphismus einer Gruppe versteht man eine homomorphe Abbildung der Gruppe in sich. Im Fall einer Abelschen Gruppe bilden die sämtlichen Endomorphismen einen Ring.

[14]) Inzwischen ist mir bekannt geworden, daß den Endomorphismenring der endlichen Abelschen Gruppen auch schon K. Shoda (Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, *Math. Annalen*, **100** (1928), S. 674—686) konstruiert und ihn für einen anderen Zweck (nämlich zur Untersuchung der Struktur der Automorphismengruppe) verwertet hat.

des obigen Satzes unmittelbar folgt. Bezeichne $A_1, \ldots, A_n$ eine Basis von $\mathfrak{R}^+$, für welche

(7) $$(A_i) = p^{\alpha_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$ [15])

gilt. Jeder Endomorphismus von $\mathfrak{R}^+$ ist durch die Angabe der Bildelemente von $A_1, \ldots, A_n$ eindeutig bestimmt. Denn sind die Zuordnungen

(8) $$A_i \to A_i' = a_{i1}A_1 + \ldots + a_{in}A_n \quad (i = 1, \ldots, n),$$

schon festgestellt, so muß irgendeinem Element

(9) $$X = c_1 A_1 + \ldots + c_n A_n$$

von $\mathfrak{R}^+$ bei einem Endomorphismus das Bildelement

(10) $$X' = c_1 A_1' + \ldots + c_n A_n'$$

zugeordnet werden. Andererseits ist die durch (8) (9) (10) angegebene Abbildung von $\mathfrak{R}^+$ in sich offenbar dann und nur dann ein Endomorphismus, wenn sie *eindeutig* ist. Eine notwendige Bedingung dafür ist das Bestehen von (3) für die Koeffizientenmatrix in (8), denn im Fall einer durch (8) festgelegten eindeutigen homomorphen Abbildung von $\mathfrak{R}^+$ in sich gilt zwangsläufig

(11) $$(A_i) \geqq (A_i') \quad (i = 1, \ldots, n),$$ [15])

und diese Bedingung ist wegen (7) gleichwertig mit (3). (11) ist aber auch hinreichend für die Eindeutigkeit der betrachteten Abbildung, denn gilt neben (9) auch die Darstellung

$$X = d_1 A_1 + \ldots + d_n A_n,$$

d. h.

$$c_i \equiv d_i \pmod{(A_i)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so ist wegen (11) auch zugleich

$$c_i \equiv d_i \pmod{(A_i')} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

mithin X' in (10) eindeutig bestimmt. Wir haben also das Ergebnis bekommen, daß sich ein jeder Endomorphismus von $\mathfrak{R}^+$ durch eine solche Matrix (a_{ik}) (in (8)) angeben läßt, die ein Element des Ringes $\mathfrak{M}_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist; außerdem sieht man auch, daß die durch (4) definierte Gleichheit zweier Matrizen gleichbedeutend mit der Identität der beiden entsprechenden Endomorphismen ist. Da endlich die Summe und das Produkt zweier Endomorphismen wieder durch die Summe und das Produkt der entsprechenden Matrizen angegeben ist, so erweist sich $\mathfrak{M}_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ isomorph zum Endomorphismenring der Gruppe $\mathfrak{R}^+$, w. z. b. w.

---

[15]) Durch (C) soll die Ordnung eines Elementes $C \in \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^+$ bezeichnet werden.

Die übrigen Behauptungen des Satzes folgen leicht aus den schon bewiesenen und der Tatsache, daß sich jeder Ring $\mathfrak{R}$ in einem Ring $\bar{\mathfrak{R}}$ mit Einselement einbetten läßt. In unserem Fall, wobei $\mathfrak{R}^+$ vom Typ $(p^{\alpha_1},\ldots,p^{\alpha_n})$ (also $\mathfrak{R}$ wegen $\alpha_1 \geqq \alpha_i$ von der Charakteristik p^{α_1}) ist, können wir diese Einbettung zweckmäßig wie folgt ausführen[16]). Wir definieren $\bar{\mathfrak{R}}$ als die Menge aller Paare (A, a) mit $A \in \mathfrak{R}$ und rationalen ganzen a. Sei $(A, a) = (B, b)$ dann und nur dann, wenn $A = B$ und $a \equiv b \pmod{p^{\alpha_1}}$ ist. Definieren wir noch die Addition und Multiplikation in $\bar{\mathfrak{R}}$ durch

$$(A, a) + (B, b) = (A + B, a + b), \quad (A, a)(B, b) = (AB + aB + bA, ab),$$

so wird $\bar{\mathfrak{R}}$ zu einem Ring mit dem Einselement $(0, 1)$, mithin hat $\bar{\mathfrak{R}}$ keinen Rechtsannihilator. Da andererseits $\overline{\mathfrak{R}^+}$ offenbar vom Typ $(p^{\alpha_1}, p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, p^{\alpha_3},\ldots, p^{\alpha_n})$ ist, so enthält $\mathfrak{M}_p(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes einen zu $\bar{\mathfrak{R}}$ isomorphen Unterring. Alle Elemente $(A, 0)$ bilden aber einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Unterring in $\bar{\mathfrak{R}}$, so daß auch $\mathfrak{M}_p(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ einen Unterring von dieser Eigenschaft besitzen muß. Damit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 15. Januar 1948.)

---

16) Vgl. A. A. Albert, *Modern higher Algebra* (Chicago, 1937), S. 22, Theorem 5.

Sur la convergence des séries lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle fini (a, b). La série orthogonale

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

s'appelle lacunaire si les indices m_ν pour lesquels $c_{m_\nu} \neq 0$ se succèdent de façon que

$$\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} \geqq q > 1.$$

M. KOLMOGOROFF[1]) a démontré que, si une série lacunaire est presque partout sommable dans (a, b) et $\Sigma c_n^2 < +\infty$, elle y est aussi presque partout convergente.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite non-décroissante de nombres positifs. Nous appellerons la série (1) λ_n-lacunaire si le nombre des indices m_ν, compris entre 2^n et 2^{n+1}, et pour lesquels $c_{m_\nu} \neq 0$, est $O(\lambda_{2^n})$. A l'aide de cette notion nous pouvons énoncer le théorème suivant qui généralise un peu le théorème de M. KOLMOGOROFF:

Si la série λ_n-lacunaire (1) *est presque partout sommable dans* (a, b) *et* $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$, *alors elle y est aussi presque partout convergente.*

Désignons, en effet, par $S_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série (1), par $\sigma_n(x)$ sa n-ième moyenne arithmétique et par $\tau_n(x)$ la différence $S_n(x) - \sigma_n(x)$. On obtient tout de suite pour un indice m_ν compris entre 2^n et 2^{n+1}:

$$\tau_{m_\nu}(x) - \tau_{2^n}(x) = \frac{1}{m_\nu + 1} \sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k c_k \varphi_k(x) + \\ + \left(\frac{1}{m_\nu + 1} - \frac{1}{2^n + 1}\right) \sum_{k=1}^{2^n} k c_k \varphi_k(x).$$

[1]) A. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), pp. 96–97.

La série (1) étant presque partout sommable, la suite $\{S_{2^n}(x)\}$ converge presque partout[2]), donc $\tau_{2^n}(x)\to 0$, d'où

$$\left(\frac{1}{m_\nu+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)\sum_{k=1}^{2^n} kc_k\varphi_k(x)=o(1)$$

presque partout, c'est-à-dire

$$\tau_{m_\nu}(x)-\tau_{2^n}(x)=\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k_k c\varphi_k(x)+o(1) \tag{2}$$

presque partout. Allons évaluer maintenant la somme

$$\int_a^b \sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2 dx=$$

$$=\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\frac{1}{(m_\nu+1)^2}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k^2c_k^2\leqq \sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\sum_{k=2^{n+1}}^{m_\nu} c_k^2.$$

La série (1) étant λ_n-lacunaire, il y a au plus $O(\lambda_{2^n})$ coefficients c_{m_ν} dont les indices m_ν sont compris entre 2^n+1 et 2^{n+1}. On obtient donc

$$\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} c_k^2=O(\lambda_{2^n})\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2=O(1)\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\lambda_k c_k^2.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2 dx=O(1)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n c_n^2<+\infty.$$

Cette relation implique, d'après un théorème fondamental de la théorie de l'intégrale de LEBESGUE, la convergence presque partout dans (a, b) de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)=o(1)$$

presque partout. Il en résulte d'après (2):

$$\tau_{m_\nu}(x)-\tau_{2^n}(x)=o(1)$$

---

[2]) A. KOLMOGOROFF, l. c. Cf. ST. KACZMARZ et H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), p. 161 (533).

presque partout, ce qui entraîne

$$S_{m_\nu}(x) - \sigma_{m_\nu}(x) = \tau_{m_\nu}(x) = o(1)$$

presque partout, c. q. f. d.

Corollaire. *La série* (1) *étant* (log log $n)^2$*-lacunaire, elle converge en* (a, b) *presque partout, si* $\Sigma c_n^2 (\log \log n)^2 < +\infty$.

En effet, la convergence de Σc_n^2 (log log $n)^2$ entraîne la sommabilité de (1) presque partout[3]).

Remarque à la note précédente.

Par ALFRED RÉNYI à Budapest.

En employant, au lieu du théorème de M. KOLMOGOROFF[4]), un théorème connu de M. RADEMACHER[5]) et en répétant la démonstration précédente avec des modifications évidentes, nous obtenons le théorème alternatif suivant:

Théorème A. *Si* $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$ *et le nombre des indices* m_ν *compris entre* Λ_n *et* Λ_{n+1}, *pour lesquels* $c_{m_\nu} \neq 0$, *est* $O(n)$, *alors la sommabilité presque partout de la série* (1) *entraîne sa convergence presque partout.*

Le théorème A est plus fort que le théorème de la note précédente, si λ_n est d'ordre $(\log n)^\alpha$ avec $1 < \alpha < 2$ et plus faible si λ_n est d'ordre plus petit que $\log n$. Le cas $\alpha = 2$ est dépourvu d'intérêt, parce que, d'après le théorème de MM. RADEMACHER et MENCHOFF[6]), la série (1) est presque partout convergente si $\Sigma c_n^2 (\log n)^2 < +\infty$.

(Reçu le 14 Février 1948.)

---

3) D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales II, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), pp. 56—108 et ST. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift,* **26** (1927), pp. 99—105.

4) Cf. note 2).

5) H. RADEMACHER, Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), pp. 112—138. Le théorème cité est le suivant:

Si $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$ et si l'on désigne par Λ_n le plus petit entier pour lequel $\lambda_{\Lambda_n} \geq n$, alors $S_{\Lambda_n}(x)$ converge presque partout.

6) H. RADEMACHER l. c.; D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales I, *Fundamenta Math.*, **4** (1923), pp. 82—105.

Bibliographie.

Kerékjártó Béla, A geometria alapjairól, második kötet: Projektiv geometria, XXIX+613 l., Budapest, Magyar Tudományos Akadémia, 1944.

[Béla de Kerékjártó, Sur les fondements de la Géométrie, second volume: Géométrie projective, XXIX+613 pages, Budapest, Académie Hongroise des Sciences, 1944.]

Le premier volume de cette monographie a paru en 1937 et traite des fondements de la géométrie élémentaire euclidienne. Le présent volume est la dernière oeuvre de l'éminent géomètre, ravi si prématurément par la mort.

Le livre traite de la théorie, classique et moderne, de la géométrie projective, eu égard en particulier aux transformations projectives et à leurs groupes.

Dans une introduction de grande envergure, l'auteur présente, en partant de la géométrie euclidienne, ses diverses généralisations. Il met en relief la relation organique de la géométrie euclidienne de l'espace avec les groupes de mouvements. En construisant une image de la géométrie euclidienne de l'espace dans le plan, il donne un exemple très instructif de la manière dont un élargissement de l'ensemble des éléments de l'espace et du groupe fondamental peut conduire à une géométrie plus générale. C'est ainsi que les géométries affine et projective s'introduisent de la manière la plus naturelle. Les sous-groupes du groupe des transformations du plan projectif conduisent alors aux géométries planes non-euclidiennes et à la géométrie du cercle. L'étude analytique des transformations projectives offre la voie à la géométrie projective complexe. Le groupe des transformations projectives du plan est un sous-groupe des transformations de Cremona. Cela ouvre la voie à la géométrie algébrique. Enfin il y a là le groupe de toutes les transformations bicontinues et la topologie.

Le livre se divise en 8 chapitres. Les deux premiers étudient les homographies de la droite et leur groupe. La géométrie projective du plan suit dans le chapitre III. Les transformations projectives du plan sont classifiées à l'aide de leurs points fixes et des éléments invariants associés; de même pour les polarités et les corrélations. Dans le chapitre IV, on construit la géométrie projective de l'espace. On étudie ici les collinéations et les polarités de l'espace, en particulier les collinéations qui sont permutables avec la polarité elliptique du plan ou de l'espace. Le chapitre V traite des propriétés classiques projectives des courbes de second ordre, leurs transformations projectives et en particulier leurs transformations projectives en elles-mêmes. L'objet du chapitre VI c'est les surfaces de second ordre, leur construction projective, leur structure topologique, leur classification et leurs transformations projectives.

La méthode de ces chapitres est en général la synthétique, mais on se sert naturellement aussi des systèmes de coordonnées quand il y a lieu, et on détermine les équations correspondantes aux transformations projectives et aux courbes et surfaces de second ordre.

Le chapitre VII introduit les métriques projectives: elliptique, hyperbolique et parabolique. On construit les trois géométries planes, leurs modèles sur les surfaces elliptiques de second ordre, ainsi que le modèle du plan hyperbolique dans le cercle euclidien. Moyennant l'expression analytique de la métrique projective, on arrive à la géométrie projective complexe et aux géométries elliptique et hyperbolique de l'espace.

Le dernier chapitre analyse les axiomes de la géométrie projective. Ce chapitre (en environ 100 pages) est la plus riche dans ses résultats. Il contient aussi le plus des pensées originales de l'auteur.

Cette monographie est sans doute la plus complète et la plus moderne qu'on possède en ce domaine. Elle contient beaucoup de points de vue et de résultats nouveaux, arrangés sous une forme originale et facile à suivre. Il est à regretter qu'elle ne soit encore accessible, à cause de sa langue, qu'à un cercle limité des mathématiciens. KERÉKJÁRTÓ avait l'intention d'en faire paraître une rédaction française. Espérons que ce voeu du regretté auteur pourra être accompli sous peu.

Gy. Sz. N.

M. Brelot, Les principes mathématiques de la mécanique classique, 62 pages, Grenoble et Paris, Arthaud, 1945.

Les traités de mécanique classique procèdent même aujourd'hui par la voie suivante: on édifie d'abord la mécanique d'une seule masse ponctuelle, puis celles des systèmes finis de masses ponctuelles, on en passe enfin à la mécanique des *distributions de masses,* et cela ordinairement en substituant aux Σ des $\int$ sans justification sérieuse. Quoique cet arrangement soit conforme au développement historique, c'est bien son inverse qui semble être plus naturel, c'est-à-dire de commencer par construire directement une mécanique des distributions de masses.

C'est dans cette voie inverse que l'auteur a entrepris d'édifier la mécanique; le présent livret est un exposé systématique de ses résultats. On y trouve un traitement mathématique rigoureux des principes de la mécanique, sous une forme concise mais facile à comprendre. Son idée fondamentale est de définir un *corps mobile* comme un ensemble borélien borné C_t dépendant du paramètre réel t (le temps) et étant en correspondance *biunivoque* avec C_0 selon une fonction vectorielle borélienne $\overrightarrow{OM}=f(P,t)$ (P dans C_0, M dans C_t) où f est une fonction deux fois dérivable par rapport à t. La distribution des masses sur C_0 est définie comme une fonction finie non-négative d'ensemble borélien, complètement additive. Les forces sont définies d'une manière analogue, comme des fonctions vectorielles additives d'un ensemble borélien. Centre de gravité, énergie cinétique, quantité de mouvement se définissent alors par des intégrales de Lebesgue-Stieltjes; ces intégrales jouent d'ailleurs un rôle fondamental dans toute la discussion.

Après avoir exposé les principes fondamentaux de la cinétique et de la dynamique, on traite de l'hydrodynamique, comme un exemple important pour les forces *intérieures.* Les chapitres suivants sont consacrés au principe des vitesses virtuelles, à la statique et aux problèmes de stabilité. Les parties d'ordre abstrait sont suivies par des exemples concrets illustratifs bien choisis.

Tout comme le calcul des probabilités s'est axiomatisé récemment en un chapitre des mathématiques, et cela à l'aide de la technique des intégrales de Lebesgue-Stieltjes, la même technique permet donc à l'auteur d'axiomatiser la mécanique rationnelle et de la faire entrer dans l'édifice des mathématiques pures.

L. S. Gál.

E. Artin — C. J. Nesbitt — R. M. Thrall, Rings with minimum condition (University of Michigan Publications in Mathematics, Nr. 1), X+123 pages, Ann. Arbor, Mich., University of Michigan Piess, 1946.

The theory of hypercomplex systems was enlarged, by the famous generalization of ARTIN (1927) to a theory of rings with minimum condition. In this book the authors give an excellent account of the development of this theory in the last two decades.

The book is divided into 9 chapters. The three first ones give all necessary information about vector spaces, minimum condition and matrix representations, adding many interesting results which have not yet found a treatment in book form. The fourth chapter gives the main theorem of the theory of semisimple rings according to which any such ring may be decomposed into a direct sum of a finite number of mutually annihilating simple rings. Chapter five contains the two most elegant proofs of Wedderburn's theorem on the structure of simple rings which says that any simple ring R (excluding the trivial case: R is a cyclic group of prime order with respect to addition and $R^2=0$) is isomorphic to a complete ring of matrices with coefficients in a skew-field. This theorem reduces the structural problem of semisimple rings to that of the skew-fields. The next three chapters are devoted to the further development of the theory of simple rings. Here one finds the theory of the Brauer group, splitting fields and crossed products. The last chapter contains remarkable theorems on rings with radicals and an application of the results to the theory of the modular representations of finite groups.

Its rich and masterly arranged material makes the book indispensable for all who have particular interest in Algebra. Its style being very lucid, its exposition very careful and precise, the book may be read easily also by those who are less familiar with algebraic methods. T. Szele.

А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел, 71 полосы, Москва, огиз. гостехиздат 1947.

[**A. J. Khintchin, Three pearls of the theory of numbers,** 71 pages, Moscow, Ogiz. Gostechizdat, 1947.]

In the introduction the author relates the origin of the book. One of his pupils has been wounded at the front during the war, had to spend some months in a hospital, and asked the author to send him some "pearls of mathematics" in order to provide him with food for thought. The three problems of number-theory chosen by the author really deserve to be called "pearls". Though the proofs are completely elementary, and their understanding requires only the elements of number-theory, they are rather deep and of an intricate logical character. The first chapter deals with the theorem of VAN DER WAERDEN on arithmetical progressions. The second chapter contains the elegant proof of ARTIN and SCHERK for the theorem of MANN (i. e. the so-called $\alpha+\beta$ conjecture of SCHNIRELMAN). A short survey of the history of density-problems, and their rôle in the additive number-theory is also given. The third chapter reproduces the completely elementary and amazing proof of Waring's theorem, given by U. V. LINNIK in 1942. The proof operates with the density-method of SCHNIRELMAN. The estimation of the number of representations of an integer as the sum of k n-th powers in reduced to the estimation of the number of solutions of some linear diophantic equation-systems. These estimations, however simple they may seem, are rather strong, and serve for the same purpose as the estimations of Weyl sums, used in the classical proofs of HARDY-LITTLEWOOD and VINOGRADOV. It should be mentioned that the book is written in a very clear style and is of great interest for the layman as well as for the mathematician. A. Rényi.

Désirant de renouveler les *liens* interrompus par les événements tristes des dernières années, la redaction prie nos anciens collaborateurs at abonnés ainsi que les institutions scientifiques et les périodiques avec lesquelles nous étions en relations d'échange de vouloir bien nous indiquer leurs adresses actuelles et le dernier fascicule reçu.

Prix d'abonnement du volume courant (à 256 pages au moins): 4 dollars (U. S. A.), ou des ouvrages mathématiques du même prix, parus pendant ou après la guerre.

Nous signalons et autant que possible nous analysons les *ouvrages envoyés* par MM. les auteurs et les éditeurs.

Adresse postale: Acta Scientiarum Mathematicarum, Institut Bolyai de l'Université, 1, Ady-tér, Szeged, Hongrie.

The Editors are desirous to re-establish their former *relations abroad*, interrupted by the sorrowful events of these last years. They invite their former contributors, subscribers, scientific institutions as well as the Editorial Boards of periodicals with which they have had connections before the war to let them know their present addresses and the last number which has reached them.

Subscription price for the current volume (of 256 pages at least): 4 U. S. A.-dollars, or mathematical works of the same price, edited during or after the war.

Books sent on for review by author or publisher are announced and as far as possible discussed.

Postal address: Acta Scientiarum Mathematicarum, The Bolyai Institute of the University, 1, Ady-tér, Szeged, Hungary.

Die Schriftleitung ist bestrebt, unsere infolge der bedauerlichen Ereignisse der letzten Jahre zerrissenen *Beziehungen* wieder aufzunehmen. Wir bitten daher unsere früheren Mitarbeiter, Abonnenten, sowie die wissenschaftlichen Institute und Zeitschriften, die mit uns in Tauschbeziehung waren, ihre gegenwärtigen Anschriften und die Nummer des letzten erhaltenen Heftes uns mitteilen zu wollen.

Bezugspreis des laufenden Bandes (wenigstens 256 Seiten): 4 U. S. A.-Dollars oder während des Krieges oder nach dem Kriege erschienene mathematische Werke vom selben Preis.

Die von Verfassern oder Verlegern *eingesandten Werke* werden angezeigt und tunlichst besprochen.

Postanschrift: Acta Scientiarum Mathematicarum, Bolyai-Institut der Universität, Szeged, Ungarn, Ady-tér 1.

INDEX — TARTALOM.

PRINTED IN HUNGARY

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R. T. 47—101
Felelős nyomdavezető: Kiss István igazgató