ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XIII.

1949—1950.

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. SZ.-NAGY, GY. SZ.-NAGY, L. RÉDEI ET F. RIESZ

SZEGED.

MINISTRO RELIGIONIS PUBLICAEQUE INSTRUCTIONIS ADIUVANTE
EDIDIT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

13. KÖTET

1949—1950.

SZERKESZTI

KALMÁR LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, SZŐKEFALVI-NAGY GYULA,
RÉDEI LÁSZLÓ és RIESZ FRIGYES

S Z E G E D.

A VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTER TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

SECTIO SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XIII.

FASC. 1.

SZEGED, 15. V. 1949.

MINISTRO RELIGIONIS PUBLICAEQUE INSTRUCTIONIS ADIUVANTE
EDIDIT
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK

SZERKESZTIK:

KALMÁR LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, SZŐKEFALVI NAGY GYULA, RÉDEI LÁSZLÓ és RIESZ FRIGYES

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

13. KÖTET.

1. FÜZET.

S Z E G E D, 1949. május 15.

A VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTER TÁMOGATÁSÁVAL
KIADJA
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM.

Tomus XIII. — 1949/50. — 13. kötet.

Pag.

ACZÉL, J., On some sequences defined by recurrence. . . . . . 134—139

——— Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen. . . . . 179—189

ALEXITS, G., Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires. 14—17

——— Sur la convergence d'une classe de séries orthonormales. . . 18—20

AUMANN, G., Über eine Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 163—168

CSÁSZÁR, Á., Sur les fonctions internes, non monotones. . . . . 48—50

——— A polyhedron without diagonals . . . . 140—142

ERDŐS, P., On some applications of Brun's method. . . . . . . 57—63

FENYŐ, ST., Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte. . . . . 36—42

FUCHS, L., The extension of the notion of „relatively prime". . . . 43—47

HADWIGER, H., Neue Integralrelationen für Eikörperpaare. . . . . 252—257

HASSE, H., Über den algebraischen Funktionenkörper der Fermatschen Gleichung. . . . . 195—207

HAUPT, O., Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung Drei. . . 153—162

KALOUJNINE, L. et KRASNER, M., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes I. . . . . 208—230

KRASNER, M. et KALOUJNINE, L., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. I. . . . . 208—230

MIKOLÁS, M., Farey series and their connection with the prime number problem. I. . . . . 93—117

MORDELL, L. J., The minimum of a binary cubic form. . . . . . 69—76

RÉDEI, L., Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós. . 21—35

——— Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols. . . . . 252—246

——— and SZÉP, J., On factorisable groups. . . . . 235—238

RÉNYI, A., On the measure of equidistribution of point sets. . . . 77—92

SERRE, J.-P., Sur un théorème de T. Szele. . . . . 190—191

SZELE, T., Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. 54—56

——— und SZÉLPÁL, I., Über drei wichtige Gruppen. . . . . . 192—194

SZENDREI, J., On the extension of rings without divisors of zero. . . 231—234

SZÉLPÁL, I., Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen. 51—53

——— und SZELE, T., Über drei wichtige Gruppen. . . . . . . 192—194

SZÉP, J., On factorisable, not simple groups. . . . . 239—241

——— and RÉDEI, L., On factorisable groups. . . . . 235—238

SZ.-NAGY, B., Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. . . . . 118—133

——— Méthodes de sommation des séries de Fourier. III. . . . . 247—251

SZ.-NAGY, GY., Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten. 1—13

——— Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome. 169—178

International Congress of Mathematicians. 68

BIBLIOGRAPHIE.

Pag.

ARNAUD DENJOY, Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. — J. J. BURCKHARDT, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. — JEAN CHAZY, Cours de Mécanique Rationnelle. — HANS HAHN—ARTHUR ROSENTHAL, Set functions. — LOUIS DE BROGLIE, Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs. — HERMANN ATHEN, Vektorrechnung . . . . . 64—68

G. VRANCEANU, Leçons de géométrie différentielle. — G. BIRKHOFF, Lattice theory. — TIBOR RADÓ, Length and area. — EINAR HILLE, Functional Analysis and Semi-Groups. — PAUL LÉVY, Processus stochastiques et mouvement brownien. — HERMANN ATHEN, Ebene und sphärische Trigonometrie. — L. LOCHER-ERNST, Differential und Integralrechnung im Hinsicht auf ihre Anwendungen. — PIERRE HUMBERT et SERGE COLOMBO, Introduction mathématique à l'étude des théories électromagnétiques. — Kurze Mathematiker-Biographien. — WILHELM BLASCHKE, Projektive Geometrie. — WOLFGANG GRÖBNER—NIKOLAUS HOFREITER, Integraltafel. I. — N. W. MCLACHLAN et PIERRE HUMBERT, Formulaire pour le calcul symbolique. — LOUIS DE BROGLIE, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. . . . . 143—152

N. BOURBAKI, Éléments de mathématique. — MORRIS MARDEN. The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. — NATHAN JACOBSON, The theory of rings. — EMIL ARTIN, Galois theory. — OTTO HAUPT GEORG AUMANN—CHRISTIAN PAUC, Differential- und Int gralrechnung. I. — ANDRÉ BLOCH et GUSTAVE GUILLAUMIN, La géométrie intégrale du contour gauche. — HENRI LEBESGUE, Leçons sur les constructions géométriques. — GEORGES REBOUL et JEAN ANTOINE REBOUL, Un axiome universel. — ÉMILE PICARD, Leçons sur quelques équations fonctionnelles. — ÉMILE BOREL, Leçons sur la théorie des fonctions. — ERNEST DUPORCQ, Premiers principes de géométrie moderne. — S. LEFSCHETZ, L'analysis situs et la géométrie algébrique. — ÉMILE PICARD, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. — W. SIERPIŃSKI, Leçons sur les nombres transfinis. — Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 101—115. 258—267

Errata. 268

A kiadásért felelős
Szőkefalvi-Nagy Béla
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HIRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

69-2685-Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest

Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Bedeutet $R=\varrho^n$ eine positive Konstante und ist

(1) $$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n,$$

so heißt der Ort der Punkte z in der komplexen z-Ebene, in denen

(2) $$|f(z)|=R=\varrho^n, \quad \text{oder} \quad f(z)\overline{f(z)}-R^2\equiv|f(z)|^2-R^2=0$$

ist, eine *Lemniskate n-ten Grades* mit dem *Halbmesser* ϱ und mit den *Mittelpunkten* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Die Lemniskaten $|f(z)|=R$ und $|f(z)|=R'$ heißen *konzentrisch*. Die Lemniskaten $|f(z)|=R_1$ und $|f(z)|=R_2$ sind bezüglich der Lemniskate $|f(z)|=R$ *konjugiert*, falls $R_1R_2=R^2$ ist.

Die Gleichung

(3) $$Z=f(z)$$

bestimmt eine konforme Abbildung der komplexen z-Ebene auf die Z-Ebene. Die inverse Abbildung (kurz: *W-Abbildung*) bildet den Kreis $|Z|=R=\varrho^n$ auf die Lemniskate (2) ab. Das W-Bild eines Punktes Z ist eine Punktgruppe in der z-Ebene, bestehend aus den Punkten, in denen das Polynom $f(z)$ den Wert Z annimmt. Diese Punktgruppe wird im Folgenden eine *Polgruppe* der Lemniskate (2) genannt. Die Gruppe der Mittelpunkte der Lemniskate ist auch eine Polgruppe ($Z=0$). Es gibt genau eine Polgruppe, die einen Punkt z_0 enthält. Sie besteht aus den Wurzeln der Gleichung $f(z)=f(z_0)$.

Bezüglich einer Lemniskate spielen die Polgruppen eine ähnliche Rolle, wie die Punkte der Ebene bezüglich eines Kreises. Man erhält durch die W-Abbildung aus den Sätzen über den Kreis entsprechende Sätze über die Lemniskate. So gelangt man aus der Grundeigenschaft des Kreises zur Grundeigenschaft der Lemniskate, daß die Abstände ihrer Punkte von den Mittelpunkten ein konstantes Produkt ergeben.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich die allgemeinen Lemniskaten von dieser Eigenschaft ausgehend untersucht. In der gegenwärtigen Arbeit werden andere Eigenschaften der Kreise auf die Lemniskaten verallgemeinert.

Das W-Bild des Kreises $|Z-Z_0|=R$ ist auch eine Lemniskate, deren Mittelpunkte eine Polgruppe, das W-Bild des Zentrums Z_0 bilden. Die W-Bilder der Kreise der Z-Ebene sind *adjungierte Lemniskaten.* Die ebene Kreisgeometrie hat in der Geometrie der adjungierten Lemniskaten ein Analogon.

§ 2. Polgruppen bei einer Lemniskate.

Jede Polgruppe der Lemniskate n-ten Grades

$$|f(z)|\equiv|z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|\equiv|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)|=R$$

läßt sich durch eine Gleichung n-ten Grades von der Form

$$f(z)=Z=re^{i\varphi} \qquad (r\geqq 0) \tag{4}$$

darstellen. Diese Polgruppe besteht aus den Wurzeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dieser Gleichung. Die Polgruppen haben den gemeinsamen Schwerpunkt

$$-\frac{a_1}{n}=\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}.$$

Eine Polgruppe ist durch den Wert Z oder durch einen ihrer Punkte ganz bestimmt. Die Polgruppe (4) hat dann und nur dann einen mehrfachen Punkt z, wenn beide Gleichungen

$$f(z)-Z\equiv f(z)-re^{i\varphi}=0 \quad \text{und} \quad f'(z)=0$$

bestehen. Bezeichnen $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n-1}$ die Nullstellen der Derivierten $f'(z)$, so gibt es nur in den Polgruppen $f(z)=f(z'_k)\equiv Z'_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ mehrfache Punkte. Ausgenommen diese höchstens $n-1$ Polgruppen, besteht jede Polgruppe aus lauter verschiedenen Punkten.

Ist $r=R$, so liegt jeder Punkt der Polgruppe (4) auf der Lemniskate $|f(z)|=R$. Dann wird die Polgruppe eine *Hauptgruppe* der Lemniskate heißen. Ist $r<R$ bzw. $r>R$, so ist die Polgruppe (4) eine *innere* bzw. *äußere Polgruppe der Lemniskate* $|f(z)|=R$.

Eine Lemniskate n-ten Grades $|f(z)|=R$ besteht aus höchstens n Jordanschen Kurven, Zykeln, von denen keiner einen anderen schneiden oder umschließen kann[2]). Zwei Zykel können höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ein gemeinsamer Punkt von zwei Zykeln ist eine Ecke beider Zykel. Ein Punkt liegt innerhalb eines Zykels M, wenn er

---

[1]) Gy. Sz. Nagy, Über die allgemeinen Lemniskaten, *diese Acta,* **11** (1948), S. 207—224.

[2]) A. a. O. [1]), S. 211.

ein innerer Punkt des von M begrenzten einfach geschlossenen Bereiches ist. Eine Lemniskate besitzt innerhalb jedes Zykels mindestens einen Mittelpunkt.

Es gilt der Satz

I. *Jede innere Polgruppe einer Lemniskate hat innerhalb eines Zykels M der Kurve dieselbe Anzahl $\varkappa$ der Mittelpunkte (jeden Mittelpunkt nach seiner Vielfachheit gerechnet). Die natürliche Zahl $\varkappa$ ist die Charakteristik des Zykels M.*

Ist $0 < r_0 < R$ und verändert sich r von 0 ausgehend bis r_0 stetig und monoton, so bewegen sich die Nullstellen der Polynome

$$g(z) \equiv f(z) - re^{i\varphi}$$

stetig. Dies gilt auch dann, wenn auch der Winkel φ sich stetig verändert. Während dieser Veränderung von r und φ kann keine Nullstelle der Polynome $g(z)$ den Zykel M übertreten. In den Nullstellen z der Polynome $g(z)$ besteht nämlich die Ungleichung

$$|f(z)| = r \leqq r_0 < R,$$

in den Punkten z des Zykels M ist aber $|f(z)| = R$.

Daraus folgt, daß jedes Polynom $g(z)$ $(0 \leqq r \leqq r_0 < R;\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$ innerhalb des Zykels M der Lemniskate $|f(z)| = R$ ebenso oft verschwindet, wie das Polynom $f(z)$. Damit ist der Satz I bewiesen.

Ein *Zug* einer Lemniskate ist ein geschlossener Teil der Kurve, der überall stetige Tangenten besitzt. Ein Zug ist ein Zykel, wenn er sich nicht schneidet. Widrigenfalls besteht der Zug aus mehreren Zykeln. Die Charakteristik eines Zuges ist die Summe der Charakteristiken seiner Zykel. Man sagt, daß ein Punkt innerhalb eines Zuges der Lemniskate liegt, wenn er innerhalb eines Zykels des Zuges liegt. Mit dieser Definition gilt der Satz I auch für die Züge der Lemniskate.

Ein Kreis ist durch sein Zentrum und durch seinen Halbmesser, oder durch sein Zentrum und durch einen seiner Punkte bestimmt. Ebenso ist eine Lemniskate bestimmt, wenn man ihre Mittelpunkte und außerdem ihren Halbmesser oder einen ihrer Punkte kennt. Im zweiten Falle kann man den Punkt durch jeden anderen Punkt der zugehörigen Polgruppe ersetzen. Eine Polgruppe als Hauptgruppe und zwei andere Punkte bestimmen die Lemniskate, wenn die zwei Punkte nicht derselben Polgruppe gehören.

§ 3. Die Lage der Hauptgruppen auf der Lemniskate.

Jede Hauptgruppe der Lemniskate $|f(z)| = R$ besteht aus den Nullstellen eines Polynoms $h(z)$ von der Form

$$h(z) = f(z) - Re^{i\varphi} = \prod_{k=1}^{n} (z - c_k). \tag{5}$$

Diese Hauptgruppe wird mit $H(\varphi)$ bezeichnet. φ heißt der Winkel der Hauptgruppe $H(\varphi)$. Jeder Punkt von $H(\varphi)$ liegt auf der Lemniskate. Ein Punkt z ist dann und nur dann ein mehrfacher Punkt der Hauptgruppe $H(\varphi)$, wenn beide Gleichungen $h(z)=0$ und $h'(z)\equiv f'(z)=0$ bestehen, wenn also z ein singulärer Punkt der Lemniskate ist[3]). Jeder (reelle) singuläre Punkt einer Lemniskate ist ein mehrfacher Punkt mit getrennten Tangenten, wo ein Zug sich schneidet. Zwei Züge haben einen Punkt nur dann gemeinsam, wenn beide Züge sich in diesem Punkte schneiden. Schneidet ein Zug der Lemniskate sich nicht, so enthält er keinen singulären Punkt. Er ist ein Zykel.

Während der Winkel φ von Null bis 2π stetig und monoton zunimmt, bewegen sich die Punkte der Hauptgruppen $H(\varphi)$ auf der Lemniskate stetig und beschreiben die Lemniskate. Hat der Zykel M der Lemniskate keine Ecke, so hat jede Hauptgruppe auf M lauter verschiedene Punkte. Die zyklische Aufeinanderfolge dieser Punkte auf M bleibt also bei der Veränderung des Winkels φ unverändert. Deshalb werden die auf M liegenden Punkte einer Hauptgruppe $H(\varphi)$ von denjenigen einer anderen Hauptgruppe $H(\varphi')$ getrennt.

Dies gilt auch für einen Zykel M mit Ecken, wenn man eine Ecke in der zugehörigen Hauptgruppe der Lemniskate auf M einfach rechnet.

Ist $\varkappa$ die Charakteristik des Zykels M, so hat jedes Polynom

$$g(z;r)=f(z)-re^{i\varphi}, \qquad 0\leqq r<R,$$

in dem von M begrenzten Bereich B $\varkappa$ Nullstellen. Diese Nullstellen gehören der Hauptgruppe $H(\varphi;r)$ der Lemniskate $|f(z)|=r$.

Es gibt eine Zahl R_0, so daß keine Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$ im Bereich B einen singulären Punkt besitzt. Enthält das Innere von B die Nullstellen $z_1', z_2', \ldots, z_p'$ der Derivierten $f'(z)$, so ist $R_0=\operatorname{Max}|f(z_k')|$ $(k=1, 2, \ldots, p)$. Im Falle $p=0$ ist $R_0=0$.

Eine Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$, hat mit dem Zykel M der Lemniskate $|f(z)|=R$ keinen Punkt gemeinsam. Sie hat also in B eine aus ganzen Zügen bestehende Teilkurve, die keinen singulären Punkt besitzt und die sich dem Zykel M nähert, falls $r\to R$. Daraus folgt, daß die in B liegenden Punkte der Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$, auf einem Zykel $M(r)$ ohne Ecke liegen.

Die auf $M(r)$ liegenden Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi;r)$ trennen diejenigen der Hauptgruppe $H(\varphi';r)$, $\varphi'\not\equiv\varphi$ (mod. 2π). Diese zwei Punktgruppen konvergieren im Falle $r\to R$ gegen die auf M liegenden Punktgruppen der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$. Diese Punktgruppen

3) A. a. O. 1), S. 209.

trennen auf M einander. Dies gilt auch dann, wenn die Hauptgruppe $H(\varphi)$ eine Ecke E des Zykels M enthält.

Bezeichnet nämlich $E(r)$ den Punkt von $M(r)$, der im Falle $r \to R$ gegen E konvergiert und bezeichnen $E_1'(r)$ und $E_2'(r)$ die auf $M(r)$ zu $E(r)$ benachbarten Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi'; r)$, so enthält der Bogen $E_1'(r)\, E(r)\, E_2'(r)$ des Zykels $M(r)$ außerhalb von $E(\varphi)$ keinen Punkt der Hauptgruppe $H(\varphi; r)$. Diese Hauptgruppe hat also auf dem Zykel $M(r)$ nur einen Punkt, der im Falle $r \to R$ gegen die Ecke E des Zykels M konvergiert.

Damit ist der Satz bewiesen:

II. *Jede Hauptgruppe hat auf ihrem Zug M von der Charakteristik $\varkappa$ genau $\varkappa$ getrennte Punkte, wobei eine Ecke des Zykels in der zugehörigen Hauptgruppe einfach zu rechnen ist. Die auf dem Zykel M liegenden Punkte zweier Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ trennen einander.*

§ 4. Konjugierte Polgruppen bezüglich einer Lemniskate.

Die Punkte Z_1 und Z_2 sind konjugierte Pole bezüglich eines Kreises K, wenn sie Spiegelbilder voneinander für den Kreis K sind. Die Punkte Z_1 und Z_2 sind also bezüglich des Kreises

$$|Z| = R \text{ oder } Z\bar{Z} - R^2 \equiv |Z|^2 - R^2 = 0$$

dann konjugierte Pole, wenn

$$Z_1 = R_1 e^{i\varphi} \equiv RTe^{i\varphi}, \quad Z_2 = R_2 e^{i\varphi} \equiv RT^{-1} e^{i\varphi}, \quad 0 < T \neq 1$$

sind.

Aus der Identität

$$(6) \quad (A + \lambda B)(\bar{A} + \mu \bar{B}) - (B + \mu A)(\bar{B} + \lambda \bar{A}) \equiv (1 - \lambda\mu)(A\bar{A} - B\bar{B})$$

folgt im Falle $A = Z$, $B = -R$, $\lambda = Te^{i\varphi}$, $\mu = \bar{\lambda} = Te^{-i\varphi}$, $T \neq 1$, daß

$$(Z - Z_1)(\bar{Z} - \bar{Z}_1) - T^2(Z - Z_2)(\bar{Z} - \bar{Z}_2) \equiv (1 - T^2)(Z\bar{Z} - R^2),$$

oder

$$|Z - Z_1|^2 - T^2 |Z - Z_2|^2 \equiv (1 - T^2)(|Z|^2 - R^2)$$

ist. In den Punkten des Kreises $|Z| = R$ besteht also die Gleichung

$$\left| \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} \right| = T \equiv \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung stellt einen bezüglich der konjugierten Pole Z_1 und Z_2 Apollonischen Kreis mit dem Parameter T dar.

Die Eigenschaft des Apollonischen Kreises läßt sich auf die Lemniskaten übertragen.

Sind Z_1 und Z_2 konjugierte Pole bezüglich des Kreises $|Z| = R$, so bilden die Nullstellen der Polynome

$$
(7) \qquad \begin{aligned} g_1(z) &\equiv f(z) - Z_1 \equiv f(z) - RTe^{i\varphi} \equiv \prod_{k=1}^{n} (z - a_k), \\ g_2(z) &\equiv f(z) - Z_2 \equiv f(z) - RT^{-1}e^{i\varphi} \equiv \prod_{k=1}^{n} (z - b_k) \end{aligned}
$$

bezüglich der Lemniskate $|f(z)| = R$ *konjugierte Polgruppen.* Diese Polgruppen sind W-Bilder der Punkte Z_1 und Z_2.

Aus der Identität (6) folgt im Falle

$$A = f(z),\ B = -R,\ \lambda = Te^{i\varphi},\ \mu = \bar{\lambda} = Te^{-i\varphi},\ T \neq 1$$

die Identität

$$f_1(z)\bar{f}_1(\bar{z}) - T^2 f_2(z)\bar{f}_2(\bar{z}) = (1 - T^2)(f(z)\bar{f}(\bar{z}) - R^2),$$

oder

$$|f_1(z)|^2 - T^2|f_2(z)|^2 \equiv (1 - T^2)(|f(z)|^2 - R^2).$$

In den Punkten der Lemniskaten $|f(z)| = R$ besteht also die Gleichung

$$\left|\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right| = \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z - a_k}{z - b_k}\right| = T.$$

Daraus ergibt sich der Satz

III. *Bezeichnen G und G' konjugierte Polgruppen bezüglich einer Lemniskate n-ten Grades und bezeichnen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bzw. $d_1', d_2', \ldots, d_n'$ die Abstände eines Punktes der Lemniskate von den Punkten der Polgruppe G bzw. G', so ist das Verhältnis*

$$\frac{d_1 d_2 \ldots d_n}{d_1' d_2' \ldots d_n'} = T = t^n$$

von der Lage des Punktes P unabhängig. Die positive Zahl t heißt der Parameter der Lemniskate bezüglich der konjugierten Polgruppen G und G'.

Dieser Satz gilt auch im Falle $T = 1$. Er ist aber dann trivial, weil dann die Punktgruppen G und G' in eine Hauptgruppe der Lemniskate zusammenfallen. Das Prinzip des Beweises des Satzes III kommt schon beim Beweis eines anderen allgemeinen Satzes von G. DARBOUX vor[4]). Der Satz III enthält einen Satz von A. WANGERIN[5]) über eine Lemniskate zweiten Grades.

Jeder nicht auf der Lemniskate liegende Punkt Q der Ebene gehört offenbar einer einzigen Polgruppe G an und bestimmt die konjugierten Polgruppen G und G', sowie den Parameter t eindeutig. Bewegt sich Q auf der Lemniskate $|f(z)| = R_1 = RT$, so bewegt sich die

---

[4]) G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873; unveränderter neuer Abdruck, 1899), S. 66—80.

[5]) A. WANGERIN, Über eine Eigenschaft der Lemniskate, *Archiv der Math. Phys.*, 55 (1873), S. 19—21.

ganze Polgruppe G auf dieser Lemniskate. Die konjugierte Polgruppe bewegt sich auf der konjugierten Lemniskate $|f(z)|=R_2=RT^{-1}$.

Sind Z_1 und Z_2 konjugierte Pole bezüglich des Kreises $|Z|=R$, so schneidet jeder Kreis K durch die Punkte Z_1 und Z_2 den Kreis $|Z|=R$ orthogonal. Das W-Bild des Kreises K ist eine zur Lemniskate $|f(z)|=R$ adjungierte Lemniskate, die durch die konjugierten Polgruppen (7) geht und die Lemniskate $|f(z)|=R$ orthogonal schneidet. Dies folgt aus der Konformität der W-Abbildung. Es gilt also der Satz

IV. *Eine Lemniskate wird von einer adjungierten Lemniskate, die durch zwei bezüglich der ersten Lemniskate konjugierte Polgruppen geht, in jedem gewöhnlichen Punkte orthogonal geschnitten. (Die Schnittpunkte bilden auf beiden Lemniskaten zwei Hauptgruppen.)*

§ 5 Die Orientierung der Punkte einer Lemniskate bezüglich ihrer Hauptgruppen.

Besteht eine ebene Punktgruppe (C) aus den Punkten $C_k (k=1, 2, \ldots, n)$, weicht der Punkt P der Ebene von den Punkten C_k ab und bezeichnet γ_k $(0 \leqq \gamma_k < \pi)$ den Winkel der Geraden PC_k zu einer festen Achse (orientierten Geraden), so heißt der Winkel $\Omega \equiv \Sigma \gamma_k \pmod{\pi}$ die *Orientierung* des Punktes P bezüglich der Punktgruppe (C) und auch die Orientierung der Punktgruppe (C) bezüglich des Punktes P. Ω ist die Laguerresche Orientierung des Systems der Geraden PC_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.[6]

Bezeichnet (C') eine andere Punktgruppe mit den Punkten $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ und bezeichnet ω_k den (mit Drehungssinn versehenen) Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{C_k C_k'}$ vom Punkt P aus erscheint, so ist $\omega_k = \gamma_k' - \gamma_k$. Dann heißt der Winkel

$$\Omega_{01} \equiv \sum_{k=1}^{n} \omega_k \equiv \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k' - \gamma_k) \equiv \Omega' - \Omega \pmod{\pi}$$

bzw.

$$\Omega_{10} \equiv -\sum_{k=1}^{n} \omega_k \equiv \Omega - \Omega' \pmod{\pi}$$

die *Orientierung des Punktes P bezüglich der Punktgruppen* (C) *und* (C') bzw. (C') und (C). Ω und Ω' sind offenbar komplementäre Winkel und hängen von der Achse der Orientierung nicht ab.

Bezeichnet z bzw. c_k die zum Punkt P bzw. C_k gehörige komplexe Zahl, ist die reelle Achse die Achse der Orientierung und ist

$$z - c_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad (0 \leqq \varphi_k < 2\pi),$$

so ist $\varphi_k = \gamma_k$ bzw. $\varphi_k = \gamma_k + \pi$, je nachdem $\varphi_k < \pi$ bzw. $\varphi_k > \pi$ ist.

---

6) Oeuvres de LAGUERRE, II (Paris, 1905), S. 23–26. Vgl. G. HUMBERT, Sur l'orientation des systèmes de droites, *Nouvelles Annales de Math.*, (2) **12** (1893), S. 37–64, 123–136.

In beiden Fällen ist also $2\varphi_k \equiv 2\gamma_k \pmod{2\pi}$. Deshalb besteht die Gleichung

$$\frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k} = e^{2i\varphi_k} = e^{2i\gamma_k}.$$

Sind $h(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k)$ und $h_1(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k')$, so sind

$$\frac{h(z)}{\bar{h}(\bar{z})} = \prod_{k=1}^{n}\frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k} = e^{2i\Sigma\gamma_k} = e^{2i\Omega} \text{ und } \frac{h_1(z)}{\bar{h}_1(\bar{z})}\cdot\frac{\bar{h}(\bar{z})}{h(z)} = e^{2i(\Omega'-\Omega)} = e^{2i\Omega_{01}}.$$

Setzt man in der Identität (6)

$$A = f(z),\ B = -R,\ \lambda = e^{i\varphi},\ \mu = e^{-i\varphi'};\ \lambda\mu \neq 1,$$

setzt man ferner

$$h(z) = f(z) - Re^{i\varphi},\ h_1(z) = f(z) - Re^{i\varphi'},$$

so hat die Identität die Form

$$h(z)\bar{h}_1(\bar{z}) - e^{i(\varphi-\varphi')}h_1(z)\bar{h}(\bar{z}) \equiv (1-e^{i(\varphi-\varphi')})[f(z)\bar{f}(\bar{z}) - R^2] \equiv$$
$$\equiv (1-e^{i(\varphi-\varphi')})[|f(z)|^2 - R^2].$$

In den Punkten z der Lemniskate (2) besteht also die Gleichung

$$e^{i(\varphi-\varphi')} = \frac{h_1(z)}{\bar{h}_1(\bar{z})}\,\frac{\bar{h}(\bar{z})}{h(z)} = e^{2i\Omega_{01}}.$$

Es gilt also

$$2\Omega_{01} \equiv \varphi' - \varphi \equiv \Omega' - \Omega \pmod{2\pi} \quad \text{oder} \quad \Omega_{01} \equiv \frac{\varphi'-\varphi}{2} \pmod{\pi}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Satzes über den Peripheriewinkel des Kreises:

V. *Die Punkte einer Lemniskate haben bezüglich ihrer Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ die konstante Orientierung* $\Omega_{01} \equiv \frac{\varphi'-\varphi}{2} \pmod{\pi}$.

Bewegt sich ein Punkt z auf der Lemniskate stetig ohne inzwischen irgendeinen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ überzutreten, so ist $\omega_k = \omega_k(z)$ eine stetige Funktion ($k = 1, 2, \ldots, n$). Unterdessen bleibt also nicht nur Ω_{01}, sondern auch $\Sigma\omega_k(z)$ beständig. In den Punkten c_k und c_k' der Lemniskate ist $\omega_k(z)$ unstetig, $\omega_k(z)$ hat dort einen Sprung. Deshalb unterscheiden die Werte von $\Sigma\omega_k(z)$ in zwei Punkten der Lemniskate, zwischen denen es genau einen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ gibt, um π voneinander.

Die Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi+\pi)$ heißen *Gegenhauptgruppen.* Aus Satz V ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Thalesschen Satzes:

VI. *Die Orientierung jedes Punktes einer Lemniskate bezüglich ihrer beliebigen zwei Gegenhauptgruppen ist ein Rechtwinkel.*

Der Schwerpunkt der Mittelpunkte einer Lemniskate zweiten Grades (einer Cassinischen Kurve) ist auch Schwerpunkt ihrer Hauptgruppen.

Das Symmetriezentrum der Lemniskate zweiten Grades halbiert also das Punktpaar jeder Hauptgruppe. Liegen also die Ecken eines Parallelogramms $A_1A_2A_3A_4$ auf einer Lemniskate zweiten Grades, so ist das Punktpaar A_1A_3 oder A_2A_4 eine Hauptgruppe der Kurve. Der Satz V enthält also einen Satz von DARBOUX[7]) über Cassinische Kurven und damit einen spezielleren Satz von WANGERIN[8]) über einzügige Cassinische Kurven.

§ 6. Das Doppelverhältnis von Polgruppen einer Lemniskate.

Das Doppelverhältnis der Polgruppen $f(z) = Z_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ der Lemniskate $|f(z)| = R$ (die auch Polgruppen der Lemniskaten $|f(z) - Z_0| = R'$ sind), ist die Zahl

$$Dv = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z_2} : \frac{Z_4 - Z_1}{Z_4 - Z_2} = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 - Z_4} : \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_4}.$$

Liegen die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 auf einem Kreis $|Z - Z_0| = R''$, so ist Dv reell. Das Doppelverhältnis von beliebigen vier Hauptgruppen einer Lemniskate ist also immer reell.

Das Doppelverhältnis Dv läßt sich durch die Punkte der ersten (oder letzten) zwei Polgruppen und durch je einen Punkt der anderen zwei Polgruppen ausdrücken.

Sind nämlich

$$f(z) - Z_1 = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k), \quad f(z) - Z_2 = \prod_{k=1}^{n} (z - b_k), \quad f(c) = Z_3 \text{ und } f(d) = Z_4,$$

so sind

$$Z_3 - Z_1 = f(c) - Z_1 = \prod_{k=1}^{n} (c - a_k), \quad Z_3 - Z_2 = f(c) - Z_2 = \prod_{k=1}^{n} (c - b_k),$$

$$Z_4 - Z_1 = f(d) - Z_1 = \prod_{k=1}^{n} (d - a_k) \text{ und } Z_4 - Z_2 = f(d) - Z_2 = \prod_{k=1}^{n} (d - b_k).$$

Daraus folgt die Gleichung

$$Dv = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{c - a_k}{c - b_k}\right] : \left[\frac{d - a_k}{d - b_k}\right].$$

Liegen die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 auf einem Kreis K und ist ihr Doppelverhältnis Dv negativ bzw. positiv, so ist das Punktpaar Z_1Z_2 von dem Punktpaar Z_3Z_4 getrennt bzw. nicht getrennt. Für Lemniskaten gilt der Satz:

VII. *Haben die Hauptgruppen $H(\varphi^{(j)})$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ einer Lemniskate ein negatives Doppelverhältnis Dv, so hat jede dieser Hauptgruppen*

---

7) A. a. O., S. 80.

8) A. a. O.

je einen Punkt unter ihren vier auf einem Zykel M von der Charakteristik $\varkappa$ aufeinanderfolgenden Punkten und das Punktpaar der ersten zwei Hauptgruppen trennt das Punktpaar der letzten zwei auf M. Im Falle $Dv > 0$ trennen diese zwei Punktpaare auf M einander nicht.

Es kann angenommen werden, daß die Aufeinanderfolge der Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi^{(1)})$ beim positiven Umlaufen des Zykels M $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_\varkappa^{(1)}$ ist. Der Bogen $\widetilde{c_1^{(1)} c_2^{(1)}}$ (oder $c_2^{(1)} c_3^{(1)}, c_3^{(1)} c_4^{(1)}, \ldots, c_{\varkappa-1}^{(1)} c_1^{(1)}$) von M enthält nach Satz II je einen Punkt der übrigen drei Hauptgruppen.

Während ein Punkt z von $c_1^{(1)}$ ausgehend den Zykel M im positiven Sinne umläuft, geht der Punkt $Z = f(z)$ in der Z-Ebene den Kreis vom Punkt Z_1 ausgehend im positivem Sinne $\varkappa$-mal um. Während dieser Bewegung des Punktes z auf dem Zykel M verändert sich der Winkel des Wurzelfaktors $z - z_k$ von $f(z)$ offenbar um 0 oder um 2π, je nachdem der Mittelpunkt z_k außerhalb bzw. innerhalb des Zykels M liegt.

Während der Punkt z den Bogen $c_1^{(1)} c_2^{(1)}$ beschreibt, geht der Punkt $Z = f(z)$ von Z_1 ausgehend den Kreis K in positivem Sinne einmal um. Inzwischen tritt der Punkt Z jeden der Punkte Z_2, Z_3 und Z_4 einmal über, weil die von Z_2, Z_3 bzw. Z_4 bestimmte Hauptgruppe auf dem Bogen $c_1^{(1)} c_1^{(2)}$ genau einen Punkt besitzt. Die Aufeinanderfolge der Punkte der Hauptgruppen $H(\varphi^{(j)})$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ auf den Bogen $c_1^{(1)} c_2^{(1)}$ (oder $c_2^{(1)} c_3^{(1)}, \ldots, c_{\varkappa-1}^{(1)} c_1^{(1)}$) stimmt also mit der Aufeinanderfolge der Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 beim positiven Umlaufen des Kreises K überein. Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes VII.

§ 7. Potenz, Potenzlinie, Potenzpunkte bei Lemniskaten.

Die Gleichung der Lemniskate $|f(z) - Z_0| = R$ läßt sich in der Form

$$(8) \quad L(z) \equiv [f(z) - Z_0]\,[\overline{f}(\overline{z}) - \overline{Z}_0] - R^2 \equiv$$
$$\equiv f(z)\,\overline{f}(\overline{z}) - [\overline{Z}_0 f(z) + Z_0 \overline{f}(\overline{z})] - R^2 = 0$$

oder

$$(9) \qquad L(x, y) \equiv \prod_{k=1}^{n} [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2] - R^2 = 0$$

schreiben, wenn

$$f(z) - Z_0 \equiv \prod_{k=1}^{n} (z - z_k), \quad z = x + iy \quad \text{und} \quad z_k = x_k + iy_k$$

sind.

Der (reelle) Wert $L(z_0) = L(x_0, y_0)$ ist die *Potenz* des Punktes $z = x_0 + iy_0$ in bezug auf die Lemniskate (8) bzw. (9). Die Potenz eines Punktes z_0 der Lemniskate ist also Null. Liegt z_0 außerhalb jeder

Zykel bzw. innerhalb eines Zykels der Lemniskate, so ist die Potenz $L(z_0)$ positiv bzw. negativ. Enthält eine Polgruppe den Punkt z_0, so haben auch die übrigen Punkte der Polgruppe in bezug auf die Lemniskate die Potenz $L(z_0)$. Die Punkte, die in bezug auf eine Lemniskate dieselbe Potenz haben, liegen auf einer konzentrischen Lemniskate.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes des Kreises:

VIII. *Wird ein Strahlenbüschel durch den Punkt P_0 von einer Lemniskate geschnitten, so ist das Produkt der Strecken, die auf jedem Strahle von P_0 bis an die Lemniskate reichen, von beständiger Größe. Dieses Produkt ist die Potenz des Punktes P_0 in bezug auf die Lemniskate.*

Eine beliebige Gerade g durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ hat die Gleichungen von der Form

$$x = x_0 + d\cos\alpha \quad \text{und} \quad y = y_0 + d\sin\alpha.$$

Wird dies in die Gleichung (9) eingesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$L(x_0 + d\cos\alpha,\ y_0 + d\sin\alpha) = d^{2n} + A_1 d^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1} d + L(x_0, y_0) = 0.$$

Daraus folgt der Satz VIII, weil die Wurzeln $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$ dieser Gleichung der Relation $d_1 d_2 \ldots d_{2n} = L(x_0, y_0)$ genügen.

Die Punkte z, die in bezug auf die adjungierten aber nicht konzentrischen Lemniskaten $(Z_1 \neq Z_2)$

$$(10)\quad L_k(z) \equiv |f(z) - Z_k|^2 - R_k^2 \equiv f(z)\bar{f}(\bar{z}) - [\bar{Z}_k f(z) + Z_k \bar{f}(\bar{z})] - R_k^2 = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

gleiche Potenzen besitzen, genügen der Gleichung

$$(11)\quad L_1(z) - L_2(z) \equiv (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) f(z) + (Z_2 - Z_1)\bar{f}(\bar{z}) + R_2^2 - R_1^2 = 0$$

und liegen auf der *Potenzlinie* der Lemniskaten $L_1(z) = 0$ und $L_2(z) = 0$. Diese Potenzlinie ist eine Kurve n-ter Ordnung, eine *Stelloide* von E. LUCAS[9]), das W-Bild einer Geraden der Z-Ebene. Sind nämlich

$$f(z) = X + iY \quad \text{und} \quad Z_2 - Z_1 = R' e^{i\alpha},$$

so läßt sich die Gleichung (11) in der Form

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R'} = 0$$

schreiben. Die W-Bilder der Geraden der Z-Ebene werden *adjungierte Stelloiden* genannt. Sie sind durch das Polynom $f(z)$ bestimmt. Eine Stelloide enthält mit einem Punkt auch die übrigen Punkte der zugehörigen Polgruppe. Zwei adjungierte Stelloiden haben eine Pol-

[9]) Vgl. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven* (Leipzig, 1910), Bd. I, S. 439 - 450.

gruppe gemeinsam. Die Asymptoten einer Stelloide laufen in den Schwerpunkt der Polgruppen zusammen und bilden eine n-strahlige Windrose.

Sind λ_1 und λ_2 reelle Zahlen mit der Summe 1, so bilden die Lemniskaten

$$L(z) \equiv \lambda_1 L_1(z) + \lambda_2 L_2(z) = 0 \tag{12}$$

ein Büschel von Lemniskaten. Für jeden Punkt z der Lemniskate (12) ist

$$L_1(z) : L_2(z) = -\lambda_2 : \lambda_1 = \lambda.$$

Der Ort der Punkte, deren Potenzen in bezug auf zwei adjungierte Lemniskaten ein gegebenes Verhältnis λ haben, ist also eine Lemniskate des Büschels. Das Büschel enthält im Falle $\lambda = 1$ eine Stelloide, die gemeinsame Potenzlinie aller Paare der Lemniskaten des Büschels. Aus $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = 1$ folgt nämlich, daß

$$[\lambda_1 L_1(z) + \lambda_2 L_2(z)] - [\mu_1 L_1(z) + \mu_2 L_2(z)] \equiv (\lambda_1 - \mu_1)[L_1(z) - L_2(z)].$$

Es gibt in der Z-Ebene einen Punkt (Potenzpunkt), der in bezug auf drei Kreise die gleiche Potenz besitzt. Zu drei adjungierten Lemniskaten gibt es also eine Polgruppe, die Potenzpolgruppe der Lemniskaten, deren Punkte in bezug auf die drei Lemniskaten die gleiche Potenz besitzen.

Die W-Abbildung ist konform. Aus bekannten Sätzen der elementaren Kreisgeometrie folgen z. B. die Sätze: Die Gruppen der Mittelpunkte der Lemniskaten eines Büschels liegen auf einer adjungierten Stelloide, von der die Potenzlinie in jedem Punkte einer Polgruppe orthogonal geschnitten wird. Schneidet eine Lemniskate zwei adjungierte Lemniskaten orthogonal, so schneidet sie jede Lemniskate des von diesen zwei Lemniskaten bestimmten Büschels orthogonal (in zwei Polgruppen) und ihre Mittelpunktgruppe liegt auf der Potenzlinie des Büschels.

§ 8. Durch Polgruppen einer Lemniskate bestimmte Korrespondenzen zwischen den Punkten der Ebene.

Die Polgruppen einer Lemniskate $|f(z)| = R$ n-ten Grades bestimmen zwischen den Punkten der Ebene eine $(n-1, n-1)$ Korrespondenz. In dieser Korrespondenz entsprechen einem Punkte z_0 der Ebene die übrigen Nullstellen des Polynoms $f(z) = f(z_0)$, also die übrigen $n-1$ Punkte der z_0 enthaltenden Polgruppe. Bezeichnet M bzw. M' einen Zykel der Lemniskate $f(z) = R$ von der Charakteristik $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ und bezeichnet B bzw. B' den von M bzw. M' begrenzten abgeschlossenen endlichen Bereich, so bestimmt die $(n-1, n-1)$ Korrespondenz zwischen den Punkten der Bereiche B und B' eine $(\varkappa', \varkappa)$ Korrespondenz. Ist $\varkappa \geqq 2$, so bestimmen die Polgruppen zwischen den Punkten des Bereiches B eine $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)$ Korrespondenz. Dies folgt aus Satz I.

Jede (1, 1) Korrespondenz zwischen den Punkten der komplexen Z-Ebene ist eine Korrespondenz zwischen den Polgruppen und damit eine (n, n) Korrespondenz zwischen den Punkten der Ebene. Einem Punkte einer Polgruppe entsprechen nämlich die Punkte derjenigen Polgruppe, die nach der (1, 1) Korrespondenz der ersten Polgruppe entspricht.

Jede solche Korrespondenz zwischen den Punkten der Ebene induziert eine $(\varkappa, \varkappa)$ bzw. $(\varkappa', \varkappa')$ Korrespondenz zwischen den Punkten des Bereiches B bzw. B' und eine $(\varkappa', \varkappa)$ Korrespondenz zwischen den Punkten der Bereiche B und B'.

In der Geometrie der Lemniskaten haben diejenigen Korrespondenzen eine besondere Rolle, die aus den einfachsten involutorischen Abbildungen der Z-Ebene, d. h. aus Spiegelungen bezüglich eines Punktes, einer Geraden oder eines Kreises entspringen. Die entsprechenden (n, n) Korrespondenzen mögen Spiegelungen bezüglich einer Polgruppe, eines adjungierten Stelloide bzw. einer adjungierten Lemniskate genannt werden.

Jede dieser Korrespondenzen hat die auszeichnende Eigenschaft, daß einem Punkte der Ebene lauter reelle Punkte entsprechen.

(Eingegangen am 10. August 1948.)

Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthonormales définies dans l'intervalle (a, b). Il est connu[1]) que la série orthonormale

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

est presque partout convergente, si $\Sigma c_n^2 (\log n)^2 < \infty$. Pour obtenir des résultats plus nets, on peut introduire[2]) la notion de λ_n-lacunarité : la série (1) est appelée λ_n-lacunaire, si le nombre des coefficients $c_{k_\nu} \neq 0$, d'indices compris entre 2^n et 2^{n+1}, est $O(\lambda_{2^n})$ où $\{\lambda_n\}$ est une suite non-décroissante d'entiers positifs. Cette notion a permis de démontrer que, si la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$ et λ_n-lacunaire, la convergence de $\Sigma c_n^2 \lambda_n$ suffit pour la convergence presque partout de la série (1). M. RÉNYI[3]) a amélioré ce résultat dans le cas où λ_n est d'ordre $(\log n)^\alpha$ avec $1 < \alpha < 2$.

2. M. GÁL[4]) a amélioré considérablement le critère de convergence concernant les séries λ_n-lacunaires, en démontrant le théorème suivant:

Si la série (1) *est presque partout sommable* $(C, 1)$ *et* λ_n*-lacunaire, la convergence de*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log \lambda_n)^2$$

entraîne[4a]) *la convergence presque partout de la série orthonormale* (1).

Après avoir donné une démonstration très simple de ce théorème, nous démontrerons que *ce critère est, en un certain sens, le meilleur possible,* parce que nous construirons, à toute suite de nombres

---

[1]) Voir p. ex. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), p. 164.

[2]) G. ALEXITS, Sur la convergence des séries lacunaires, *ces Acta,* **11** (1948), p. 251—253.

[3]) A. RÉNYI, Remarque à la note précédente, *ces Acta,* **11** (1948), p. 253.

[4]) I. S. GÁL, Sur les séries orthogonales $C(1)$-sommables et $\lambda(n)$-lacunaires, *Comptes rendus Paris,* **227** (1948), p. 1140—1142.

[4a]) Si le nombre des coefficients non-nuls d'indices compris entre 2^n et 2^{n+1} est borné, on pose $\lambda_{2^n} = \lambda_n = 2$ pour tout n.

$w(n) \geqq (\log\log n)^2$ et $w(n) = o[(\log n)^2]$, une série orthonormale λ_n-lacunaire et presque partout sommable, mais partout divergente, malgré la convergence de la série $\Sigma c_n^2 w(\lambda_n)$.

3. Désignons, pour démontrer le théorème de M. GÁL, par

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

la n-ième somme partielle de la série (1). Comme cette série est, d'après l'hypothèse, presque partout sommable $(C, 1)$, la suite $\{s_{2^n}(x)\}$ converge presque partout[5]). Nous n'avons donc qu'à démontrer que

$$(2) \qquad s_m(x) - s_{2^n}(x) = o(1) \qquad (2^n < m < 2^{n+1})$$

presque partout. Rappelons nous, à ce but, au lemme suivant[6]):

Il existe, à tout système orthonormal $\{\psi_n(x)\}$, une fonction $\delta_n(x)$ telle que pour $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ on ait

$$\left| \sum_{k=i}^{j} a_k \psi_k(x) \right| \leqq \delta_n(x)$$

et

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\,dx \leqq C(\log n)^2 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \qquad (C = \text{constante absolue}).$$

Désignons par $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ les coefficients $\neq 0$ de la série (1) dont les indices sont compris entre 2^n et 2^{n+1}, en d'autres termes:

$$s_m(x) - s_{2^n}(x) = \sum_{2^n < k_\nu \leqq m} c_{k_\nu} \varphi_{k_\nu}(x).$$

Posons $a_\nu = c_{k_\nu}$ et $\psi_\nu(x) = \varphi_{k_\nu}(x)$, alors le lemme précédent assure l'existence d'une fonction $\delta_n(x)$, telle que

$$\left| \sum_{2^n < k_\nu \leqq m} c_{k_\nu} \varphi_{k_\nu}(x) \right| \leqq \delta_n(x) \qquad (2^n < m < 2^{n+1})$$

et, le nombre des $c_{k_\nu} = a_\nu$ étant $O(\lambda_{2^n})$, on a encore

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\,dx \leqq O[(\log \lambda_{2^n})^2] \sum_{\nu=1}^{O(\lambda_{2^n})} a_\nu^2 = O[(\log \lambda_{2^n})^2] \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 (\log \lambda_k)^2.$$

Il s'ensuit donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_n^2(x)\,dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log \lambda_n)^2 < \infty,$$

---

[5]) L. c. [1]), p. 161.

[6]) L. c. [1]), p. 162.

ce qui entraîne la convergence presque partout de la série $\Sigma\delta_n^2(x)$; c'est-à-dire: $\delta_n(x)=o(1)$ presque partout. La relation (2) est donc démontrée et c'était justement ce que nous avons eu à faire.

4. *A toute suite non-décroissante* $\{w(n)\}$ *de nombres positifs tels que* $(\log\log n)^2 \leqq w(n) = o[(\log n)^2]$, *on peut construire une série orthonormale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

jouissant des propriétés suivantes: elle est 1° *presque partout sommable* $(C, 1)$; 2° λ_n*-lacunaire;* 3° *partout divergente;* 4° $\Sigma c_n^2 w(\lambda_n) < \infty$.

En effet, M. MENCHOV[7]) a construit une série orthonormale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

pour laquelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty,$$

et telle qu'il existe un $\alpha>0$ et une suite d'indices $\nu_1<\nu_2<\ldots$, de sorte qu'on peut attacher, à tout point x de (a,b), un $m(x)>\nu_n$ et $<\nu_{n+1}$ avec

$$\left|\sum_{i=m(x)}^{\nu_{n+1}-1} a_i\psi_i(x)\right| \geqq \alpha > 0. \tag{4}$$

Soit μ_k le k-ième indice $\neq \nu_n$ et désignons par i_k l'entier $[k^{\log k}]$. Posons

$$c_{i_k} = a_{\mu_k}, \qquad \varphi_{i_k}(x) = \psi_{\mu_k}(x).$$

Les fonctions $\varphi_\nu(x)$ avec $\nu \neq i_k$ soient successivement égales aux $\psi_{\nu_k}(x)$ et posons pour ces indices $c_\nu=0$. Démontrons d'abord que la série (3) ainsi définie jouit de la propriété 1°. Pour cela, il suffit[8]) de démontrer que $\Sigma c_n^2(\log\log n)^2<\infty$. Or

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2(\log\log n)^2 = \sum_{n=3}^{\infty} c_{i_n}^2 (\log\log i_n)^2 = \sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 (\log\log i_n)^2 \leqq$$

$$\leqq 4\sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 (\log\log n)^2 \leqq 4\sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2\, w(n) \leqq 4\sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2\, w(\mu_n) < \infty.$$

La série (3) jouit donc de la propriété 1°. Il est évident qu'elle est λ_n-lacunaire, mais nous avons besoin, pour les suivants, d'évaluer λ_n. On voit immédiatement que le plus petit nombre k pour lequel $k^{\log k}\geqq 2^n$ est[9]) $2^{\sqrt{n}}$ et le plus grand nombre k pour lequel $k^{\log k}\leqq 2^{n+1}$ est $2^{\sqrt{n+1}}$. Entre les indices 2^n et 2^{n+1} il y a donc $2^{\sqrt{n+1}}-2^{\sqrt{n}} = O\left(\frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right)$ termes

[7]) L. c. [1]), p. 167.

[8]) L. c. [1]), p. 190.

[9]) Nous entendons, pour simplifier la notation, par le symbole "log" le logarithme de base 2, ce qui ne change rien.

non-nuls de la série (3). C'est-à-dire qu'on peut poser $\lambda_{2^n} = 2^{\sqrt{n}} / \sqrt{n}$ d'où,

$$\lambda_n < 2^{\sqrt{\log n}}.$$

Nous démontrons maintenant que la série (3) possède aussi la propriété 4°. En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{i_n}^2 w(\lambda_{i_n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(2^{\sqrt{\log i_n}}).$$

Mais $i_n \leqq n^{\log n}$, donc $2^{\sqrt{\log i_n}} \leqq n$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(\lambda_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(\mu_n) < \infty.$$

La série (3) possède donc les propriétés 1°, 2°, 4°. Pour démontrer 3°, il ne faut qu'envisager l'inégalité (4) où ne figurent que des $\psi_{\mu_k}(x) = \varphi_{i_k}(x)$, c'est-à-dire que des $\varphi_k(x)$ avec des coefficients $c_k \neq 0$. La relation (4) assure donc, pour tout n et tout point x de (a, b), l'existence d'un indice l et d'un indice variable $p(x) > n$, de sorte que

$$\left| \sum_{k=p(x)}^{l} c_k \varphi_k(x) \right| \geqq \alpha > 0.$$

Par conséquent, la série (3) est partout divergente, ce qui achève la démonstration.

5. Le théorème démontré au paragraphe **3** permet d'énoncer le corollaire suivant[10]:

Si, pour un $r > 0$ quelconque, la série (1) *est* $(\log n)^r$*-lacunaire et*

(5) $$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty,$$

la série (1) *est presque partout convergente.*

En effet, la condition (5) implique la sommabilité $(C, 1)$ presque partout de la série (1) et, en même temps, (5) constitue, dans le cas de $(\log n)^r$-lacunarité, aussi la deuxième partie des prémisses de notre théorème.

(Reçu le 23 novembre 1948)

[10]) L. c. [4]), p. 1141.

Sur la convergence d'une classe de séries orthonormales.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Nous nous occuperons, dans les suivants, des séries orthonormales

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

dont les coefficients sont soumis à la condition $|c_n| \geqq |c_{n+1}|$ et démontrerons le théorème:

Si $|c_n| \geqq |c_{n+1}|$ *et, pour un* $\varepsilon > 0$ *quelconque,*

$$c_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{1+\varepsilon}}\right), \tag{2}$$

la série (1) *converge presque partout.*

2. Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer notre proposition sous l'hypothèse restrictive $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$. En effet, soient $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ les coefficients positifs de la série (1). Les hypothèses de notre théorème entraînent $c_{k_n} \geqq c_{k_{n+1}}$, et $c_{k_n} = O(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-1-\varepsilon})$. Si nous démontrons le théorème pour des séries orthonormales dont les coefficients sont positifs et forment une suite décroissante, alors, en posant $\psi_n(x) = \varphi_{k_n}(x)$ et $a_n = c_{k_n}$, la série $\Sigma a_n \psi_n(x)$ doit être convergente presque partout. La même chose est valable pour la série $\Sigma b_n \chi_n(x)$ où b_n est le n-ième coefficient négatif de la série (1) et $\chi_n(x)$ la fonction $\varphi_{i_n}(x)$ correspondante à ce coefficient. La série (1), étant la somme des séries $\Sigma a_n \psi_n(x)$ et $\Sigma b_n \chi_n(x)$, converge aussi presque partout. Nous pouvons donc supposer, sans restriction de la généralité, que $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$.

3. Désignons par

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

la n-ième somme partielle de la série (1) et posons

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x).$$

Alors, en supposant $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$, on a

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)| + c_{m+1} |\Phi_m(x)| + c_{n+1} |\Phi_m(x)|.$$

MM. GÁL et KOKSMA ont démontré[1]) que $\Phi_n(x) = o(\sqrt{n}\,(\log n)^{1+\varepsilon})$ presque partout; par conséquent, les deux derniers termes de l'inégalité précédente sont $= o(1)$ presque partout en vertu de l'ordre de grandeur (2) des coefficients c_n. Notre théorème sera donc démontré, dès que nous réussissons à établir la validité presque partout de la relation

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)| = o(1). \tag{3}$$

Or

$$\int_a^b |\Phi_k(x)|\, dx \leqq \left\{ \int_a^b dx \int_a^b \Phi_k^2(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(b-a)k},$$

et par conséquent,

$$\int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)|\, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) \sqrt{k} \leqq$$

$$\leqq c_{n+1} \sqrt{(b-a)(n+1)} + \sqrt{b-a} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})\, c_{k+1} \leqq$$

$$\leqq c_{n+1} \sqrt{(b-a)(n+1)} + \frac{\sqrt{b-a}}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

Vu l'ordre de grandeur (2) des cofficients c_k, on en tire pour un indice N suffisamment grand:

$$\int_a^b \sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)|\, dx < \eta^2$$

quelque petit que soit $\eta > 0$ donné d'avance. Désignons par A l'ensemble des points x auxquels

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)| \geqq \eta$$

et par $|A|$ la mesure de l'ensemble A, alors

$$\eta |A| \leqq \int_A \sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)|\, dx < \eta^2,$$

c'est-à-dire: $|A| < \eta$. Mais

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)| \geqq \sum_{k=n+2}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)|,$$

---

1) Je tiens cette communication de M. GÁL. La publication paraîtra sous peu.

donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(c_k - c_{k+1})|\Phi_k(x)| < \eta$$

pour tout $n \geqq N$ et en tout point x exceptés les points de l'ensemble A de mesure $< \eta$, çe qui équivaut à la relation (3) et la démonstration de notre théorème est achevée.

4. Notre critère de convergence peut être, en certains cas, le meilleur des critères connus, même s'il s'agit spécialement d'une série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

En effet, soient $a_0 = 0$, $b_n = 0$ et a_{i_n} le n-ième coefficient $a_\nu \neq 0$. Posons $i_n = [n^{\log n}]$ et

$$a_{i_n} = \frac{1}{\sqrt{n}\,(\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

D'après le théorème que nous venons de démontrer, cette série est convergente presque partout. Les autres critères auxquels on pourrait encore penser, sont les suivants:

$$1^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log n < \infty,\text{[2]}$$

$$2^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}(\log n)^2 < \infty,\text{[3]}$$

$$3^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\log \lambda_n)^2 < \infty.\text{[4]}$$

Il est évident que les critères 1^0 et 2^0 ne sont pas applicables à la série considérée. Quant à 3^0, on voit qu'ayant posé $i_n = [n^{\log n}]$, on a[4] $\log n = O(\log \lambda_{i_n})$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\log \lambda_n)^2 \geqq \text{const.} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\log n)^2.$$

Cette série étant divergente, le critère 3^0 n'est applicable non plus.

(Reçu le 23 novembre 1948)

---

[2]) A. Kolmogoroff—G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes rendus Paris*, **178** (1924), p. 303—306; A. Plessner, Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal für Math.*, **155** (1925), p. 15—25.

[3]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), p. 112—138; D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie. La convergence), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), p. 82—105.

[4]) Voir la note précédente.

Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós.

Von L. RÉDEI in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Den berühmten Satz von MINKOWSKI—HAJÓS[1]) spreche ich in einer neuen, möglichst knappen und sehr eleganten Form folgendermaßen aus, wobei der Satz als eine Struktureigenschaft der reellen Zahlen erscheint:

Satz 1. *Bezeichne* R_n $(n \geqq 1)$ *den Modul aller reellen Vektoren* $(x) = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ *mit der (gewöhnlichen) Addition* $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$. *Wenn für einen Untermodul* $\mathfrak{U}$ *von* R_n *in jeder Restklasse von* $R_n/\mathfrak{U}$ *genau ein Element* (x) *mit*

$$(1) \qquad 0 \leqq x_i < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

liegt, so liegt mindestens ein Element $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *in* $\mathfrak{U}$.

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß* $\mathfrak{U}$ n *Basisvektoren hat, die untereinander geschrieben nach passender Numerierung der* x_i *eine kanonische Matrix bilden;* so nennen wir eine Matrix (mit n Zeilen und Spalten)

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

die nämlich in der Hauptdiagonale lauter 1 und darüber lauter 0 enthält.

Der Satz hat eine ganze Reihe äquivalente Formen. Die drei bekanntesten beziehen sich auf Diophantische homogene lineare Ungleichungen, raumzerlegende Würfelgitter, bzw. endliche Abelsche Gruppen; das sind wichtige Sätze von sehr verschiedenen Gebieten, die wir später unten formulieren und sie bzw. mit Satz 1a, 1b, 1c bezeichnen werden (s. §§ 2, 3 bzw. 9).

Satz 1 hat zuerst MINKOWSKI in der Form 1a (§2), später auch in der Form 1b (§3) als Vermutung ausgesprochen, ihn aber zu beweisen umsonst versucht, obwohl er auf ihn einen großen Wert gelegt

[1]) G. HAJÓS, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschrift*, 47 (1941), S. 427—467.

hat[2]). Nach seinem Tod haben sich viele Autoren[3]) mit dem Problem beschäftigt, der Gesamterfolg war aber bloß die Erledigung der Fälle $n \leqq 9$, als endlich HAJÓS[1]) dem Satz die überraschende, an sich sehr wichtige Form 1c (§9) gab und ihn so bewies.

HAJÓS knüpft sienen Beweis unmittelbar auf die (geometrische) Form 1b des Satzes an und gliedert ihn in die folgenden drei Teile:

Teil 1. Zurückführung von Satz 1b auf den Fall „rationaler" Würfelgitter.

Teil 2. Beweis der Äquivalenz mit dem gruppentheoretischen Satz 1c.

Teil 3. Beweis des letzteren Satzes.

Das Studium des Satzes von MINKOWSKI—HAJÓS ist durch den großen Umfang und die Kompliziertheit des Beweises von HAJÓS sehr mühsam. Der Schwerpunkt des Beweises liegt auf Teil 3, den ich[4]) neulich ganz kurz gestaltet habe. Gleichzeitig gelang mir auch Teile 1, 2 wesentlich zu vereinfachen, wie das in dieser Arbeit steht; beide Arbeiten zusammen enthalten somit den vollständigen Beweis des Satzes von MINKOWSKI—HAJÓS. (Es schien mir gut, die Arbeit [4]) getrennt zu veröffentlichen, um auch hiermit den selbständigen Charakter vom Satz 1c hervorzuheben.)

Vollständigkeitshalber lasse ich diese Arbeit auch auf den Beweis der Äquivalenz der Sätze 1a, 1b erstrecken, den MINKOWSKI meines Wissens nur für $n=3$ ausgearbeitet hat. Die Äquivalenz von Satz 1 mit (der Form 1b von) dem Minkowski—Hajósschen Satz wird sich mit wenig Mühe auch herausstellen.

Wie auch schon oben dem Satz 1, so werde ich den Sätzen 1a, 1b, 1c je einen „Zusatz" beifügen, der jedesmal eine verschärfte Form des betreffenden Satzes ausdrückt und so seine wahre Natur spiegelt. Die Zusätze von den Sätzen 1a, 1b sind bekannt und bilden einen organischen Teil des Beweises.

Beide Arbeiten (nämlich die vorliegende und [4])) bringen neben der

---

[2]) S. hierüber MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1910), S. 105.

[3]) S. die historischen Angaben in der Einleitung der Arbeit [1]) von HAJÓS. Zum am Ende dieser Hajósschen Arbeit stehenden Literaturverzeichnis tritt noch als weitere Literatur hinzu:

PH. FURTWÄNGLER, Über Gitter konstanter Dichte, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), S. 281—288. (Hier versucht FURTWÄNGLER den damals noch unbewiesenen Satz von MINKOWSKI—HAJÓS auf die Frage der „mehrfachen Bedeckung von R_n mit einem Würfelgitter" zurückzuführen, ein Weg, der ebenfalls nach HAJÓS [1]) für ein allgemeines n ungangbar ist.)

N. HOFREITER, Gitterförmige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), S. 48–64. (Diese Arbeit enthält den Beweis des Minkowski—Hajósschen Satzes für $n=1, \ldots, 9$.)

[4]) L. RÉDEI, Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, erscheint demnächst in den *Commentarii Math. Helvetici.*

erstrebten Vollständigkeit nur wenig sachlich neues, dagegen viele inhaltliche und formale Vereinfachungen; wodurch der Satz von MINKOWSKI—HAJÓS ganz leicht zugänglich geworden ist. In einer anderen Arbeit beabsichtige ich auf den Satz zurückzukommen, wobei ich mich unter anderem mit weiteren Äquivalenten und Anwendungen beschäftigen will, wofür die Grundlagen teils schon hier niedergelegt werden. Ich möchte hier auch auf eine überraschende Äquivalente des Satzes aufmerksam machen, die FÁRY neulich gefunden hat[5]).

§ 2. Satz 1a über Diophantische Ungleichungen.

Wir schicken voraus: Bezeichnet A die Koeffizientenmatrix von n homogenen Linearformen $L_i(x)$ mit den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ und werden die letzteren einer homogenen linearen Substitution mit der Koeffizientenmatrix B unterworfen, so haben die neuen Formen L_i' die Koeffizientenmatrix AB. Hat dabei das untenfolgende System (3) keine ganzzahlige Lösung außer $x_1 = \ldots = x_n = 0$, so gilt ähnliches auch für L_i' (statt L_i) immer, wenn B ganzzahlig und unimodular ist; unimodular nennen wir eine (quadratische) Matrix mit der Determinante ± 1.

Satz 1 hat MINKOWSKI als Vermutung in folgender Form ausgesprochen:

Satz 1a. *Es seien $L_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ reelle homogene Linearformen der $x_1, \ldots, x_n$ mit der Determinante ± 1. Wenn das System der Ungleichungen*

$$|L_i(x)| < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

keine ganzzahlige Lösung außer $x_1 = \ldots = x_n = 0$ hat, so ist mindestens ein $L_i(x)$ ganzzahlig.

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß die $L_i(x)$ bei passender Anordnung eine Koeffizientenmatrix AE haben, wobei A eine kanonische Matrix (2) und E eine ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet.*

Bemerkung. Diese „scharfe" Form von Satz 1a läßt sich trivial umkehren, denn nach obigem darf der Faktor E weggelassen werden, nach dem dann zu (3) eine Matrix (2) gehört, und dann muß für eine ganzzahlige Lösung offenbar (der Reihe nach) $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ gelten. Man bemerke auch, daß (3) gewiss noch eine ganzzahlige Lösung hat, wenn in ihm ein beliebiges „$<$" durch „$\leqq$" ersetzt wird — das ist eben ein Fundamentalsatz von MINKOWSKI, der später auch noch zur Anwendung kommen wird. Nach Minkowskis Terminologie bilden die L_i einen „Grenzfall" (seines Fundamentalsatzes), wenn die Voraussetzungen vom Satz 1a erfüllt sind, und so ist der Inhalt von diesem Satz 1a (nebst

---

[5]) I. FÁRY, Der Äquivalente des Minkowski—Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen, erscheint demnächst in den *Commentarii Math. Helvetici.*

Zusatz und der gesagten Umkehrung) im wesentlichen die Bestimmung aller „Grenzfälle".

Die Äquivalenz der Sätze 1, 1a zeigen wir erst im § 6; hier beweisen wir zunächst bloß, daß aus Satz 1a der Zusatz folgt.

Für $n=1$ ist das richtig. Im falle $n \geqq 2$ setzen wir die Richtigkeit der Behauptung für $n-1$ statt n voraus. Man darf annehmen, daß eben $L_1(x)=c_1(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)$ gilt mit ganzem c_1 (>0) und ganzen, teilerfremden $a_1,\ldots,a_n$. Bekanntlich lassen sich die $a_1,\ldots,a_n$ durch Hinzunahme weiterer Zeilen zu einer ganzzahligen unimodularen Matrix ergänzen. Hieraus folgt, daß die $L_i(x)$ durch eine geeignete ganzzahlige unimodulare homogene lineare Substitution der Variabeln x_i in gewisse Formen $L_i(x)=L'_i(y)=L'_i(y_1,\ldots,y_n)$ mit $L'_i(y)=c_1y_1$ übergehen. Dabei bleiben die Voraussetzungen vom Satz 1a auch für die L'_i (statt L_i) erfüllt, und so gilt noch mehr, daß

$$|L'_i(0,y_2,\ldots,y_n)|<1 \qquad (i=2,\ldots,n) \tag{4}$$

keine ganzzahligen Lösungen außer $y_2=\ldots=y_n=0$ hat. Dabei ist der Absolutwert der Determinante der $n-1$ Formen in (4) gleich $\frac{1}{c_1}$, und so muß nach obigem Fundamentalsatz notwendig $\frac{1}{c_1}\geqq 1$ sein, woraus $c_1 \leqq 1$, also $c_1=1$ folgt. Andererseits folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß die Koeffizientenmatrix dieser $n-1$ Formen gleich A_1E_1 ist, wobei A_1, E_1 je eine kanonische bzw. ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet, diesmal für $n-1$ statt n. Aus beiden ergibt sich, daß die Koeffizientenmatrix der $L'_i(y)$ gleich dem Produkt

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c_2 & \\ \vdots & A_1 \\ c_n & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E_1 \end{array}\right) \tag{5}$$

ist, wobei $1, c_2,\ldots,c_n$ die Koeffizienten von y_1 in den $L'_i(y)$ sind. Der erste und zweite Faktor in (5) ist kanonisch bzw. ganzzahlig unimodular. Einem ähnlichen Produkt ist dann auch die Koeffizientenmatrix der $L_i(x)$ gleich, denn beide Koeffizientenmatrizen unterscheiden sich nach obigem nur in einem rechtsseitigen ganzzahligen unimodularen Faktor. Das beweist die Richtigkeit des Zusatzes von Satz 1a (wenn nur selbst Satz 1a richtig ist).

§ 3. Satz 1b über raumzerlegende Würfelgitter.

Fortan fassen wir R_n auch als einen n-dimensionalen Raum auf ausgestattet mit Euklidischer Metrik, und entsprechend nennen wir die Vektoren $\mathfrak{x}=(x)$ auch die Punkte des R_n, insbesondere heißen $0=(0,\ldots,0)$ und $\mathfrak{e}_1=(1,\ldots,0),\ldots,\mathfrak{e}_n=(0,\ldots,1)$ auch Anfangspunkt bzw. Einheitspunkte (-vektoren). Die allereinfachsten Grundbegriffe der n-dimensionalen Geometrie, insbesondere der Theorie der konvexen Körper, setzen wir als bekannt voraus.

$V(\mathfrak{K})$ bezeichnet das Volumen eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$.

$\mathfrak{W}$ bezeichnet den Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1$. Dies hat 0 zur Ecke und die n Kantenvektoren $\mathfrak{e}_i$. Es gilt $V(\mathfrak{W}) = 1$.

Einen Untermodul $\mathfrak{P}$ von R_n nennen wir ein Punktgitter, wenn seine Punkte in keiner Hyperebene (d. h. in keiner $n-1$-dimensionalen Ebene) liegen und $\mathfrak{P}$ keinen Häufungspunkt (im Endlichen) hat.

$\mathfrak{N}$ bezeichnet das „natürliche" Punktgitter, bestehend aus allen ganzzahligen Punkten, die wir kurz Gitterpunkte (-vektoren) nennen. Es ist bekannt, daß die sämtlichen Punktgitter nichts anderes sind als die durch eine nicht ausgeartete Zentroaffinität erzeugten Bilder von $\mathfrak{N}$ („Zentroaffinität" heißt eine Affinität mit dem Fixpunkt 0). Mit anderen Worten, die Punktgitter stimmen mit den durch n Punkte erzeugten Untermoduln von R_n überein, die in keiner Hyperebene durch 0 liegen; diese n Punkte (Vektoren) bilden eine Basis des Punktgitters. Die Punktgitter $\mathfrak{P}$ lassen sich auf bekannte Weise auch durch ein (n-dimensionales) Parallelotop $\mathfrak{K}$ angeben, das nämlich 0 zur Ecke hat und dessen von 0 ausgehenden Kantenvektoren eine Basis von $\mathfrak{P}$ bilden; dann heißt $\mathfrak{K}$ ein Grundparallelotop (oder Basisparallelotop) von $\mathfrak{P}$. Rückwärts ist $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{P}$ nicht eindeutig bestimmt, aber $V(\mathfrak{K})$ hängt nur von $\mathfrak{P}$ ab; deshalb nennen wir $V(\mathfrak{K})$ die Invariante von $\mathfrak{P}$ und bezeichnen es mit $I(\mathfrak{P})$. (Offenbar haben die und nur die Punkgitter dieselbe Invariante, die durch eine volumentreue Affinität ineinander überführbar sind.)

Für einen Punkt $\mathfrak{x} (\in R_n)$ und eine Punktmenge $\mathfrak{H} (\subseteqq R_n)$ bezeichnet $\mathfrak{x} + \mathfrak{H}$ die Verschiebung von $\mathfrak{H}$ um $\mathfrak{x}$, d. h. die Menge aller Punkte $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ $(\mathfrak{y} \in \mathfrak{H})$. (Ist $\mathfrak{H}$ ein Modul, so ist $\mathfrak{x} + \mathfrak{H}$ eine Restklasse von $R_n/\mathfrak{H}$.)

Für einen Untermodul $\mathfrak{U}$ von R_n und eine Punktmenge $\mathfrak{H}$ bezeichnet $\mathfrak{U} + \mathfrak{H}$ die Menge (nicht die Vereinigungsmenge) aller Punktmengen $\mathfrak{x} + \mathfrak{H}$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{U})$. Ist dabei $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ ein (konvexer) Körper, so nennen wir $\mathfrak{U} + \mathfrak{K}$ kurz einen Körpermodul; von besonderer Wichtigkeit wird der Fall sein, in dem $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}$ ein Punktgitter ist, dann nennen wir $\mathfrak{P} + \mathfrak{K}$ ein Körpergitter. (In Spezialfällen von $\mathfrak{K}$ dürfen wir z. B. über Parallelotop- und Würfelmoduln bzw. -gitter sprechen.)

Insbesondere nennen wir $\mathfrak{N} + \mathfrak{W}$ gelegentlich das natürliche Würfelgitter. Dieses entsteht auch so, daß man den Raum mit allen Hyperebenen $x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ schneidet $(i = 1, \ldots, n)$.

Definition 1. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ (endlich oder unendlich viele) konvexe Körper paarweise ohne gemeinsamen inneren Punkt und mit der Vereinigungsmenge $\mathfrak{H}$, so nennen wir die $\mathfrak{K}_i$ eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$; ist dabei $\mathfrak{H} = R_n$, so nennen wir die $\mathfrak{K}_i$ raumzerlegend.

Als raumzerlegende Körpelmoduln $\mathfrak{U}+\mathfrak{K}$ können nur Körpergitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ in Frage kommen, und eine weitere Vorbedingung ist offenbar, daß $I(\mathfrak{P})=V(\mathfrak{K})$ gilt. Für die erste Behauptung ist nämlich klar, daß die Punkte von $\mathfrak{U}$ nicht in einer Hyperebene liegen dürfen, auch darf $\mathfrak{U}$ keinen Häufungspunkt haben.

Die in der Einleitung erwähnte, ebenfalls von MINKOWSKI vermutete Form 1b von Satz 1 bezieht sich in seiner vollen Allgemeinheit auf die raumzerlegenden Parallelotopgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$. Da aber die raumzerlegende Eigenschaft erhalten bleibt, wenn $\mathfrak{K}$ einer Verschiebung oder $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ einer nicht ausgearteten Zentroaffinität unterworfen wird, so kann man sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit z. B. auf den Fall $\mathfrak{K}+\mathfrak{W}$ beschränken. Dann lautet die genannte Form 1b von Satz 1 so:

Satz 1b. *Es bezeichne $\mathfrak{P}$ ein Punktgitter. Ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, so enthält $\mathfrak{P}$ einen Einheitsvektor* $\mathfrak{e}_i$. (Das bedeutet, daß es zwei Würfel in $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ gibt, die eine gemeinsame Seitenfläche, d. h. $n-1$-dimensionale Seite haben, wofür man kurz sagt, daß das Würfelgitter „gesäult" ist.)

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß $\mathfrak{P}$ nach passender Numerierung der Koordinaten x_i n solche Basisvektoren hat, die die Zeilen einer kanonischen Matrix (2) ausmachen.* (Offenbar entsteht dann $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ so, daß man R_n zunächst mit den Hyperebenen $x_n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ schneidet und die so erhaltenen „Parallelschichten" auf passende Art weiter in Würfel zerlegt, weshalb man sagt, daß das Würfelgitter „geschichtet" ist. Dabei müssen die in der Hyperebene $x_n=0$ liegenden Seitenflächen von den Elementen der „Würfelschicht" zwischen den Hyperebenen $x_n=0, 1$ wieder ein raumzerlegendes Würfelgitter von R_{n-1} ausmachen, und die verschiedenen „Würfelschichten" entstehen auseinander durch Verschiebungen um $i\mathfrak{a}_n$ $(i=0, \pm 1, \ldots)$, wobei $\mathfrak{a}_n$ der n-te Basisvektor von $\mathfrak{P}$ is. Durch fortgesetzte Anwendung für $n, n-1, \ldots, 2$ gewinnt man einen vollen Einblick in den „Aufbau" der raumzerlegenden Würfelgitter.)

Die Äquivalenz der Sätze 1a, 1b zeigen wir erst im § 4, hier zeigen wir bloß, daß aus Satz 1b der Zusatz folgt.

Für $n=1$ ist das klar. Im Falle $n \geqq 2$ setzen wir die Behauptung für $n-1$ statt n voraus. Man darf annehmen, daß eben $\mathfrak{e}_1 \in \mathfrak{P}$ gilt. Bilden wir R_n auf die Hyperebene $x_1=0$ ab, die ein R_{n-1} ist, so daß wir jedem Punkt (x) den Punkt $(0, x_2, \ldots, x_n)$ entsprechen lassen. Bezeichne $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{W}_1$ das Bild von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{W}$. Es ist klar, daß $\mathfrak{P}_1$ ein Untermodul von R_{n-1} ist, weiter ist $\mathfrak{W}_1$ der durch $x_1=0$, $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i=2, \ldots, n)$ definierte Würfel in R_{n-1}. Somit ist das Bild $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}_1$ von $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ ein Würfelmodul in R_{n-1}. Andererseits läßt sich $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ in Klassen einteilen, so daß man eine Klasse jedesmal mit einem festen $\mathfrak{x}\ (\in \mathfrak{P})$ aus den Würfeln $(\mathfrak{x}+k\,\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{W}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ bildet. Die Punkte aller Würfel dieser Klasse werden auf einen und denselben Würfel $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{W}_1$ abgebildet, wobei nämlich $\mathfrak{x}_1$ das Bild von $\mathfrak{x}$ ist; es ist auch klar, daß zwei solche $n-1$-dimensionale Würfel, wenn sie verschiedenen Klassen entsprechen, keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Folglich ist $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}_1$ raumzerlegend (in R_{n-1}), woraus auch folgt, daß (der Modul $\mathfrak{P}_1$ ein Punktgitter, d. h.) $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}$ ein raumzerlegendes Würfelgitter in R_{n-1} ist. Nach der Voraussetzung hat dann $\mathfrak{P}_1$ eine Basis von der Form

$$\mathfrak{b}_1=(0, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{b}_{n-1}=(0, a_{n-1,1}, \ldots, 1).$$

Jedes $\mathfrak{b}_i$ ist das Bild von einem $\mathfrak{a}_i\ (\in\mathfrak{P})$, wobei dann $\mathfrak{a}_i$ sich nur in der ersten Koordinate von $\mathfrak{b}_i$ unterscheidet. Bezeichne $\mathfrak{D}$ das durch $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$ erzeugte Punktgitter des R_n. Offenbar gilt $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{P}$, $I(\mathfrak{D})=I(\mathfrak{P})=1$ und dies ist bekanntlich nur mit $\mathfrak{D}=\mathfrak{P}$ verträglich. Da also $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$ Basisvektoren von $\mathfrak{P}$ sind und sie eine kanonische Matrix bilden, so haben wir bewiesen, daß aus Satz 1b der angefügte Zusatz folgt.

§ 4. Beweis der Äquivalenz der Sätze 1a, 1b.

Wir zeigen, daß Satz 1a mit Satz 1b äquivalent ist. Die Voraussetzung von Satz 1a läßt sich so aussagen, daß das Parallelotop

$$|L_i(x)|\leqq 1 \qquad (i=1, \ldots, n)$$

keinen Gitterpunkt $(\neq 0)$ im Innern enthält. Da dieses Parallelotop das Volumen 2^n hat, so bedeutet das Gesagte, nach einem bekannten Satz von Minkowski, eben, daß das aus dem durch

$$|L_i(x)|\leqq\frac{1}{2} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

definierten Parallelotop $\mathfrak{K}$ entspringende Parallelotopgitter $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$ raumzerlegend ist. Daran wird nichts geändert, wenn man $\mathfrak{K}$ von vornherein durch

$$0\leqq L_i(x)\leqq 1 \qquad (i=1, \ldots, n)$$

definiert, denn das bewirkt bloß eine Verschiebung von $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$. Auch darf $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$ der Affinität

$$y_i=L_i(x) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{6}$$

unterworfen werden, wobei (y) das Bild von (x) ist. Dabei geht $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{N}$ in ein Punktgitter $\mathfrak{P}$ über. Nach obigem haben wir gewonnen, daß sich Satz 1a (mit Berücksichtigung des Zusatzes) so aussprechen läßt: Ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, so haben die $L_i(x)$ bei passender Anordnung eine Koeffizientenmatrix AE, wobei A, E eine kanonische bzw. ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet.

Setzt man in (6) der Reihe nach $(x) = \mathfrak{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ein, so liefern die (y) eine Basis von $\mathfrak{P}$, diese besteht dann nach obigem aus den Spaltenvektoren von AE, d. h. aus den Zeilenvektoren von $E'A'$ (bei Matrizen bezeichnet der Strich „′" die Spiegelung an der Hauptdiagonale). Das Auftreten des (linksseitigen) Faktors E' bewirkt bloß eine Basistransformation (von $\mathfrak{P}$), und ist somit unwesentlich. Weiter hat A' die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies unterscheidet sich von einer kanonischen Matrix bloß in der Reihenfolge der Zeilen und (der Koordinanten, d. h.) der Spalten, worauf es nicht ankommt, und so spricht sich Satz 1a nach obigem so aus: Ist $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ raumzerlegend, so hat $\mathfrak{P}$ eine Basis bestehend aus den Zeilenvektoren einer kanonischen Matrix. In der Tat stimmt dies mit dem (durch seinen Zusatz verschärften) Satz 1b überein. Bedenkt man noch, daß in Satz 1a eben diejenigen $L_i(x)$ zu berücksichtigen waren, für die die Affinität (6) unimodular ist, d. h. für die $I(\mathfrak{P}) = 1$ ausfällt, und daß andererseits auch im Satz 1b eben nur alle $\mathfrak{P}$ mit $I(\mathfrak{P}) = 1$ in Frage kommen, so hat man die behauptete Äquivalenz der Sätze 1a, 1b bewiesen.

§ 5. Halboffene Polyeder.

Die im folgenden einzuführenden „halboffenen" Polyeder scheinen in der Theorie der konvexen Körper im allgemeinen gut verwendbar zu sein. In dieser Arbeit werden davon nur die halboffenen Parallelotope zur Anwendung kommen. Zunächst definieren wir:

D e f i n i t i o n 2. Man sage, daß die (endlich oder unendlich vielen) Punktmengen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ eine Punktmenge $\mathfrak{H}$ schlicht überdecken, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ in genau einem $\mathfrak{H}_i$ liegt.

Man bemerke, daß die $\mathfrak{H}_i$ mit $\mathfrak{H}$ zusammen auch jede Teilmenge von $\mathfrak{H}$ schlicht überdecken.

Für uns wird ein wichtiges Beispiel eine (volle) Schar paralleler Geraden, diese überdeckt den Raum schlicht.

D e f i n i t i o n 3. Bezeichne $\mathfrak{K}$ einen konvexen Körper mit inneren Punkten und durchlaufe g alle Elemente einer gerichteten parallelen Geradenschar, die zu keiner Seitenfäche von $\mathfrak{K}$ parallel ist. Man nehme alle (gerichteten) Strecken, die beim Schneiden von g durch $\mathfrak{K}$ entstehen, behalte von den beiden Endpunkten nur den Anfangspunkt und bilde die Vereinigungsmenge $\overline{\mathfrak{K}}$ dieser halboffenen Strecken. Man nenne $\overline{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyeder.

Bemerkung. Man könnte in dieser Definition auch den Fall von zu einer Seitenfläche von $\mathfrak{K}$ parallelen Geradenscharen zulassen, indem dann die Grenzpunkte von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit je einer passenden Multiplizität $\frac{1}{2^k}$ versieht ($k = 0, 1, \ldots$), so daß dabei der unten folgende Satz 2 gültig bleibt. Auch könnte man die Definition auf die nichtkonvexen Polyeder erstrecken.

Zu jedem $\mathfrak{K}$ gehören endlich viele halboffene Polyeder $\bar{\mathfrak{K}}$; umgekehrt wird durch $\bar{\mathfrak{K}}$ ein $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt.

Insbesondere entstehen aus einem Parallelotop $\mathfrak{K}$ alle halboffenen Parallelotope $\bar{\mathfrak{K}}$ offenbar auch so, daß man von der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ alle Seitenflächen entfernt, die einer festen Ecke von $\mathfrak{K}$ gegenüberliegen[6]; ihre Zahl ist somit 2^n, jedes von ihnen ist durch $\mathfrak{K}$ und seine (einzige) Ecke eindeutig bestimmt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Punktgitter oder ein Untermodul von R_n und $\bar{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyeder, so nennen wir $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyedergitter bzw. einen solchen Polyedermodul und beweisen den folgenden

Satz 2. *Ist das Polyedergitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ raumzerlegend, so überdeckt jedes halboffene Polyedergitter $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$ den Raum schlicht.*

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 2 ist trivial auch richtig. In dieser Arbeit wird Satz 2 bloß die Rolle eines Hilfssatzes erfüllen, aber er scheint uns mit Recht ein „Satz" genannt werden zu dürfen[7].

Zum Beweis von Satz 2 betrachte man eine gerichtete Gerade g, die zu keiner Seitenfläche von $\mathfrak{K}$ parallel ist. Schneidet man g mit den Polyedern des $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$, so entsteht eine Zerlegung von g in gerichtete Strecken. Die aus ihnen mit dem Beibehalten des Anfangspunktes entstandenen halboffenen Strecken überdecken g offenbar schlicht. Berücksichtigt man gleichzeitig alle Elemente der zu g parallelen und gleichgerichteten Geradenschar, so überdecken die so entstandenen halboffenen Strecken den Raum schlicht. Faßt man also jedesmal diejenigen halboffenen Strecken zusammen, die einem Polyeder von $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ angehören und bildet ihre Vereinigungsmenge, so bekommt man wieder eine schlichte Überdeckung von R_n. Andererseits sind diese Vereinigunsmengen nach Definition 3 eben die Elemente eines halboffenen Polyedergitters $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$; dabei darf $\bar{\mathfrak{K}}$ beliebig gewählt werden, denn das kommt bloß auf die passende Wahl von g an. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

---

[6] Das ist die übliche Definition der halboffenen Parallelotope.

[7] Insbesondere für ein Parallelotop $\mathfrak{K}$ kommt Satz 2 auch bei früheren Autoren vor, aber einem Beweis konnte ich in der Literatur nicht auf die Spur kommen. Mir scheint, daß der oben folgende Beweis auch für diesen Spezialfall der denkbar einfachste ist. Übrigens ließe sich Satz 2 für jede (nicht nur „gitterförmige") Zerlegung des Raumes verallgemeinern ohne eine Änderung des Beweises.

§ 6. Beweis der Äquivalenz der Sätze 1, 1b.

Hier verwenden wir Satz 2 zunächst, um die Äquivalenz der Sätze 1, 1b nachzuweisen. Man kann Satz 1b wegen Satz 2 so aussprechen: Überdeckt das halboffene Würfelgitter $\mathfrak{P}\dot{+}\overline{\mathfrak{W}}$ den Raum schlicht, so enthält $\mathfrak{P}$ einen Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$. Die Voraussetzung dieses Satzes besagt, daß jeder Punkt von R_n eindeutig in der Form $\mathfrak{a}+(x)$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}$, $(x)\in\overline{\mathfrak{W}})$ schreiben läßt. Dabei war gleichgültig, welchen der zu $\mathfrak{W}$ gehörigen halboffenen Würfel $\overline{\mathfrak{W}}$ man gewählt hat; stillschweigend definieren wir $\overline{\mathfrak{W}}$ immer durch (1) (so daß also $\overline{\mathfrak{W}}$ die Ecke 0 enthält). Dann lautet die vorige Voraussetzung so: In jeder Restklasse von $R_n/\mathfrak{P}$ liegt ein einziger Punkt (x) mit der Eigenschaft (1). Dies stimmt mit der Voraussetzung von Satz 1 überein, denn in diesem Satz 1 kommt offenbar nur ein solcher Untermodul $\mathfrak{U}$ von R_n in Frage, der ein Punktgitter ist. In der Tat ist also Satz 1b äquivalent mit Satz 1.

Aus dem Zusatz von Satz 1b folgt dann auch der Zusatz von Satz 1.

Zusammenfassend haben wir bisher bewiesen, daß alle drei Sätze 1, 1a, 1b äquivalent sind und aus ihnen auch die ihnen angefügten Zusätze folgen.

§ 7. Zurückführung von Satz 1b auf rationale Würfelgitter.

Als Vorbereitung zeigen wir: Ist U ein durch endlichviele Elemente erzeugter Untermodul der reellen Zahlen mit mindestens einem irrationalen Element, so zerlegt sich U in eine direkte Summe

$$U=U_0+(\vartheta) \tag{7}$$

von zwei Untermoduln U_0, (ϑ), wobei U_0 alle rationalen Elemente von U enthält, ϑ eine irrationale Zahl ist und (ϑ) den aus allen $i\vartheta\,(i=0,\pm 1,\ldots)$ bestehenden „eingliedrigen" Modul bezeichnet.

Bekanntlich läßt sich nämlich U in eine direkte Summe $U=$ $=U_1+\ldots+U_r$ $(r\geqq 1)$ von eingliedrigen Moduln U_i zerlegen. Hieraus folgt auch, daß der Untermodul aller rationalen Elemente von U eingliedrig oder 0 ist, und so läßt sich bekanntlich voraussetzen, daß U_1 alle rationalen Elemente von U enthält. Gewiß liegt in U_r kein rationales Element $(\neq 0)$, denn dann müßte $U_r=U_1$, also $r=1$, $U=U_1$ sein, und das ergibt den Widerspruch, daß ein eingliedriger Modul eine rationale Zahl $(\neq 0)$ und auch eine irrationale Zahl enthält. Folglich ist $U_0=U_1+\ldots+U_{r-1}$, $(\vartheta)=U_r$ eine gewünschte Lösung von (7).

Wir behaupten den folgenden[8]).

[8]) Hilfssatz 1 hat zuerst Th. Schmidt bewiesen (s. hierüber Hajós [1])). Hajós [1]) bewies einen allgemeineren Satz über „mehrfach raumbedeckende Würfelgitter"; obiger Beweis ist kürzer und gilt auch für diesen Hajósschen Satz.

Hilfssatz 1. *Ist Satz* 1b *für rationale Würfelgitter richtig, so ist er allgemein richtig.*

Betrachten wir ein nichtrationales Punktgitter $\mathfrak{P}$ mit den Elementen

(8) $$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n),$$

wofür das Würfelgitter $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ raumzerlegend ist. Man darf annehmen, daß eben der Modul U aller a_1 nicht rational ist. Dann gilt für U eine Darstellung (7), und so läßt sich (8) in der Form

(9) $$\mathfrak{a} = (a + k\vartheta, a_2, \ldots, a_n) \qquad (a \in U_0,\ k = 0, \pm 1, \ldots)$$

schreiben, wobei a und k durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt sind.

Ersetzen wir ϑ durch eine reelle Variable t und schreiben dann $\mathfrak{a}(t)$ für $\mathfrak{a}$, so folgt aus dem gesagten sofort, daß auch die $\mathfrak{a}(t)$ bei jedem festen Wert $(\neq 0)$ von t einen Untermodul von R_n bilden, den wir entsprechend mit $\mathfrak{P}(t)$ bezeichnen.

Von dieser Bemerkung machen wir erst später Gebrauch, jetzt betrachten wir weiter das ursprüngliche $\mathfrak{P}$. Die $\mathfrak{a}$ in (9) mit festem k fassen wir in eine Menge $\mathfrak{P}_k$ zusammen; diese $\mathfrak{P}_k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ bilden eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{P}$.

Nach Satz 1 überdeckt $\mathfrak{P} + \overline{\mathfrak{W}}$ den Raum schlicht. Bezeichnet also h eine Gerade parallel zur x_1-Achse, so wird jedenfalls auch h durch $\mathfrak{P} + \overline{\mathfrak{W}}$ überdeckt. Das bedeutet, daß die Gerade h durch die sie schneidenden $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{W}}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{P})$ in lauter halboffene Strecken von der Länge 1 zerlegt wird, die nämlich h ebenfalls schlicht überdecken. Dann müssen die ersten Koordinaten a_1 in (8) der entsprechenden $\mathfrak{a}$ eine volle Restklasse mod 1 ausmachen. Die Differenz von zwei solchen a_1 ist dann also (ganz) rational. Nun ist nach (9) die Differenz der ersten Koordinaten von zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{P}_k$ gewiß von der Form $a_1 + k_1\vartheta$ $(a_1 \in U_0;\ k_1 \neq 0)$, also nach (7) jedenfalls nicht rational. Nach dem vorigen bedeutet dies, daß diejenigen $\mathfrak{a}$ $(\in \mathfrak{P})$ in eine feste Klasse $\mathfrak{P}_k$ gehören müssen, für die die Gerade h durch die zugehörigen $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{W}}$ (schlicht) überdeckt wird.

Wenn man nun $\vartheta = t$ variieren läßt, so bedeutet für jedes $\mathfrak{P}_k$ nach (9) eine Änderung von t bloß eine Verschiebung parallel zur x_1-Achse, und so bleibt h durch die vorherbetrachteten $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{W}}$ nach wie vor dieser Änderung schlicht überdeckt. Das bezieht sich auf alle Geraden h parallel zur x_1-Achse, und so haben wir bekommen, daß $\mathfrak{P}(t) + \overline{\mathfrak{W}}$ den Raum für jedes t $(\neq 0)$ schlicht überdeckt, d. h. $\mathfrak{P}(t) + \mathfrak{W}$ raumzerlegend ist. (Nebenbei bemerkt muß das aus Stetigkeitsgründen auch für $t = 0$ gelten.) Aus diesem Resultat folgt auch, daß der Modul $\mathfrak{P}(t)$ notwendig ein Punktgitter sein muß.

Um endlich den Beweis von Hilfssatz 1 zu gewinnen, nehmen wir an, daß Satz 1b für das betrachtete $\mathfrak{P}$ falsch ist, d. h. daß $\mathfrak{P}$ kein $\mathfrak{e}$ enthält. Wegen der Annahme folgt aus Stetigkeitsgründen, daß es ein rationales t gibt, wofür $\mathfrak{P}(t)$ ebenfalls kein $\mathfrak{e}_i$ enthält. Da nun $\mathfrak{P}(t)+\mathfrak{W}$ raumzerlegend ist, so muß wegen der Voraussetzung des Satzes 1b $\mathfrak{P}(t)$ nichtrational sein, und dann läßt sich das Verfahren mit $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}(t)$ statt $\mathfrak{P}$ wiederholen. Es bestand aber dieses Verfahren darin, daß man das irrationale ϑ in (9) durch ein passendes rationales t ersetzt hat, und da die a_i in (8) bei jedem i einen durch endlich viele (nämlich durch höchstens n) Basiselemente erzeugbaren Modul bilden, so ist es klar, daß man in endlich vielen Schritten trotzdem bei einem rationalen Punktgitter ankommen muß. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 1.

§ 8. Zuordnung eines endlichen Moduls zu einem rationalen Punktgitter.

Eine überaus wichtige Wendung des Beweisverfahrens von HAJÓS besteht nun darin, daß man jedem rationalen Punktgitter $\mathfrak{P}$ einen endlichen Modul zuordnen kann, in dem sich die (uns interessierenden) Eigenschaften von $\mathfrak{P}$ glücklich spiegeln. Mit Beibehaltung seiner Grundideen verfahren wir viel kürzer und gruppieren die bezüglichen Tatsachen in leichterer Zusammenstellung in den unten folgenden Hilfssätzen 2, 3.

Wir fangen es mit folgender Definition an:

Definition 4. Ist M ein endlicher Modul ($\neq 0$) und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ solche Elemente von M, daß die

$$(10)\qquad k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n \qquad (k_i=0,\ldots,e_i-1\,;\ e_i\geqq 2,\ i=1,\ldots,n)$$

alle verschiedenen Elemente von M sind, so nennen wir die α_i ein Hajóssches System (für M).

In diesem Paragraphen bezeichne $\mathfrak{Q}$ das (rationale „achsenparallele") Punktgitter mit den n Basisvektoren

$$(11)\qquad \mathfrak{t}_i=\frac{1}{e_i}\mathfrak{e}_i \qquad (i=1,\ldots,n),$$

wobei die ganzen Zahlen $e_i(\geqq 2)$ beliebig sein dürfen.

Hilfssatz 2. *Zu jedem rationalen Punktgitter $\mathfrak{P}$ gibt es ein $\mathfrak{Q}\,(\supset\mathfrak{P})$. Man setze $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$,*

$$(12)\qquad \alpha_i=\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P},$$

wobei dann M ein endlicher (Restklassen-) Modul und $\alpha_i\in M$ ist. Weiter gelten:

Dann und nur dann ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, wenn die α ein Hajóssches System bilden.

Dann und nur dann gilt $\mathfrak{e}_i \in \mathfrak{P}$, *wenn* $e_i \alpha_i = 0$ *ist.*

Hilfssatz 3. *Ist* M' *ein endlicher Modul mit dem Hajósschen Elementensystem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *und den „zugehörigen Zahlen"* $e_1, \ldots, e_n$, *so gibt es einen Untermodul* $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{O}$, *wofür der Restklassenmodul* $M = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ *isomorph zu* M' *und dabei* $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{P}$ *und* $\alpha_i (i = 1, \ldots, n)$ *je ein entsprechendes Elementenpaar ist.*

Da $\mathfrak{P}$ eine endliche Basis hat, so lassen sich die i-ten Koordinaten seiner Punkte mit einem Generalnenner e_i schreiben, wobei man $e_i \geqq 2$ annehmen darf, und so ist die erste Behauptung von Hilfssatz 2 richtig.

Man bezeichne mit $\mathfrak{K}$ das Parallelotop

$$0 \leqq x_i \leqq \frac{1}{e_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Aus (11) folgt, daß die Parallelotope

$$(k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n) + \mathfrak{K} \qquad (k_i = 0, \ldots, e_i - 1\,;\, i = 1, \ldots, n)$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{W}$ bilden. Folglich ist $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ dann und nur dann raumzerlegend, wenn diejenigen $\mathfrak{x} + \mathfrak{K}$ eine Zerlegung von R_n bilden, in denen $\mathfrak{x}$ alle Elemente der Punktmengen

$$(13) \qquad (k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n) + \mathfrak{P} \qquad (k_i = 0, \ldots, e_i - 1\,;\, i = 1, \ldots, n)$$

durchläuft. Andererseits ist $\mathfrak{K}$ ein Grundparallelotop von $\mathfrak{O}$, und so ist $\mathfrak{O} + \mathfrak{K}$ eine Zerlegung von R_n. Aus beiden folgt, daß $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ dann und nur dann raumzerlegend ist, wenn die genannten $\mathfrak{x} + \mathfrak{K}$ (die ja alle in $\mathfrak{O} + \mathfrak{K}$ gehören) eben $\mathfrak{O} + \mathfrak{K}$ ausmachen, d. h. wenn die Punktmengen (13) paarweise fremd sind und $\mathfrak{O}$ zur Vereinigungsmenge haben. Mit anderen Worten heißt das, daß (13) alle verschiedenen Restklassen von $(M =)$ $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ liefert. Mit der Bezeichnung (12) nimmt (13) die Form (10) an, und so ist die Richtigkeit der zweiten Behauptung im Hilfssatz 2 bestätigt worden.

Wegen (11), (12) schreibt sich „$\mathfrak{e}_i \in \mathfrak{P}$" als „$e_i \mathfrak{t}_i \in \mathfrak{P}$", d. h. als „$e_i \alpha_i = 0$", womit wir Hilfssatz 2 bewiesen haben.

Zum Beweis vom Hilfssatz 3 bilde man $\mathfrak{O}$ homomorph auf M' ab, so daß man dem Element

$$k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n \qquad (k_i = 0, \pm 1, \ldots\,;\, i = 1, \ldots, n)$$

von $\mathfrak{O}$ das Element

$$(16) \qquad k_1 \alpha_1 + \ldots + k_n \alpha_n$$

von M' zuordnet. Man bezeichne mit $\mathfrak{U}$ den Untermodul der auf die 0 abgebildeten Elemente. Dann besteht zwischen $\mathfrak{O}/\mathfrak{U}$ und M' eine Isomorphie, wobei $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{U}$ und α_i einander entsprechen $(i = 1, \ldots, n)$. Aus der Endlichkeit von M' folgt auch, daß $\mathfrak{U}$ ein (rationales) Punktgitter $\mathfrak{P}$ ist, womit wir Hilfssatz 3 bewiesen haben.

§ 9. Satz 1c von Hajós über die endlichen Abelschen Gruppen.

Aus den Hilfssätzen 1, 2, 3 wird leicht eine weitere äquivalente Form der Sätze 1, 1a, 1b entstehen, wobei es sich nur noch um einen endlichen Modul handeln wird. Das werden wir den Satz von Hajós nennen, der ihn aufgestellt und bewiesen hat; und diesen später unten (multiplikativ geschrieben) mit „Satz 1c" bezeichnen. Da nun Satz 1c insbesondere mit Satz 1 äquivalent ist, so wollen wir schon im voraus betonen, wie das interessant sei, daß sich die im Satz 1 ausgedrückte Struktureigenschaft des unendlichen Moduls R_n einer ebenfalls strukturellen Eingenschaft aller endlichen Moduln (Abelschen Gruppen) gleichkommt. Als eine zweite große Überraschung des ganzen Fragenkomplexes bleibt noch übrig, daß sich auch dieser scheinbar einfache („endliche") Satz 1c für sehr tiefliegend erwies.

Wir zeigen, daß Satz 1b mit folgender Behauptung **A** äquivalent ist (dieses **A** wird in multiplikativer Form eben der Satz 1c von Hajós, s. unten).

A. *Sind die*

$$(14)\qquad k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n \qquad (k_i=0,\ldots,e_i-1\,;e_i\geqq 2\,;\,i=1,\ldots,n)$$

alle verschiedenen Elemente eines endlichen Moduls M, so gibt es ein α_i *mit* $e_i\alpha_i=0$.

Bemerkung. Wegen der Voraussetzung gilt $k_i\alpha_i\neq 0$ ($k_i=1,\ldots, e_i-1$), und so bedeutet „$e_i\alpha_i=0$" dasselbe wie „α_i hat die Ordnung e_i". Nehmen wir zuerst an, daß **A** richtig ist. Dann folgt aus Hilfssatz 2 sofort die Richtigkeit von Satz 1b für jedes rationale Punktgitter $\mathfrak{P}$, also wegen Hilfssatz 1 auch allgemein.

Nehmen wir umgekehrt an, daß **A** falsch ist. Dann gibt es einen endlichen Modul M', für den die Voraussetzung von **A** (mit M' statt M) erfüllt ist, und $e_i\alpha_i\neq 0$ ($i=1,\ldots,n$) gilt. Nach Hilfssatz 3 bestimme man ein rationales Punktgitter $\mathfrak{P}$ ($\subset\mathfrak{Q}$), so daß $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$ und M' isomorph sind und dabei $\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}$ und α_i ($i=1,\ldots,n$) einander entsprechen. Hiernach überträgt sich das vorige auf $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$ so: Die $\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}$ bilden ein Hajóssches System (für M) und jedes $e_i\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}=\mathfrak{e}_i+\mathfrak{P}$ ist von der Hauptklasse $\mathfrak{P}$ verschieden ($i=1,\ldots,n$). Wegen Hilfssatz 2 läßt sich statt dieses sagen: $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ ist raumzerlegend und kein $\mathfrak{e}_i$ liegt in $\mathfrak{P}$ ($i=1,\ldots,n$). Dies besagt, daß Satz 1b falsch ist, womit wir die Äquivalenz von Satz 1b und **A** bewiesen haben.

Um nunmehr **A** gleich eine elegante multiplikative Form zu geben (die sich auch dem Beweis gut anpaßt), vereinbaren wir uns in den folgenden.

Bezeichne G eine (multiplikative) endliche Abelsche Gruppe mit dem Einselement 1. Es werde stets $G \neq 1$ angenommen. Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Elemente von G.

$O(x)$ bezeichne die Ordnung von x, wobei x ein Element oder eine Untergruppe von G sein darf.

Einen Komplex von der speziellen Form

(15) $$[\alpha]_e = 1, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1} \qquad (O(\alpha) \geqq e \geqq 2)$$

nennen wir ein (e-gliedriges) Simplex. Dabei sind also die Elemente $1, \ldots, \alpha^{e-1}$ stets verschieden (insbesondere muß $\alpha \neq 1$ sein). Es ist klar, daß das Simplex (15) dann und nur dann eine Gruppe ist, wenn $O(\alpha) = e$ gilt. Einfachheitshalber schreiben wir auch $[\alpha]$ für $[\alpha]_e$, wenn aber zwei $[\alpha], [\beta]$ nebeneinander verwendet werden, so soll das keineswegs bedeuten, daß die Gliederzahlen gleich sind.

Schreibt man nun (14) multiplikativ, so entsteht offenbar das Produkt der Komplexe $[\alpha_i] = [\alpha_i]_{e_i}$. Folglich lautet nach **A** und der diesem angefügten „Bemerkung" der schon oben angekündigte, mit Satz 1b äquivalente gruppentheoretische Satz von Hajós so:

Satz 1c. *Gilt für eine endliche Abelsche Gruppe G eine „Simplexzerlegung"*

(16) $$G = [\alpha_1] \ldots [\alpha_n],$$

so ist einer der Faktoren eine Gruppe. (Man nenne (16) auch eine Hajóssche Zerlegung.)

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß bei passender Numerierung der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Ordung der durch die $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ erzeugten Gruppe gleich $e_1 \ldots e_i$ ist $(i = 1, \ldots, n)$, wobei e_i die Gliederzahl von $[\alpha_i]$ bezeichnet.*

Bemerkung. Diese „scharfe" Form von Satz 1c läßt sich trivial umkehren. Der Zusatz (von Satz 1c) ließe sich sehr leicht beweisen, wir nehmen aber davon Abstand, weil wir uns mit ihm in einer anderen Arbeit ausführlich beschäftigen werden, wobei unter anderem eine weitere „Verschärfung" von Satz 1c entstehen wird.

Ich verweise wieder auf meine Arbeit[4]), deren einziger Inhalt der Beweis von Satz 1c ist, womit sich dann auch der Beweis der Sätze 1, 1a, 1b schließen wird.

(Eingegangen am 10. November 1948.)

Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte.

Von STEFAN FENYŐ in Budapest.

1. $M(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein *Mittelwert* (oder eine Mittelwertfunktion, kurz ein Mittel), definiert im Bereich $a \leqq x_i \leqq b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wenn er den folgenden Bedingungen genügt:

a) $M(x_1, \ldots, x_n)$ ist stetig und streng monoton in sämtlichen Variabeln, d. h. es ist

$$|M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - M(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\xi_k - x_k| < \delta$$

und

$$M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) < M(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \text{ falls } \xi_k < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

b) $M(x, x, \ldots, x) = x$;

c) M ist symmetrisch in seinen Variabeln;

d) $\min x_i < M(x_1, \ldots, x_n) < \max x_i$.

Im folgenden soll die Existenz der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung vorausgesetzt werden.

Ein Mittelwert wird *quasiarithmetisch* genannt, falls eine stetige und monotone Funktion $\Phi(x)$ existiert, so daß die Beziehung

$$M(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{-1}\left\{\frac{\Phi(x_1) + \ldots + \Phi(x_n)}{n}\right\}$$

für sämtliche Werte x_i aus (a, b) zutrifft. Hier bedeutet Φ^{-1} die Umkehrfunktion von $\Phi(x)$. Diese Funktion $\Phi(x)$ wird die zu dem Mittel M gehörige K-N (KOLMOGOROFF—NAGUMO-) Funktion genannt[1]).

2. Die Mittelwerte

$$M^{(1)}(x_1, \ldots, x_n), M^{(2)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, M^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

seien gegeben und wir betrachten den folgenden Algorithmus, wobei

---

[1]) A. KOLMOGOROFF, Sur la notion de la moyenne, *Atti dell'Accademia dei Lincei, Rendiconti,* **12** (1930), pp. 388—391; M. NAGUMO, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Math.,* **7** (1930), pp. 71—79.

$x_{10}=x_1, x_{20}=x_2, \ldots, x_{n0}=x_n$ beliebige Ausgangswerte bezeichnen ($a \leqq x_{i0} \leqq b$; $i=1, 2, \ldots, n$):

$$x_{ik}=M^{(i)}(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, \ldots, x_{n,k-1}) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, n \\ k=1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} x_{ik}$$

für $i=1, 2, \ldots, n$ existieren, alle den gleichen Wert X haben, und daß die durch $M(x_1, \ldots, x_n)=X$ definierte Funktion eine Mittelwertfunktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Bereiche $a \leqq x_i \leqq b$ ist. Dieser Algorithmus wird als Mischalgorithmus der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)}$ bezeichnet. Die durch den Mischalgorithmus gewonnene Funktion M ist offenbar die einzige Mittelwertfunktion, die eine Lösung der Funktionalgleichung[2])

$$(1) \quad M(x_1, \ldots, x_n)= \\ =M(M^{(1)}(x_1, \ldots, x_n); M^{(2)}(x_1, \ldots, x_n); \ldots; M^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)),$$

ist.

3. Nun wird die Frage gestellt, welchen Bedingungen die Mittelwerte $M^{(i)}$ unterworfen sein müssen, damit M quasiarithmetisch ist?

Ist M quasiarithmetisch, so gilt definitionsgemäß:

$$\Phi[M(x_1, \ldots, x_n)]=\frac{\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n)}{n}.$$

Andererseits gilt nach Gleichung (1):

$$\Phi[M(x_1, \ldots, x_n)]=\frac{\Phi[M^{(1)}]+\ldots+\Phi[M^{(n)}]}{n}.$$

Wir differenzieren die Gleichung

$$(2) \qquad \Phi[M^{(1)}]+\ldots+\Phi[M^{(n)}]=\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n)$$

beiderseits zuerst nach x_i, dann nach x_j ($i \neq j$). Wir setzen zur Abkürzung

$$M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)}; \quad \frac{\partial M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}=M^{(k)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)}_{x_i};$$

$$\frac{\partial^2 M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}=M^{(k)}_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)}_{x_i x_j}$$

$$(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$$

---

[2]) Für analytische Mittelwerte s. G. Aumann, Über den Mischalgorithmus analytischer Mittelwerten, *Math. Zeitschrift*, **39** (1935), pp. 625—629. Für nichtanalytische Mittelwerte: I. Fenyő, *A középértékek elméletéről* (Inaugural-Dissertation, Budapest, 1945).

und gewinnen so

$$\Phi''[M^{(1)}]M^{(1)}_{x_i}M^{(1)}_{x_j}+\ldots+\Phi''[M^{(n)}]M^{(n)}_{x_i}M^{(n)}_{x_j}+ \\ +\Phi'[M^{(1)}]M^{(1)}_{x_ix_j}+\ldots+\Phi'[M^{(n)}]M^{(n)}_{x_ix_j}=0.$$

Es sei nun $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, dann besteht wegen[3])

$$M^{(k)}_{x_i}(x,x,\ldots,x)=\frac{1}{n}$$

die Relation

$$\Phi''(x)+n[M^{(1)}_{x_ix_j}(x,\ldots,x)+\ldots+M^{(n)}_{x_ix_j}(x,\ldots,x)]\,\Phi'(x)=0. \tag{3}$$

Wenn also die Funktion Φ existiert, dann soll sie der Differentialgleichung (3) genügen, d. h. soll

$$\Phi(x)=\int^{x}\exp\left\{-n\int^{\tau}[M^{(1)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)+\ldots+M^{(n)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)]\,dt\right\}d\tau= \\ =\int^{x}[f_1(\tau)f_2(\tau)\ldots f_n(\tau)]^{\frac{1}{n}}d\tau$$

sein, wo

$$f_k(\tau)=\exp\left[-n^2\int^{\tau}M^{(k)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)\,dt\right] \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$E(x)=\sqrt[n]{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)}.$$

Da $\Phi'(x)=E(x)$, so folgt aus (2) offenbar

$$E(M^{(1)})M^{(1)}_{x_i}+E(M^{(2)})M^{(2)}_{x_i}+\ldots+E(M^{(n)})M^{(n)}_{x_i}=E(x_i) \tag{5}$$

für $i=1,2,\ldots,n$.

Wir behaupten, daß die Bedingungen (5) zugleich hinreichend sind dafür, daß die Integralfunktion $\Phi(x)$ von $E(x)$ die K-N-Funktion des Mittelwertes M ist.

Es folgt nämlich aus (5) für die Funktion

$$d(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(M^{(1)})+\ldots+\Phi(M^{(n)})-\Phi(x_1)-\ldots-\Phi(x_n),$$

daß

$$\frac{\partial d}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

also ist $d(x_1,\ldots,x_n)$ konstant. Setzt man $x_1=x_2=\ldots=x_n$, so folgt

---

[3]) Denn aus $M^{(k)}(x,\ldots,x)=x$ folgt, daß

$$M^{(k)}_{x_1}(x,\ldots,x)+M^{(k)}_{x_2}(x,\ldots,x)+\ldots+M^{(k)}_{x_n}(x,\ldots,x)=1,$$

und wegen der Symmetrie ist

$$M^{(k)}_{x_i}(x,\ldots,x)=M^{(k)}_{x_j}(x,\ldots,x).$$

aus b), daß diese Konstante gleich Null ist. Also hat man

$$\Phi(M^{(1)}) + \ldots + \Phi(M^{(n)}) = \Phi(x_1) + \ldots + \Phi(x_n).$$

Die quasiarithmetische Mittelwertfunktion

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{n}(\Phi(x_1) + \ldots + \Phi(x_n))\right]$$

genügt also der Funktionalgleichungen (1), folglich ist sie gleich $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Wir bemerken noch, daß, wenn $M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}$ quasiarithmetische Mittelwerte sind, so sind die unter (3) angegebenen Funktionen die Ableitungen der K-N Funktionen der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)}$.[4]) Also ist in diesem Falle die Ableitung der K-N Funktion des Resultates des Mischalgorithmus, das geometrische Mittel der Ableitungen der K-N Funktionen der Mittelwerte $M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}$. Wir erhielten also den folgenden

Satz. *Dafür, daß das Resultat des Mischalgorithmus der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)}$ ein quasiarithmetisches Mittel sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$E(M^{(1)})\, M^{(1)}_{x_i} + \ldots + E(M^{(n)})\, M^{(n)}_{x_i} = E(x_i)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Dabei ist

$$E(x) = \exp\left\{-n \int^{x} [M^{(1)}_{x_p x_q}(t, \ldots, t) + \ldots + M^{(n)}_{x_p x_q}(t, \ldots, t)]\, dt\right\}$$
$$(p, q = 1, 2, \ldots, n \text{ beliebig}; \; p \neq q).$$

Zusatz: *Sind $M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}$ quasiarithmetische Mittelwerte, sind weiter die Ableitungen ihrer monoton wachsenden K-N Funktionen gleich $F_1'(x), \ldots, F_n'(x)$, so ist die Ableitung der K-N Funktion von M (falls sie existiert) gleich*

$$E(x) = \sqrt[n]{F_1'(x) \ldots F_n'(x)}.$$

4. Wir müssen noch eine Frage klären. Bei der Bildung der Funktion $E(x)$ betrachteten wir die zweiten partiellen Ableitungen der gegebenen Mittelwerte nach x_p und x_q und wir bezeichneten mit p und q beliebige ganze Zahlen ($p \neq q$) zwischen 1 und n. Es wäre nun denkbar, daß die so definierte Funktion $E(x)$ nicht eindeutig bestimmt ist,

---

[4]) J. Aczél—St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta*, **11** (1948), pp. 239—245.

Dieser Fall ist mit unseren Annahmen unverträglich. Aus der Symmetrie der gegebenen Mittelwerte folgt nämlich

$$M_{x_1}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = M_{x_p}^{(k)}(x_p, x_2, \ldots, x_1, \ldots, x_n).$$

Differenzieren wir beiderseits nach x_q $(q \neq p)$, so ergibt sich

$$M_{x_1 x_q}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = M_{x_p x_q}^{(k)}(x_p, \ldots, x_1, \ldots, x_n).$$

Ist hier $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t$, so ist

$$M_{x_1 x_q}^{(k)}(t, \ldots, t) = M_{x_p x_q}^{(k)}(t, \ldots, t) \qquad (k, p, q = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus $b)$ erhält man

$$M_{x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) = \frac{1}{n},$$

woraus sich

$$M_{x_1 x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) + M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t) + \ldots + M_{x_1 x_n}^{(k)}(t, \ldots, t) = 0$$

ergibt. Nun ist nach der vorigen Feststellung

$$M_{x_1 x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t)$$

und ähnlich gilt

$$M_{x_2 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t),$$

u. s. w. Also ist

$$M_{x_i x_i}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_p x_q}^{(k)}(t, \ldots, t)$$

von i, p und q unabhängig, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

5. Schließlich betrachten wir einige typischen Beispiele, welche auf manche interessante Erscheinungen hinweisen.

I. Es sei

$$M^{(1)}(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad M^{(2)}(x_1, x_2) = H(x_1, x_2) = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

A und H sind quasiarithmetisch, ihre K-N Funktionen sind

$$F_1(x) = x \quad \text{und} \quad F_2(x) = -\frac{1}{x}$$

und es gilt

$$F_1'(x) = f_1(x) = 1; \quad F_2'(x) = f_2(x) = \frac{1}{x^2}; \quad E(x) = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}.$$

Nun ist $E(A) A_{x_1} + E(H) H_{x_1} = E(x_1)$, also ist das Resultat des

Mischalgorithmus von A und H quasiarithmetisch; seine K-N Funktion ist

$$\Phi(x) = \int E(x)\, dx = \log x.$$

Die Umkehrfunktion von $\Phi(x)$ ist e^x, also ist

$$M(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) = e^{\frac{\log x_1 + \log x_2}{2}} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Der gesuchte Mittelwert ist also das geometrische Mittel von x_1 und x_2. In diesem Falle waren die ursprünglich angenommenen Mittelwerte und auch des Resultat quasiarithmetisch.

II. Es sei

$$M^{(1)}(x_1, x_2) = H(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2};\; M^{(2)}(x_1, x_2) = K(x_1, x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}.$$

Hier ist

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2};\; f_2(x) = \exp\left[-4\int^x K_{x_1x_2}(t, \ldots, t)\, dt\right] = x^2;\; E(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}.x^2} = 1.$$

Also gilt

$$E(H)H_{x_1} + E(K)K_{x_1} = \frac{2x_2^2}{(x_1+x_2)^2} + 1 - \frac{2x_2^2}{(x_1+x_2)^2} = 1 = E(x_1).$$

Das mit dem Mischalgorithmus gewonnene Mittel ist also auch quasiarithmetisch und zwar ist es eben das arithmetische Mittel von x_1 und x_2. Denn es ist

$$\Phi(x) = \int E(x)\, dx = x, \quad \text{also} \quad M(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Das merkwürdige an diesem Beispiele ist, daß obzwar einer der gegebenen Mittel — das antiharmonische — nicht quasiarithmetisch ist, das Resultat doch quasiarithmetisch wird.

III. Es kann auch vorkommen, daß obzwar keiner der gegebenen Mittelwerte quasiarithmetisch ist, das durch den Mischalgorithmus gewonnene Mittel doch quasiarithmetisch ist. Z. B.

$$M^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2};\; M^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2};\; M(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

IV. Als letztes Beispiel zeigen wir die Umkehrung dieser letzten Behauptung. Das durch den Mischalgorithmus gewonnene Mittel kann nämlich auch ein nichtquasiarithmetisches sein, selbst wenn die Ausgangsmittel quasiarithmetisch sind. Z. B.

$$M^{(1)}(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{2};\; M^{(2)}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Dann ist $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$, $E(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, und

$$E(A)A_{x_1}+E(G)G_{x_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1+x_2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x_1 x_2}}\cdot\frac{x_2}{2\sqrt{x_2}}$$

ist von x_2 nicht unabhängig, also ist das aus A und G gewonnene Mittel nicht quasiarithmetisch. Da aber dieser Mittelwert eben das Gaussische Medium arithmetico-geometricum ist, so erkennen wir die bekannte interessante Tatsache, das dieses wichtige Mittel nicht quasiarithmetisch ist.

(Eingegangen am 21. Januar 1948.)

The extension of the notion "relatively prime".

By LADISLAS FUCHS in Budapest.

1. Introduction. The concept of relatively prime ideals has for its origin E. Noether's fundamental work "Idealtheorie in Ringbereichen"[1]). Since that time another definition has been given by W. KRULL in his classical paper "Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung"[2]). Krull's definition always coincides with Noether's for elements, but not necessarily for arbitrary ideals; however in rings with maximal condition the two definitions are equivalent.

In a previous paper[3]) I have made an extension of the Noetherian notion "relatively prime" to the concept of "relatively primary". In the present note I define this concept on the basis of Krull's definition of "relatively prime" and I shall show then that the results which were proved in my cited paper merely for rings with maximal condition, may be proved for the most general rings in a much more simplified form. The method is based upon the fundamental concept of isolated primary component which will occupy an important position in our present subject. With the aid of the new definition and formulation one may easily define even the kernel of an ideal.

Our primary aim here is to continue to develop this part of ideal theory by presenting and discussing a new concept, called "almost relatively prime", being a specialization of the notion "relatively primary", but still remaining a proper generalization of the notion "relatively prime". An interesting result is theorem 4 which presents in-

---

[1]) *Math. Annalen,* **83** (1921), pp. 24—66.

[2]) *Math. Annalen,* **101** (1929), pp. 729—744. Most of our fundamental concepts are here defined: $\mathfrak{p}$ is a *minimal prime ideal of* $\mathfrak{a}$, if $\mathfrak{p}$, but no proper prime multiple of $\mathfrak{p}$ divides $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{p}^*$ is a *maximal prime ideal of* $\mathfrak{a}$ if $\mathfrak{p}^*$ contains no element prime to $\mathfrak{a}$ but each proper divisor of $\mathfrak{p}^*$ contains at least one. The *isolated primary component* $\mathfrak{y}$ *of* $\mathfrak{a}$ associated with a minimal prime ideal $\mathfrak{p}$ consists of all elements whose product with a properly chosen element not belonging to $\mathfrak{p}$ lies in $\mathfrak{a}$. The *kernel* $\mathfrak{k}$ *of* $\mathfrak{a}$ is the intersection of all isolated primary components of $\mathfrak{a}$. The *radical* $\mathfrak{r}$ consists of all elements of which a power belongs to $\mathfrak{a}$.

[3]) On relatively primary ideals, *Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger,* **20** (1947), pp. 25—28. I have given a far-reaching extension in my paper: Further generalization of the notion of relatively prime ideals, *Bull. Calcutta Math. Society,* **39** (1947), pp. 143—146.

formation about the case when, for an ideal $\mathfrak{a}$, the concepts "prime to $\mathfrak{a}$" and "almost prime to $\mathfrak{a}$" are equivalent. In rings where no ideal has an infinite number of minimal prime ideals, one may characterize the quasi-primary ideals[4]) with the help of the new concepts in two different ways, and in addition, in rings with maximal condition one is able to define the quasi-primary ideals as well as the primary ideals by a negative property.

The main interest of these last characterizations lies in the fact that they are relative ones, concerning one ideal relatively to another.

2. The notion "relatively primary". We shall say that b is *relatively primary to* $\mathfrak{a}$,[5]) if $bc \in \mathfrak{a}$ implies $c \in \mathfrak{r}$ where $\mathfrak{r}$ denotes the radical of $\mathfrak{a}$; further, $\mathfrak{b}$ is called primary to $\mathfrak{a}$ if $\mathfrak{b}$ contains at least one element primary to $\mathfrak{a}$.

Theorem 1. *b is primary to $\mathfrak{a}$ if and only if it belongs to no isolated primary component of $\mathfrak{a}$.*

If no isolated primary component of $\mathfrak{a}$ contains b, then $bc \in \mathfrak{a}$ implies that c must belong to all minimal prime ideals associated with $\mathfrak{a}$, that is[6]), $c \in \mathfrak{r}$. Conversely, if b is primary to $\mathfrak{a}$, and b would belong to the isolated primary component $\mathfrak{y}$ associated with the minimal prime ideal $\mathfrak{p}$, then we could find an element c not in $\mathfrak{p}$ such that $bc \in \mathfrak{a}$. Hence we should get $c \in \mathfrak{r}$, a contradiction to $c \overline{\in} \mathfrak{p}$.

3. A new definition of the kernel. Theorem 1 asserts that if two ideals have the same isolated primary components, then the same elements are primary to them. As Krull has proved[7]), the isolated primary components of the kernel of $\mathfrak{a}$ coincide with those of $\mathfrak{a}$, therefore, the same elements are primary to an ideal $\mathfrak{a}$ and to its kernel $\mathfrak{k}$. The kernel of $\mathfrak{a}$ is clearly the maximal ideal with this property, hence the kernel may be defined as follows:

Theorem 2. *The kernel of $\mathfrak{a}$ is the maximal ideal to which the same elements are primary as to $\mathfrak{a}$.*

4. The notion "almost relatively prime". We say that b is *almost relatively prime to* $\mathfrak{a}$ if b is prime to the radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{a}$, that is, if $bc \in \mathfrak{r}$ implies $c \in \mathfrak{r}$. We call the ideal $\mathfrak{b}$ almost prime to $\mathfrak{a}$ if it contains at least one element almost prime to $\mathfrak{a}$.

---

4) The quasi-primary ideals are defined in my paper "On quasi-primary ideals", *these Acta*, 11 (1947), pp. 174—183. An ideal $\mathfrak{q}$ is quasi-primary if $ab \in \mathfrak{q}$ implies that some power of a or of b belongs to $\mathfrak{q}$. An equivalent definition is that its radical is a prime ideal.

5) For the sake of brevity, when there is no risk of ambiguity, the term "relatively" will be neglected.

6) The radical is the intersection of all minimal prime ideals of $\mathfrak{a}$; cf. Krull's cited paper [2]).

7) Loc. cit. [2]), Satz 8.

If b is prime to $\mathfrak{a}$, then so is b^n too; consequently, $bc \in \mathfrak{r}$ or $b^n c^n \in \mathfrak{a}$ implies $c^n \in \mathfrak{a}$; $c \in \mathfrak{r}$. Thus the notion "almost prime to $\mathfrak{a}$" may be regarded as an extension of the notion "prime to $\mathfrak{a}$". The extension is in general a proper one, for in the polynomial domain of x and y with rational coefficients, $b = x^2 + xy$ is almost prime to the quasi-primary ideal $\mathfrak{q} = (x^2y, y^2)$ with the radical (y), but b is not prime to $\mathfrak{q}$, namely, $by \in \mathfrak{q}$ without $y \in \mathfrak{q}$.

5. The connection between the two notions. It is of some interest to exhibit the connection between the two concepts "primary to $\mathfrak{a}$" and "almost prime to $\mathfrak{a}$".

Theorem 3. *b is almost prime to $\mathfrak{a}$ if and only if each power of b is primary to $\mathfrak{a}$.*

If all powers b^n are primary to $\mathfrak{a}$, then $bc \in \mathfrak{r}$, or, what is the same, $b^s c^s \in \mathfrak{a}$ implies that $c^s \in \mathfrak{r}$, $c \in \mathfrak{r}$ in accordance with the hypothesis. On the other hand, if b is almost prime to $\mathfrak{a}$, and if $b^r c \in \mathfrak{a}$, then $bc \in \mathfrak{r}$ and hence, by hypothesis, we may conclude that $c \in \mathfrak{r}$, q. e. d.

We now prove an interesting fact: $\mathfrak{b}$ is almost prime to $\mathfrak{a}$ if and only if the radical $\mathfrak{s}$ of $\mathfrak{b}$ is prime to the radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{a}$. Indeed, if $\mathfrak{b}$ contains an element prime to $\mathfrak{r}$, then the same holds for $\mathfrak{s}$ a fortiori, and if $b \in \mathfrak{s}$ is prime to $\mathfrak{r}$, then so is $b^n \in \mathfrak{b}$ too.

6. Ideals for which "prime to" and "almost prime to" are equivalent. From theorems 1 and 3 it is evident that *b is almost prime to $\mathfrak{a}$ if and only if it belongs to no minimal prime ideal of $\mathfrak{a}$.* Hence it is clear that b is prime to or only almost prime to $\mathfrak{a}$ according as b belongs to no maximal prime ideal associated with $\mathfrak{a}$ or only to no minimal one.

If we were merely considering rings in which every prime ideal is divisorless, i. e., has no proper divisor other than the unit ideal, the maximal and minimal prime ideals associated with $\mathfrak{a}$ would coincide, consequently, there would be no difference between the concepts "prime to $\mathfrak{a}$" and "almost prime to $\mathfrak{a}$".

But even in most general rings there are ideals for which these two concepts coincide:

Theorem 4. *All elements almost prime to $\mathfrak{a}$ are prime to $\mathfrak{a}$ if $\mathfrak{a}$ is identical to its kernel.*

If $\mathfrak{k}$ denotes the kernel of $\mathfrak{a}$, then $\mathfrak{a} = \mathfrak{k}$ implies that each element contained in no minimal prime ideal must be prime to all isolated primary components and so necessarily to $\mathfrak{a}$.

In particular, when $\mathfrak{a}$ is a quasi-primary ideal, we get from theorem 4 a necessary condition that a quasi-primary ideal $\mathfrak{q}$ be primary, viz. that each element almost prime to it be prime to it.

7. Two theorems on quasi-primary ideals. In this section let us confine our discussions to rings in which every ideal possesses only a finite number of minimal prime ideals and so only a finite number of isolated primary components. In such rings we may characterize the quasi-primary ideals by the following two theorems[8]).

Theorem 5. *$\mathfrak{q}$ is a quasi-primary ideal if and only if the elements not primary to it form an ideal. This ideal is then the unique primary component $\mathfrak{y}$ of $\mathfrak{q}$.*

On account of theorem 1, we have only to prove that if $\mathfrak{q}$ has more than one isolated primary component, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k$ $(k > 1)$, then the elements which are not primary to $\mathfrak{q}$ cannot form an ideal. Let a_j $(j = 1, \ldots, k)$ be such an element of $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{y}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_{j-1} \cap \mathfrak{y}_{j+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_k$ which does not belong to $\mathfrak{y}_j$. Such an a_j necessarily exists, for $\mathfrak{p}_j$ associated with $\mathfrak{y}_j$ divides $\mathfrak{y}_j$ but not $\mathfrak{a}_j$. Now $a = a_1 + \ldots + a_k$ is primary to $\mathfrak{q}$, since each term a_m except a_j belongs to $\mathfrak{y}_j$, consequently, a belongs to no isolated primary component of $\mathfrak{q}$. Hence it follows that $\mathfrak{q}$ is either quasi-primary or fails to possess the stated property.

The other theorem on quasi-primary ideals reads as follows.

Theorem 6. *$\mathfrak{q}$ is quasi-primary if and only if the elements not almost prime to $\mathfrak{q}$ form an ideal, namely, its prime radical.*

If $\mathfrak{q}$ with the stated property had more than one minimal prime ideal, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ $(k > 1)$, then we could choose a_j in $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_{j-1} \cap$ $\cap\, \mathfrak{p}_{j+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_k$ but not in $\mathfrak{p}_j$. Now $a = a_1 + \ldots + a_k$ must be almost prime to $\mathfrak{q}$, for a belongs to no minimal prime ideal $\mathfrak{p}_j$.

8. A negative characterization of quasi-primary ideals. Now we impose a further restriction on the ring: henceforth we shall limit our discussions to rings with maximal condition.

An ideal that cannot be represented as the intersection of certain of its proper divisors almost prime to each other is called *almost-prime-indecomposable*. This definition enables us to formulate a condition for quasi-primary ideals, one which yields a negative characterization of quasi-primary ideals.

Theorem 7. *The necessary and sufficient condition that an ideal be almost-prime-indecomposable is that it be quasi-primary*[9]).

---

[8]) It is an open question whether theorems 5 and 6 are valid in rings without any condition or not.

[9]) That a quasi-primary ideal has always the stated property is a fact which is true in general and is seen from the first part of the proof. We can however assert nothing about the converse when the ring does not satisfy the maximal condition. But, at any rate, the almost-prime-indecomposable ideals may be regarded as a common generalization of quasi-primary and of irreducible ideals.

If $\mathfrak{q} = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n$ is a quasi-primary ideal under $\mathfrak{p}$ as prime radical, then at least one of $\mathfrak{c}_i$, say $\mathfrak{c}_1$, must have $\mathfrak{p}$ for its radical[10]. The radical $\mathfrak{r}_2$ of $\mathfrak{c}_2$ divides $\mathfrak{p}$ and so it divides $\mathfrak{c}_1$, consequently, $\mathfrak{c}_1$ is not prime to $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{c}_1$ is not almost prime to $\mathfrak{a}_2$.

On the other hand, if $\mathfrak{q}$ is not quasi-primary, then it may be represented as the shortest intersection of a finite set of quasi-primary ideals, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k$ $(k > 1)$ with the prime radicals $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ respectively. Since no quasi-primary ideal is here divided by a prime ideal $\mathfrak{p}_i$ with the trivial exception of its own radical, the quasi-primary ideals $\mathfrak{q}_i$ are almost prime to each other. This completes the proof.

9. A negative characterization of primary ideals. We now deal with the problem as to which ideals possess the property to have no representation where at least one of two irredundant components[11] is almost prime to the other. These ideals will be called *semi-almost-prime-indecomposable* ideals. We now proceed to prove

Theorem 8. *An ideal is semi-almost-prime-indecomposable if and only if it is primary*[12].

First we prove the necessity. If $\mathfrak{a}$ is not primary, then in a shortest primary decomposition of $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{y}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{y}_k$, the associated prime ideals are different, and therefore at least one of two radicals is prime to the other.

To prove the sufficiency, it is plainly enough to show that if $\mathfrak{y}$ is primary with $\mathfrak{p}$ as associated prime ideal, then in $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_k$ each component has either the radical $\mathfrak{p}$ or may be simply omitted. Indeed, replacing each $\mathfrak{c}_i$ by one of its shortest primary representations, we have presented $\mathfrak{y}$ as the intersection of a finite number of primary ideals, and we know that here the primary components associated with a prime ideal different from $\mathfrak{p}$ must be redundant[13].

10. A remark. The method used to prove the last theorem may successfully be applied to the investigation of those ideals which cannot be resolved into components, any two of which have the property that at least one of them is prime to the other. In this case not only the proof but also the enuntiation remains the same, notwithstanding that "almost prime to $\mathfrak{a}$" is a more general notion than "prime to $\mathfrak{a}$".

(Received May 29, 1948.)

---

10) If $\mathfrak{r}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{r}_k = \mathfrak{p}$ is prime, then $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{p}$ implies that $\mathfrak{p}$ divides and so equals one of $\mathfrak{r}_i$.

11) The irredundance is a requirement which is not omissible, for in the contrary, the prime ideal $(x) = (x) \cap (x, y)$ would be semi-almost-prime *decomposable!*

12) Again, the sufficiency holds even in the most general rings; cf. footnote 9).

13) The intersection of irredundant primary components associated with different prime ideals is never primary! See e. g. B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, vol. 2 (2nd ed., Berlin, 1940), p. 32.

Sur les fonctions internes, non monotones.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

J'ai introduit dans ma Note précédente intitulée „Sur une classe des fonctions non mesurables" [1] la notion de fonction *interne* selon la définition suivante:

La fonction $f(x)$ est dite interne dans l'intervalle (a, b) si pour

$$a < x < y < b$$

on a

$$\min [f(x), f(y)] \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max [f(x), f(y)],$$

le signe d'égalité n'étant valable que si $f(x) = f(y)$.

Toute fonction strictement monotone dans l'intervalle (a, b) y est interne; par contre, toute solution discontinue de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(dont l'existence a été démontrée par G. HAMEL [2]) est interne sans être monotone. En tout cas, les fonctions internes, non monotones sont fort singulières, comme le montrent les théorèmes suivants, démontrés dans ma Note citée ci-dessus:

$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans (a, b):

A) pour tout point α $(a < \alpha < b)$, les ensembles $E[f(x) > f(\alpha)]$ et $E[f(x) < f(\alpha)]$ sont partout denses dans (a, b),

B) $f(x)$ n'est pas mesurable sur (a, b).

Dans l'article présent, je démontrerai la généralisation suivante de la proposition B):

Théorème. *$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ n'est mesurable sur aucun sous-ensemble mesurable de (a, b) de mesure positive.*

La démonstration sera basée sur la proposition A) et sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit $f(x)$ une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b) et soit $a < \alpha < \beta < b$. Désignons par E le sous-ensemble de (α, β) dans lequel la valeur de $f(x)$ est située entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. La mesure intérieure*[1]) *de E est alors* 0.

Démonstration. Bornons-nous pour le moment au cas où on a $a < \alpha < \beta < 2\beta - \alpha < b$.

Supposons, pour fixer les idées que $f(\alpha) < f(\beta)$ et soit E_1 un sous-ensemble mesurable arbitraire de E, de sorte que

$$f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \quad \text{pour } x \in E_1.$$

Supposons que $|E_1| > 0$; cette supposition conduira à une contradiction. Car en désignant par I un sous-intervalle intérieur de (α, β) tel que $|E_1 I| > 0$ et par E_3 l'ensemble symétrique à $E_2 = E_1 I$ par rapport au point β, E_3 appartient encore à l'intervalle (a, b) et on a

$$f(x) > f(\beta) \quad \text{pour } x \in E_3.$$

Désignons par $\{\beta_n\}$ une suite de nombres tels que

$$f(\beta_n) < f(\alpha) \text{ et } \beta_n \to \beta \quad \text{pour } n \to \infty;$$

une telle suite existe en vertu de la proposition A). Soit E_4^n le symétrique de E_3 par rapport au point β_n. On a alors pour tout entier n suffisamment grand

$$f(x) < f(\beta_n) < f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_4^n.$$

Mais on voit aisément que les propositions

$$x \in E_2 \text{ et } x + 2(\beta_n - \beta) \in E_4^n$$

sont équivalentes, de sorte que E_4^n se produit de E_2 par une translation infiniment petite. De là résulte en vertu d'un théorème de M. H. Steinhaus[2]) que

$$E_2 E_4^n \neq 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Mais c'est impossible puisque

$$f(x) < f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_4^n \quad \text{et } f(x) > f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_2$$

de sorte que les ensembles E_2 et E_4^n ne peuvent pas avoir des points en commun.

Dans le cas général, on choisira les nombres α_n de sorte qu'ils satisfassent aux inégalités

$$2\beta - b < \alpha_1 < \beta \text{ et } f(\alpha_1) < f(\alpha),$$
$$2\alpha_1 - b < \alpha_2 < 2\alpha_1 - \beta \text{ et } f(\alpha_2) > f(\beta),$$
$$2\alpha_2 - b < \alpha_3 < 2\alpha_2 - \beta \text{ et } f(\alpha_3) < f(\alpha),$$

---

[1]) Nous appelons la mesure intérieure d'un ensemble E la borne supérieure de la mesure des sous-ensembles mesurables de E.

[2]) Voir [3], une démonstration directe est esquissée dans [4].

etc., jusqu'à ce que pour $n = r - 1$ on ait

$$\alpha < \alpha_{r-1} < \frac{\alpha + \beta}{2},$$

on choisira enfin un nombre α_r tel que

$$\alpha < \alpha_{r-1} < \alpha_r < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{et } f(\alpha_r) > f(\beta);$$

la possibilité de ces choix étant garantie par la proposition A). On emploiera ensuite la partie déjà établie du lemme aux intervalles (α_1, β) $(\alpha_2, \alpha_1), \ldots, (\alpha_r, \alpha_{r-1})$, (α, α_r) qui satisfont évidemment à la restriction que nous avons faite au commencement.

Pour démontrer le théorème, supposons que $f(x)$ soit mesurable sur un sous-ensemble mesurable E de (a, b) et que $|E| > 0$. Selon un théorème connu de N. Lusin, $f(x)$ est alors continue sur un ensemble mesurable $E_1 \subseteqq E$, $|E_1| > 0$. Soit α un point de densité de E_1 et soient α_1, β_1 des points tels que

$$a < \alpha_1 < \alpha, \qquad f(\alpha_1) < f(\alpha),$$
$$\alpha < \beta_1 < b, \qquad f(\beta_1) > f(\alpha).$$

Désignons par I l'intervalle (α_1, β_1). Tout point $x \in E_1$ assez voisin de α appartient à l'ensemble $I.E[f(\alpha_1) < f(x) < f(\beta_1)]$, de sorte que celui-ci a une mesure intérieure positive, en contradiction avec le lemme, en vertu duquel la mesure intérieure de l'ensemble $I.E[f(\beta_1) < f(x) < f(\alpha_1)]$ est nulle.

C o r o l l a i r e. *$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ n'est approximativement continue en aucun point de cet intervalle.*

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur une classe des fonctions non mesurables, *Fundamenta Math.*, sous presse.

[2] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Annalen*, **60** (1905), pp. 459–462, en particulier p. 462.

[3] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fundamenta Math.*, 1 (1920), pp. 93–104.

[4] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, (Warszawa–Lwów, 1935), p. 143.

(*Reçu le 10 Septembre 1948*)

Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

Im folgenden bestimmen wir alle Abelschen Gruppen[1]) $\mathfrak{G}$, die keine *eigentlichen* homomorphen Abbildungen gestatten, d. h. folgende Eigenschaft E_1 haben:

E_1: *Jedes homomorphe Bild* $\overline{\mathfrak{G}} \neq \{0\}$[2]) *von* $\mathfrak{G}$ *ist isomorph zu* $\mathfrak{G}$.

Diese Bedingung ist offenbar gleichwertig damit, daß jede Faktorgruppe (mit mehr als einem Element) von $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$ ist.

Für endliche (nicht notwendig kommutative) Gruppen $\mathfrak{G}$ ist E_1 äquivalent mit der Einfachheit von $\mathfrak{G}$. Daher kann eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft E_1 auch „halbeinfach" genannt werden.

Unter den endlichen Abelschen Gruppen sind bekanntlich nur die (zyklischen) Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ von Primzahlordnung p einfach, also auch halbeinfach. Dagegen gibt es unter den unendlichen Abelschen Gruppen auch halbeinfache Gruppen, die nicht einfach sind. Ein Beispiel für eine solche Gruppe liefert die multiplikative Gruppe sämtlicher p-ter, p^2-ter, p^3-ter, ... komplexer Einheitswurzeln (p Primzahl), die offenbar auch als die durch die Elemente $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von der Eigenschaft

$$(1) \qquad A_1 \neq 0, \; pA_1 = 0, \; pA_2 = A_1, \; pA_3 = A_2, \ldots$$

erzeugte (additive) Abelsche Gruppe definiert werden kann. Diese Gruppe bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(p^\infty)$[3]). Man sieht unmittelbar, daß die Gruppe

---

[1]) Diese schreiben wir additiv.

[2]) $\{\ \}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe. Insbesondere soll $\{0\}$ die aus dem Nullelement allein bestehende Gruppe bezeichnen.

[3]) Diese Bezeichnung rechtfertigt sich durch folgende interessante Eigenschaft von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$, die Herr Prof. L. RÉDEI bemerkt hat: $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ *ist die einzige Abelsche Gruppe, die, aber keine echte Untergruppe von ihr, alle zyklischen Gruppen* $\mathfrak{Z}(p^e)$ *der Ordnung* p^e ($e = 1, 2, 3, \ldots$) *als Untergruppen enthält.* (Es ist keineswegs trivial, daß die Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ auch in dieser Weise definiert werden kann, denn es gibt Abelsche Gruppen, z. B. die unendliche direkte Summe $\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{Z}(p^2) + \mathfrak{Z}(p^3) + \ldots$, die alle $\mathfrak{Z}(p^e)$ enthalten, ohne auch $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ zu enthalten.) Die Richtigkeit der Be-

$\mathfrak{Z}(p^\infty)$ die Eigenschaft E_1 hat, denn die echten Untergruppen dieser Gruppe sind mit den zyklischen Gruppen $\{A_n\}$ von der Ordnung p^n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ erschöpft und es gilt $\mathfrak{Z}(p^\infty)/\{A_n\} \cong \mathfrak{Z}(p^\infty)$.

Nun zeigen wir, daß die angegebenen Beispiele schon alle halbeinfache Abelschen Gruppen sind. Es gilt nämlich der

Satz: $\mathfrak{Z}(p)$ *und* $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ $(p=2, 3, 5, 7, \ldots)$ *sind alle Abelschen Gruppen von der Eigenschaft* E_1.

Diesen Satz werden wir sehr einfach, mit Hilfe des folgenden Satzes von BAER[4]) beweisen: *Gilt für die Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *einer Abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *die Gleichung* $n\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ *mit jeder natürlichen Zahl n, so ist* $\mathfrak{H}$ *ein direkter Summand von* $\mathfrak{G}$. Nach diesem Satz ist $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{Z}(p^\infty) \subset \mathfrak{G}$ gilt. Es ist nämlich: $n\mathfrak{Z}(p^\infty)=\mathfrak{Z}(p^\infty)$. Die Richtigkeit dieser Gleichung ist nach (1) für $n=p^e$ klar. Da alle Elemente von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ von p-Potenzordnung sind, so ist auch $m\mathfrak{Z}(p^\infty)=\mathfrak{Z}(p^\infty)$ mit $p \nmid m$ offenbar richtig. Für ein beliebiges $n=p^e m$, $(p \nmid m)$ folgt hieraus in der Tat: $n\mathfrak{Z}(p^\infty)=mp^e\mathfrak{Z}(p^\infty)=m\mathfrak{Z}(p^\infty)=\mathfrak{Z}(p^\infty)$.

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe mit der Eigenschaft E_1. Beim Beweis des Satzes unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

Erster Fall: *Es gebe eine natürliche Zahl* n mit $n\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$. Dann gibt es offenbar auch eine Primzahl p mit der Eigenschaft $p\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$. In diesem Fall hat die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ mehr als ein Element, folglich muß sie isomorph zu $\mathfrak{G}$ sein. Da aber in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ alle Elemente $\neq 0$ von der Ordnung p sind, so zerfällt $\mathfrak{G}$ in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Es kann aber nicht $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p)+\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^* \neq \{0\}$ sein, denn daraus folgte $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{Z}(p)$ im Widerspruch mit der vorausgesetzten Eigenschaft E_1. Folglich erhalten wir in diesem Fall: $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p)$.

Zweiter Fall: *Es gelte für alle n die Gleichung* $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{F}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bestehend aus sämtlichen Element endlicher Ordnung. Zuerst zeigen wir, daß $\mathfrak{F} \neq \{0\}$ ist. Würde nämlich $\mathfrak{G}$ aus lauter Elementen von unendlicher Ordnung bestehen, so folgte für ein Element $B \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}\,\{2B\},$$

merkung von RÉDEI läßt sich nach einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Herrn T. SZELE so zeigen: Enthält die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ sämtliche Gruppen $\mathfrak{Z}(p^e)(e=1,2,3,\ldots)$, so gilt dasselbe offenbar auch für die Untergruppe $p\mathfrak{G}$ (bestehend aus allen Elementen pX mit $X \in \mathfrak{G}$). Ist außerdem noch $\mathfrak{G}$ eine minimale Gruppe dieser Eigenschaft, so muß $p\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ gelten. Das besagt aber, daß jedes Element von $\mathfrak{G}$ in der Form $pX\,(X \in \mathfrak{G})$ erscheint. Folglich läßt sich eine Folge $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von Elementen in $\mathfrak{G}$ bestimmen, die die Eigenschaft (1) hat. Wieder wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}$ muß dann $\mathfrak{G}$ mit der Untergruppe $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}=\mathfrak{Z}(p^\infty)$ übereinstimmen, w. z. b. w.

[4]) R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, **37** (1936), S. 766–781 (Theorem 1.1, S. 766).

was ein Widerspruch mit E_1 ist; denn $\mathfrak{G}/\{2B\}$ hat ein Element 2-ter Ordnung, mithin kann diese Gruppe nicht isomorph zu $\mathfrak{G}$ sein. Nun folgt aus der Eigenschaft $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ auch $n\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ für alle n. Denn $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ besagt, daß jede Gleichung $nX=G\in\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ eine Lösung X hat. Für ein $G\in\mathfrak{F}$ muß diese Lösung X auch in $\mathfrak{F}$ liegen, so daß $n\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ gilt. Sei nun A_1 ein Element von Primzahlordnung p aus $\mathfrak{F}$. Dann folgt aus $p\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ die Existenz einer Folge von Elementen A_2, $A_3, \ldots$ in $\mathfrak{F}$ mit der Eigenschaft (1). Diese Elemente erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ von $\mathfrak{F}$ d. h. auch von $\mathfrak{G}$, die nach obigem ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)+\mathfrak{G}^*$ muß aber nach E_1 der Summand $\mathfrak{G}^*$ (wie oben) verschwinden, womit $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)$ also auch der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 29. Oktober 1948.)

Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen.

Von T. SZELE in Debrecen (Ungarn).

In der vorangehenden Arbeit von Herrn I. SZÉLPÁL[1]) wurden alle Abelschen Gruppen bestimmt, die keine eigentlichen homomorphen Abbildungen gestatten. Ein analoges Problem ist, sämtliche Abelsche Gruppen[2]) $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, die keine eigentlichen Endomorphismen (d. h. homomorphe Abbildungen in sich) gestatten, die also folgende Eigenschaft E_2 haben:

E_2: *Jeder vom Nulloperator verschiedene Endomorphismus von* $\mathfrak{G}$ *ist ein Automorphismus.*

Unter den endlichen Abelschen Gruppen sind offenbar nur die Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ der Ordnung p (= Primzahl) von dieser Eigenschaft. (Ich spreche übrigens die Vermutung aus, daß die Eigenschaft E_2 für endliche Gruppen mit der Einfachheit gleichwertig ist[3]).)

Ein Beispiel für eine unendliche Abelsche Gruppe, die nicht einfach, aber von der Eigenschaft E_2 ist, wird durch die additive Gruppe $\mathfrak{R}^+$ sämtlicher rationaler Zahlen angegeben. Man sieht nämlich unmittelbar, daß die „multiplikativen" Endomorphismen von $\mathfrak{R}^+$ (die also jedes Element auf sein r-faches abbilden, wobei r eine feste rationale Zahl bezeichnet) alle Endomorphismen erschöpfen. Wir beweisen den folgenden

Satz: $\mathfrak{Z}(p)$ *und* $\mathfrak{R}^+$ *sind alle Abelschen Gruppen von der Eigenschaft* E_2.

---

1) I. SZÉLPÁL, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *diese Acta*, **12** (1949), S. 51—53.

2) Diese schreiben wir additiv.

3) Aus der Einfachheit von $\mathfrak{G}$ folgt offenbar E_2. Die Möglichkeit der Umkehrung macht die folgende Überlegung sehr wahrscheinlich. Ist eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht-einfach, fällt sie sogar mit ihrer Kommutatorgruppe nicht zusammen, so gilt auch E_2 nicht für $\mathfrak{G}$. Denn $\mathfrak{G}$ hat dann einen Normalteiler von einem Primzahlindex p und zugleich auch eine Untergruppe der Ordnung p, worauf sich $\mathfrak{G}$ homomorph abbilden läßt. Folglich kann die obige Vermutung nur durch eine endliche nicht-einfache Gruppe, die ihre eigene Kommutatorgruppe ist, widerlegt werden.

Bemerkung. Auf Grund der Analogie beider Probleme kann dieser Satz als der „dual-entsprechende“ des Satzes von SZÉLPÁL in der vorangehenden Arbeit betrachtet werden. Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ erscheinen in der Gruppentheorie oft als „Zwillinge“. Z. B. $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind alle maximalen Abelschen Gruppen ersten Ranges[4]).

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe von der Eigenschaft E_2. Da die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ für jede (feste) ganze Zahl n ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, muß wegen E_2 für jedes n entweder $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, oder $n\mathfrak{G} = \{0\}$ gelten. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: *Es gebe ein n mit $n\mathfrak{G} = \{0\}$*. Dann muß die kleinste solche positive ganze Zahl $n = p$ eine Primzahl sein, denn aus $n = uv$ $(u, v < n)$, $u\mathfrak{G} = v\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ folgt $n\mathfrak{G} = uv\mathfrak{G} = u\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Wegen $p\mathfrak{G} = \{0\}$ hat aber jedes Element $\neq 0$ von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p, folglich zerfällt $\mathfrak{G}$ in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$ folgt nun nach E_2 $\mathfrak{G}^* = \{0\}$, denn gegenfalls hätte $\mathfrak{G}$ einen *eigentlichen* Endomorphismus, der nämlich jedem Element von $\mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{Z}(p)$-Komponente (gemäß der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$) zuordnet. In diesem Falle haben wir also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p)$ bekommen.

Zweiter Fall: *Es gelte für jedes n die Gleichung $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$*. Zuerst zeigen wir, daß in diesem Fall die Gruppe $\mathfrak{G}$ rein-unendlich ist, d. h. kein Element $\neq 0$ von endlicher Ordnung enthält. Aus $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ und E_2 folgt nämlich, daß die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, so daß $nX = 0$ nur für $X = 0$ gelten kann.

Sei nun $A \neq 0$ ein festes Element der rein-unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, für die nach der Voraussetzung $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Dann ist die Gleichung

$$nX = mA \tag{1}$$

für jedes Paar $m, n \neq 0$ von ganzen Zahlen in $\mathfrak{G}$ lösbar, und zwar hat diese Gleichung genau eine Lösung X in $\mathfrak{G}$, da diese Gruppe rein-unendlich ist. Aus demselben Grunde sieht man, daß X in (1) nur von der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ abhängt. Ordnet man also dem Element X in (1) von $\mathfrak{G}$ die Zahl $\frac{m}{n}$ zu, so entsteht offenbar eine eineindeutige Abbildung einer Teilmenge von $\mathfrak{G}$ auf die additive Gruppe $\mathfrak{R}^+$ sämtlicher rationaler Zahlen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, denn

4) Unter einer Abelschen Gruppe *ersten Ranges* versteht man eine kommutative Gruppe, in der jedes Paar von Untergruppen $\neq \{0\}$ einen Durchschnitt $\neq \{0\}$ besitzt. „Maximal“ soll bezeichnen, daß die angegebene Eigenschaft keiner echten Obergruppe der betrachteten Gruppe zukommt.

aus (1) und $n'X' = m'A$ folgt

$$nn'(X+X') = (mn'+m'n)A,$$

also $X+X' \to \frac{mn'+m'n}{nn'} = \frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}$. Wir haben damit bewiesen, daß $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{R}^+$ isomorphe Untergruppe enthält, die also mit $\mathfrak{R}^+$ bezeichnet werden kann. Dann folgt aber aus dem in der vorangehenden Arbeit zitierten Satz von BAER[5]) (im Falle $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}^+$):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+ + \mathfrak{G}^*,$$

da nämlich offenbar $n\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Hier muß (wie oben) nach E_2 der Summand $\mathfrak{G}^*$ verschwinden, womit $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+$, also auch der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 29. Oktober 1948.)

[5]) Siehe die Bemerkung [4]) in der vorangehenden Arbeit.

On some applications of Brun's method[1].

By P. ERDŐS in Syracuse (N. Y., U. S. A.)

Denote by $P(k, l)$ the least prime in the arithmetic progression $kx+l$. Subsequently we shall always assume $0<l<k$, $(l, k)=1$. TURÁN[2] proved that under assumption of the generalised RIEMANN hypothesis we have for every fixed positive ε

$$P(k, l) < k(\log k)^{2+\varepsilon}$$

except possible for $o(\varphi(k))$ progressions. He also remarks that it immediately follows from the prime number theorem that $P(k, l) < (1-\varepsilon)\varphi(k)\log k$ does not hold for almost all progressions, since the number of primes not exceeding $(1-\varepsilon)\varphi(k)\log k$ is less than $\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(k)$ (almost all will mean throughout: with the exception of $o(\varphi(k))$ values of l). It seems very likely that for any constant C, $P(k, l) < C\varphi(k)\log k$ does not hold for almost all progressions. But at present I cannot even disprove the existence of infinitely many k so that $P(k, l) < \varphi(k)\log k$ holds for almost all values of l. On the other hand, I can prove the following weaker

Theorem 1. *There exists a constant $c_1>0$ and infinitely many integers k, such that*

$$P(k, l) \leq (1+c_1)\varphi(k)\log k \tag{1}$$

does not hold for almost all l. In other words, there exists a constant c_2 and infinitely many values of k so that $P(k, l) > (1+c_1)\varphi(k)\log k$ for more than $c_2\varphi(k)$ values of l.

Further we shall prove

Theorem 2. *Let $c_3>0$ be any constant. Then for $c_4\varphi(k)$ values of l $(c_4=c_4(c_3))$*

$$P(k, l) < c_3\varphi(k)\log k. \tag{2}$$

---

[1]) Recently A. SELBERG deduced (and sharpened) some results of BRUN in a surprisingly simple way.

[2]) P. TURÁN, Über die Primzahlen der arithmetischen Progressionen, *these Acta*, 8 (1937), p. 226–235.

Remark. It easily follows from the prime number theorem that $P(k, l) = o(\varphi(k) \log k)$ can hold only for $o(\varphi(k))$ values of l. Thus Theorem 2 is in some sense the best possible.

Next we investigate a different question. Since the integers $n!+2, \ldots, n!+n$ are all composite, it follows immediately that $\limsup (p_{n+1}-p_n) = \infty$. SIERPIŃSKI[8]) proved that $\limsup (\min (p_{n+1}-p_n, p_n-p_{n-1})) = \infty$, by using Dirichlet's theorem according to which every arithmetic progression whose first term and difference are relatively prime contains infinitely many primes. In other words, as SIERPIŃSKI puts it, there are infinitely many primes isolated from both sides. By using Brun's method we shall prove the following sharper

Theorem 3. *Let c_5 be any constant and n sufficiently large. Then there exist a constant $c_6 = c_6(c_5)$, $[c_6 \log n]$ primes $p_k < p_{k+1} < \ldots < p_{k+r} < n$, $r = [c_6 \log n]$, so that*

$$p_{k+i+1} - p_{k+i} > c_5, \qquad i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

One final remark: In a previous paper[4]) I proved that

$$\liminf \frac{p_{n+1}-p_n}{\log n} < 1. \tag{3}$$

By the same method we can show that for any r

$$\liminf \frac{p_{n+r}-p_n}{r \log n} < \vartheta = \vartheta(r) < 1. \tag{4}$$

We do not give the details of the proof, since it is quite similar to that of (3). It can be conjectured that

$$\liminf \frac{p_{n+r}-p_n}{r \log n} < 1 - c_6 \tag{5}$$

where c_6 is a constant *independent* of r (in fact, it is very likely that the lim inf in (5) is 0).

Proof of Theorem 2. (It is more convenient to prove Theorem 2 first.) Denote $x = c_3 \varphi(k) \log k$; $p_1, p_2, \ldots$ will denote the sequence of consecutive primes. Further $A_x(k)$ denote the number of solutions of the congruence

$$p_j - p_i \equiv 0 \pmod{k}; \qquad p_i < p_j \leq x.$$

$B_z(k, l)$ denote the number of primes $p \leq z$ in the arithmetic progression $kx+l$. Clearly

$$A_x(k) = \sum_l \frac{1}{2} (B_x(k, l) (B_x(k, l) - 1). \tag{6}$$

---

[8]) W. SIERPIŃSKI, Remarque sur la répartition des nombres premiers, *Colloquium Math.*, **1** (1948), p. 193–194.

[4]) P. ERDŐS, The difference of consecutive primes, *Duke Math. Journal*, **6** (1940), p. 438–441.

If Theorem 2 is not true, then for a suitable sequence k_i of integers $B_x(k_i, l) = 0$ for all but $o(\varphi(k_i))$ values of l. Let $k_1 < k_2 < \ldots$ be such a sequence. The number of integers l with $B_x(k_i, l) \neq 0$ we denote by $\varepsilon_i \varphi(k_i)$, where $\lim \varepsilon_i = 0$. We have by the theorem of CHEBISHEF ($\pi(z)$ denotes the number of primes not exceeding z)

$$c_7 \varphi(k_i) > \sum_l B_x(k_i, l) = \pi(x) - \nu(k_i) > c_8 \varphi(k_i), \tag{7}$$

where $\nu(k_i)$ denotes the number of prime factors of k_i ($\nu(k) < c \log k$). Further from (6) and (7)

$$A_x(k_i) = \sum_l \frac{1}{2} B_x(k_i, l)\,(B_x(k_i, l) - 1) \geqq -\pi(x) + \frac{1}{2} \sum_l (B_x(k_i, l))^2$$

and applying Schwarz's inequality

$$A_x(k_i) > -\pi(x) + \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_l B_x(k_i, l)\right)^2}{\sum\limits_{B_x(k_i, l) \geqq 1} 1} > -c_7 \varphi(k_i) + \frac{(\pi(x) - \nu(k_i))^2}{2\varepsilon_i \varphi(k_i)} > \tag{8}$$

$$> -c_7 \varphi(k_i) + \frac{c_8^2}{2\varepsilon_i} \varphi(k_i) > \frac{c_9}{\varepsilon_i} \varphi(k_i).$$

Now we shall prove that for every k

$$A_x(k) < c_{10} \varphi(k) \tag{9}$$

which contradicts (8), and this contradiction completes the proof of Theorem 2.

Denote by $C_x(r)$ the number of solutions of

$$p_j - p_i = kr, \qquad 1 < p_i < p_j \leqq x.$$

Clearly

$$A_x(k) = \sum C_x(r), \quad 1 \leqq r \leqq \frac{c_3 \varphi(k) \log k}{k}. \tag{10}$$

Denote by $C'_x(r)$ the number of primes $p_i \leqq x$ so that $p_i + kr$ is also a prime. Evidently

$$C_x(r) \leqq C'_x(r). \tag{11}$$

We obtain by a result of SCHNIRELMANN[5]) that

$$C'_x(r) < c_{11} \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{p \mid kr} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < c_{12} \frac{\varphi(k)}{\log k} \prod_{p \mid kr} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{12}$$

Thus from (10), (11) and (12)

$$A_x(k) \leqq \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{x}{k}} C'_x(r) < c_{12} \frac{\varphi(k)}{\log k} \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{x}{k}} \prod_{p \mid kr} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqq$$

$$\leqq c_{12} \frac{\varphi(k)}{\log k} \prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{x}{k}} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

---

[5]) E. LANDAU, Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz, *Göttinger Nachrichten*, 1930, p. 255—276.

Now $\varphi(k) \prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p}\right)=k\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)<k$. Thus

$$A_x(k)<c_{12}\frac{k}{\log k}\sum_{1\le r\le \frac{x}{k}}\prod_{p|r}\left(1+\frac{1}{p}\right)<c_{13}\frac{k}{\log k}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{x}{kd^2}<c_8\varphi(k),$$

which proves (9) and completes the proof of Theorem 2.

Proof of Theorem 1 (in one or two places we will suppress some of the details of the proof). Let n be any large integer. We shall prove that between n and $2n$ there exists always an integer k which satisfies the conditions of Theorem 1. Let δ be a small but fixed number (independent of n). Put $y=\delta n\log n$. As in the proof of Theorem 2, $A_y(m)$ denote the number of solutions of the congruence

$$p_j-p_i\equiv 0 \pmod m,\quad p_i<p_j\le y.$$

First we are going to estimate from below

$$A=\sum_{n}^{2n}A_y(m). \tag{13}$$

Denote by $D_y(r)$ the number of solutions of

$$p_j-p_i=rm,\quad p_i<p_j\le y,\quad n\le m\le 2n.$$

Clearly

$$A\ge\sum D_y(r),\quad 1\le r\le\frac{y}{4n}\quad\left(\text{or } r\le\frac{\delta}{4}\log n\right). \tag{14}$$

First we estimate $D_y(r)$. Let $p_i<\frac{y}{2}$ be an arbitrary prime. It immediately follows by a simple calculation from the results of PAGE[6]) on the primes in an arithmetic progression that the number of primes of the form

$$p_i+rm,\ n\le m\le 2n$$

is greater than $c_{14}\frac{n}{\log n}$, also these primes are all $\le y$. Thus from $\pi(y)>c_{15}\frac{y}{\log y}>c_{16}\delta n$ we obtain

$$D_y(r)>c_{17}\delta\frac{n^2}{\log n} \tag{15}$$

and from (14) and (15) $\left(r\le\frac{\delta}{4}\log n\right)$

$$A>c_{18}\delta^2 n^2. \tag{16}$$

---

[6]) A. PAGE, The number of primes in an arithmetic progression, *Proceedings London Math. Society*, (2) 39 (1935), p. 116–141.

On the other hand as in the proof of (9) we obtain for $n \leqq m \leqq 2n$

$$(17) \qquad A_\nu(m) < c_{19}\left(\frac{\delta m}{\varphi(m)}\right)^2 \varphi(m) = c_{19}\delta^2 \frac{m^2}{\varphi(m)} = c_{20}\delta^2 n \frac{m}{\varphi(m)};$$

we obtain (17) by putting $\delta n \log n = c_{20}\dfrac{\delta m}{\varphi(m)}\varphi(m)$, and use the same method we used in proving (9).

Hence from (17)

$$(18) \qquad \sum{}' A_\nu(m) < c_{20}\delta^2 n \sum{}' \frac{m}{\varphi(m)}$$

where the dash indicates that the summation is extended over the m satisfying $n \leqq m \leqq 2n$, $\dfrac{m}{\varphi(m)} > \dfrac{1}{4\delta}$. Now

$$(19) \qquad \sum_{m=1}^{u}\left(\frac{m}{\varphi(m)}\right)^2 = \sum_{m=1}^{u} \prod_{p \mid m}\left(1+\frac{1}{p}+\dots\right)^2 <$$

$$< \sum_{m=1}^{u} \prod_{p \mid m}\left(1+\frac{5}{p}\right) < u \sum_{d=1}^{\infty} \frac{5^{\nu(d)}}{d^2} < c_{21} u.$$

Thus we have from (19) by a simple argument (putting $2n = u$)

$$(20) \qquad \sum{}' \frac{m}{\varphi(m)} < c_{22}\delta m.$$

Hence from (18) and (20) $(m \leqq 2n)$

$$(21) \qquad \sum{}' A_\nu(m) < c_{23}\delta^3 n^2.$$

Thus from (16) and (21), if δ is sufficiently small,

$$(22) \qquad A - \sum{}' A_\nu(m) > \frac{c_{18}}{2}\delta^2 n^2.$$

From (22) we obtain that there exists an m_0, $n \leqq m_0 \leqq 2n$, $\dfrac{\varphi(m_0)}{m_0} \leqq \dfrac{1}{4\delta}$ for which

$$(23) \qquad A_\nu(m_0) > \frac{c_{18}}{2}\delta^2 m.$$

Now we show that m_0 satisfies the conditions of Theorem 1. In other words we shall show that

$$(24) \qquad P(m_0, l) \leqq (1 + c_1)\varphi(m_0)\log m_0$$

does not hold for $c_2\varphi(m_0)$ values of l; where c_1 and c_2 are suitable constants $(c_2 = c_2(c_1))$.

We shall prove that (24) is true for $c_1 = c_2 = \delta^{20}$. Put

$$z = (1 + \delta^{20})\varphi(m_0)\log m_0.$$

We have from the prime number theorem

$$(25) \qquad \pi(z) < (1 + 2\delta^{20})\varphi(m_0).$$

Thus to prove our assertion it will clearly suffice to show that there are at least $3\delta^{20}\varphi(m_0)$ progressions $m_0 d+l$ each of which contain more than one prime not exceeding z (i. e. it immediately follows from (25) that there are at least $\delta^{20}\varphi(m_0)$ progressions $m_0 d+l$ for which $P(m_0, l)>z$).

We have by the definition of m_0, $\varphi(m_0)\geqq 4\delta m_0$. Thus $y\leqq z$. Hence by (23)

$$A_z(m_0 > \frac{c_{18}}{2}\delta^2 n. \tag{26}$$

Next we prove

$$L=\sum\binom{B_z(m_0, l)}{4}<c_{24}\frac{n}{\delta^5}. \tag{27}$$

Suppose that (27) is already proved. Then we prove Theorem 1 as follows: We have by (6) and (26)

$$\frac{1}{2}B_z(m_0, l)(B_z(m_0, l)-1)=A_z(m_0)>\frac{c_{18}}{2}\delta^2 n. \tag{28}$$

Thus if there would be less than $3\delta^{20}\varphi(m_0)$ values of l with $B_z(m_0, l)>1$ (in fact with $B_z(m_0, l)\geqq 4$), we would obtain from (28) by a simple calculation, using Schwarz's inequality as in (8) and using $\varphi(m_0)>$ $>4\delta m_0\geqq 4\delta n$,

$$\sum\binom{B_z(m_0, l)}{4}>c_{25}\left(\frac{1}{\delta^{\frac{20-2}{2}}}\right)^4\delta^{20}\varphi(m_0)>c_{26}\frac{n}{\delta^{16}} \tag{29}$$

which for sufficiently small δ contradicts (27) and thus completes the proof of Theorem 1.

Now we only have to prove (27). Denote by $F_z(r_1, r_2, r_3)$ the number of primes p_i so that

$$p_i+r_1 m_0,\ p_i+r_2 m_0,\ p_i+r_3 m_0$$

are all primes not exceeding z. Clearly

$$\sum_{r_1, r_2, r_3} F_z(r_1, r_2, r_3)=\sum\binom{B_z(m_0, l)}{4}. \tag{30}$$

Further

$$F_z(r_1, r_2, r_3)\leqq F'_z(r_1, r_2, r_3) \tag{31}$$

where $F'_z(r_1, r_2, r_3)$ denotes the number of primes $p_i\leqq z$ so that

$$p_i+r_1 m_0,\ p_i+r_2 m_0,\ p_i+r_3 m_0$$

are also primes. We obtain by Brun's method[7]) that

$$F'_z(r_1, r_2, r_3)>c_{27}\frac{z}{(\log z)^4}\prod_{p\mid m_0 r_1 r_2 r_3(r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\left(1+\frac{4}{p}\right), \tag{32}$$

---

[7]) P. Erdős, On the easier Waring problem for powers of primes, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 33 (1937), p. 6–12, lemma 2, p. 8.

Hence by the definition of z and m_0 $\left(\prod_{p \mid m_0}\left(1+\frac{4}{p}\right)<\frac{c_{28}}{\delta^4}\right)$

$$F_z'(r_1, r_2, r_3) < c_{29}\frac{n}{(\log n)^3}\frac{1}{\delta^5}\prod\nolimits_1\left(1+\frac{4}{p}\right) \tag{33}$$

where in $\prod_1$, p runs through the divisors of $r_1 r_2 r_3 (r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2)$. From (33) we evidently have

$$L \leqq \sum_{r_i \leqq \frac{z}{m_0}} F_z'(r_1, r_2, r_3) < \frac{c_{29}}{\delta^5}\frac{n}{(\log n)^3}\sum_{r_i \leqq \frac{z}{m_0}}\prod\nolimits_1\left(1+\frac{4}{p}\right). \tag{34}$$

Now by a simple argument we obtain from lemma 1 of my paper "On the easier Waring's problem for powers of primes"[8]) that

$$\sum_{r_i \leqq \frac{z}{m_0}}\prod\nolimits_1\left(1+\frac{4}{p}\right) < c_{30}(\log n)^3. \tag{35}$$

Thus finally from (33), (34) and (35) we obtain (27), which completes the proof of Theorem 1.

Our proof of Theorem 1 very strongly used the special properties of the primes. Perhaps the following question would be of some interest: Let $q_1, q_2, \ldots$ be a sequence of integers so that the number of q's, not exceeding n, equals $\frac{n}{\log n}+o\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Let $(k, l)=1$ and $P(k, l)$ denote the least q in the arithmetic progression $kx+l$. Is it true that there exists an infinite sequence of integers k_i so that

$$P(k_i, l) < (1+c_1)\,\varphi(k_i)\log k_i$$

does not hold for $c_2\varphi(k_i)$ values of l? Perhaps some assumption like $(q_i, q_j)=1$ might be necessary.

P r o o f of Theorem 3. It follows from the result of SCHNIRELMANN[5]) that the number of solutions of

$$p_{m+1}-p_m \leqq c_5, \; p_m \leqq n$$

is less than $c_{31}\frac{n}{(\log n)^2}$. Thus since $\pi(n) > c_{32}\frac{n}{\log n}$, we immediately obtain Theorem 3.

(Recevied January 12, 1949.)

[8]) L. c. [7]).

Bibliographie.

Arnaud Denjoy: Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. XIV + 714 pages, Paris, Gauthier-Villars, (Parties I—III) 1941, (Partie IV) 1949.

Les idées développées dans ces leçons, enseignées à l'Université Harvard en 1938—39, ont été publiées dans cinq notes aux *Comptes Rendus* en 1921 sous une forme extrèmement condensée. Dans cet ouvrage, l'auteur présente ses méthodes sous une forme suffisamment détaillée pour les rendre compréhensibles à tous qui s'intéressent à ce sujet.

L'auteur se pose le problème de calculer les coefficients d'une série trigonométrique convergente en connaissant sa somme. On calcule ces coefficients à l'aide des formules de Fourier pourvu que la somme de la série soit intégrable au sens de Lebesgue. Mais la somme d'une série trigonométrique convergente peut ne pas être intégrable par aucun procédé d'intégration qui renferme l'intégrale de Riemann. Par contre, la somme d'une telle série est toujours la dérivée *seconde* (généralisée) d'une fonction continue, somme de la série deux fois intégrée formellement. Pour résoudre le problème proposé, on a donc à chercher une méthode pour calculer une fonction continue en connaissant sa dérivée seconde généralisée. En effet si l'on connaît la somme d'une série trigonométrique, on calculera d'abord la fonction continue dont elle est la dérivée seconde généralisée, puis on calculera la série de Fourier de cette fonction et on en obtiendra la série trigonométrique cherchée par deux dérivations formelles.

Les méthodes employées par l'auteur à calculer la primitive de deuxième ordre sont analogues à celles qui jouent un rôle principal dans le procédé d'intégration qu'il appelle totalisation. Pour calculer la primitive de deuxième ordre de la fonction finie $f(x)$ (nous la désignerons par $F(x)$), nous désignons par S_1 l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) dans le voisinage desquels $f(x)$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. S_1 étant toujours fermé, on calcule la variation seconde de $F(x)$ par deux intégrations de Lebesgue pour trois points quelconques situés dans un même intervalle contigu à S_1. C'est ce que l'auteur entend par "résoudre le problème (U) contigu à l'ensemble S_1". De très simples passages à la limite permettent alors de résoudre le problème (U) contigu au dérivé S_1' de S_1 (c'est l'ensemble des points d'accumulation de S_1). On voit bien que par une répétition transfinie de cette opération on arrive à résoudre le problème (U) contigu au noyau parfait P_1 de S_1.

L'auteur réussit maintenant, par l'application des résultats d'une étude approfondie des ensembles parfaits linéaires, à résoudre le problème (U) contigu à un ensemble fermé $S_2 \subset P_1$ non dense sur P_1. En recommençant les calculs sur S_2 au lieu de S_1, on résoût le problème (U) contigu au noyau parfait P_2 de S_2, puis le même problème contigu à un ensemble $S_3 \subset P_2$, non dense sur P_2, et ainsi de suite

Les ensembles S_α qui résultent de la répétition transfinie de ces opérations, constituent un système bien ordonné d'ensembles fermés, chacun étant non dense sur les précédents. On arrive donc pour un indice α de puissance dénombrable à un S_α vide, et alors on connaît la variation seconde de $F(x)$ pour trois points quelconques de l'intervalle (a, b), c'est-à-dire, on connaît la fonction $F(x)$ à une fonction linéaire additive près.

L'auteur termine son ouvrage par la construction des fonctions dont le développement trigonométrique exige toutes les opérations décrites, ne donnant lieu à aucune simplification.

Au côté de la résolution de ce problème fondamental, l'auteur donne une discussion détaillée de la totalisation simple et de la totalisation complète, de même que l'esquisse d'une théorie abstraite de la totalisation.

Cet ouvrage excellent montre dans une clarté extraordinaire la fécondité des méthodes modernes dans les problèmes classiques de l'Analyse.

Ákos Császár.

J. J. Burckhardt, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, 186 S., Basel, Verlag Birkhäuser, 1947.

Die Systematisierung der Kristallen ist eine alte Aufgabe der Kristallographie, die zuerst von Schönflies (1891) gelöst wurde. Schon nach dem Gesetz von Steno der Winkelkonstanz der Begrenzungsebenen handelte es sich um ein mathematisches Problem, das in der Beschreibung der Symmetriegruppen und der damit verbundenen (diskreten) Bewegungsgruppen besteht, die die Gruppen der Decktransformationen der Punktgitter sind. Erst nach Laues Entdeckung der gitterförmigen Struktur der Kristallen drangen die Punktgitter als lebende Wirklichkeit in die Kristallographie hinein und ist diese sozusagen ein Stück der reinen Mathematik geworden. Diesem entsprechend heißt eine Kristallklasse die Gruppe der Decktransformationen eines Punktgitters, die einen Fixpunkt haben. Nach einem kurzen einleitenden Kapitel über die nötigen analytischen Hilfsmittel, das das Studium auch für Nichtmathematiker ermöglicht, gliedert sich das Buch in zwei große Kapitel, die sich mit den Kristallklassen bzw. den Bewegungsgruppen beschäftigen. Das Problem der Kristallsysteme führt zur geometrischen Äquivalenz der Kristallklassen, dabei ist nötig (um die Beziehungen zu den Bewegungsgruppen in helleres Licht zu setzen) auch die feinere, arithmetische Äquivalenz zu betrachten, beide „Systematisierungen" werden sowohl für die Ebene als auch im Raum durchgeführt nicht nur mit den üblichen Mitteln, sondern auch nach dem geometrisch-zahlentheoretischen Verfahren von Minkowski. (Zwei Kristallklassen heißen geometrisch bzw. arithmetisch äquivalent, wenn ihre Gruppen überhaupt bzw. durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution ineinander transformierbar sind.) Die Kristallsysteme werden nach Schönflies bezeichnet. Außer der Bestimmung der Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes wird auch das Problem der (diskreten) Bewegungsgruppen des n-dimensionalen Raumes in Angriff genommen. Das Buch behandelt alle Probleme von rein mathematischem Standpunkt aus und ist so als erstes in seiner Art zu begrüßen. Für die Herstellung des Zusammenhanges mit der physikalischen Kristallographie einerseits, und den benachbarten mathematischen Untersuchungen andererseits, sorgen die am Ende des Buches angefügten wertvollen „Anmerkungen und Literaturhinweise". Die äußerliche und innere Eleganz des Buches machen dem Leser seine Arbeit leicht und die vielen Anregungen spornen ihn zu weiteren Forschungen an.

L. R.

Jean Chazy, Cours de Mécanique Rationnelle, tomes I—II, V+482 et VI+511 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1947/48.

Voici la troisième édition de l'excellent ouvrage de M. CHAZY.

Tome I embrasse la dynamique d'un point matériel. Après un chapitre introduisant au calcul vectoriel, on discute les axiomes de la mécanique et les théorèmes généraux du mouvement, puis on passe à l'analyse mathématique du mouvement rectiligne et curviligne. Dans les chapitres suivants, l'auteur montre, comment il est possible de traiter non seulement des mouvements qui sont des cas-limite idéalisés (p. ex. la chute dans le vide) mais aussi des phénomènes ayant lieu dans la réalité. Un chapitre est consacré au mouvement sur la surface de la Terre.

Tome II traite de la dynamique des systèmes matériels. Après la démonstration des théorèmes généraux, on passe à l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'une axe et autour d'un point, et cela s'appuyant sur des raisonnements géométriques et analytiques dans la même mesure. Les chapitres suivants sont consacrés au principe des travaux virtuels et aux équations de LAGRANGE et d'HAMILTON. Le théorème de DIRICHLET et les petits mouvements d'un système au voisinage d'une position d'équilibre sont étudiés dans un chapitre particulier. Après la théorie des chocs et des percussions, soigneusement élaborée et pourvue d'exemples, suivent l'hydrostatique et l'hydrodynamique. Le dernier chapitre résume les éléments de la théorie du potentiel.

On peut recommander cet ouvrage très vivement à tous ceux qui désirent s'approfondir dans la théorie classique de la Mécanique.

R. Pauncz.

Hans Hahn—Arthur Rosenthal, Set functions, IX+324 pages, Albuquerque (New Mexico), The University of New Mexico Press, 1948.

When HAHN died in 1934, all mathematicians regretted that the second volume of his book *„Reelle Funktionen"*, the first volume of which appeared in 1932, has not been published by him. ROSENTHAL has been asked to write the second volume by making use of HAHN's manuscript. He finished the German manuscript in 1942, but the war hindered him in publishing it. Finally he published a part of his work in English in the present book.

This work gives a very clear and systematic development of the theory of set functions and shows the classical result of this theory as well as the problems of more modern investigations. The domain of the discussions is — like in the book of HAHN — mostly a quite general abstract space which is only specialized as much as needed.

After a short introduction containing the results of the theory of sets used in the book, chapter I discusses — essentially following HAHN's *„Theorie der reellen Funktionen"* (appeared in 1921) — the basic properties of set functions. Some luckily chosen symbols are used here, e. g. the symbol $=_\varphi$ for the abbreviation of „equal neglecting a set E with $\varphi(E)=0$". The discussion of regular and singular set functions is facilitated by an axiomatic definition of these notions. — Chapter II develops the theory of measure functions including the classical theory of CARATHÉODORY. Some special theorems concerning euclidean spaces (non-measurable sets etc.) are also mentioned here. — Chapter III follows again the book of HAHN mentioned above, discussing the theory of measurable functions, asymptotical convergence, the theorems of EGOROFF and LUSIN. — Chapter IV begins with the definition of the integral. The author — like HAHN in his paper appeared in the *Anzeiger* of the Vienna Academy 1929, No. 2, — defines first the indefinite integral as a set function satisfying to some formal properties and shows only later that it can be represented as the limit of Lebesgue or Riemann sums. He develops after the fundamental theorem of RADON and NIKODYM the theory of mean convergence and of multiplication of set functions, considering also non-monotone set-functions. At the end of this chapter we find the theorem of FUBINI on iterated integrals. — Chapter V deals with the derivation of set functions. This is the most modern part of the book, collecting the results of recent investigations. Different kinds of derivates are defined with respect tho the system of sets on which the quotient of two set functions is formed (Vitali, paving, tile derivates etc.), discussing at the same time the mutual relations of the different definitions. The density theorems and the theorem on the transformation of integrals are also mentioned at this place. The work finishes with interesting own researches of ROSENTHAL on the extension of interval functions.

The discussions are precise and clear, the bibliography and the references are very detailed. Ref. would mention perhaps as the only fault of the book that it does not discuss some special theories related to euclidean spaces (Burkill theory, Lebesgue-Stieltjes integral) which would still complete this excellent work.

Ákos Császár.

Louis de Broglie, Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, VI—208 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1949.

M. LOUIS DE BROGLIE reprend dans cet ouvrage les résultats de la mécanique ondulatoire du photon exposés dans ses ouvrages précédents, pour les approfondir et les compléter, de façon à bien mettre en évidence ce qui distingue cette mécanique ondulatoire du photon de la théorie quantique des champs électromagnétiques telle qu'elle est usuellement exposée.

Dans la théorie non superquantifiée il souligne l'importance du fait que les équations de propagation étant du premier ordre par rapport au temps rentrent seules dans le schéma quantique général. Contrairement aux vues de certains auteurs, des particules neutres doivent être représentées également par des fonctions d'onde complexes, l'existence d'un quadrivecteur densité-flux n'entraînant pas celle des densités de charge et de courant électrique dans le cas d'une particule de charge nulle. Il expose la théorie de la particule de spin maximum 1, avec une fonction d'onde à 16 composantes, théorie développée par l'auteur depuis 1934 comme macanique ondulatoire du photon. Les équations de la théorie sont généralement acceptées comme équations des mésons des forces nucléaires, celles du type maxwellien décrivant un méson pseudo-scalaire de spin 0. Pour le photon avec une masse propre $\mu = 0$ on retrouve les équations classiques de Maxwell, tandis que pour un photon de masse extrêmement petite ($\mu < 10^{-45}$ gramme) mais non rigoureusement nulle on a une théorie reposant sur des équations essentiellement différentes. L'auteur donne une analyse détaillée des objections contre l'hypothèse $\mu = 0$ et de ses avantages.

En passant de la théorie d'une seule particule à la théorie superquantifiée par la méthode de la seconde quantification, on peut faire voir plus clairement le sens physique du formalisme de la théorie quantique des champs.

L'ouvrage se divise en trois parties, traitant des théories non superquantifiées, les théories superquantifiées et les interactions entre matière et rayonnement.

J. G Valatin

Hermann Athen, Vektorrechnung (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften), 90 S., Wolfenbüttel und Hannover, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, 1948.

Dieses gut geschriebene Lehrbuch ist eine Einführung für Anfänger, ein Nachschlagebuch für Fortgeschrittene und ein Handwerkszeug für Anwendungen in der Mathematik, Physik und Technik. Es enthält je ein knappes Kapitel über Vektoralgebra, Vektorfelder und Differentialoperatoren, Aufbau von Vektorfeldern mit Beziehungen zur Potenzialtheorie, Tensoren. Gut gewählte Beispiele und Aufgaben mit ihren Lösungen ergänzen das Buch.

Gy. Sz. N.

International Congress of Mathematicians.

An International Congress of Mathematicians will be held in Cambridge, Massachusetts, from August 30 to September 6, 1950, under the auspices of the American Mathematical Society. It is the sincere hope of the American Mathematical Society that this gathering will be a truly international one, with all countries well represented. The Council of the American Mathematical Society has voted unanimously to hold a Congress which will be open to mathematicians of all national and geographical groups.

The Congress will include Conferences in several fields. Following established custom, there will also be a number of invited hour addresses by outstanding mathematicians. In addition, sectional meetings for the presentation of contributed papers not included in conference programs will be held in the following fields: I, Algebra and Theory of Numbers; II, Analysis; III, Geometry and Topology; IV, Probability and Statistics, Actuarial Science, Economics; V, Mathematical Physics and Applied Mathematics; VI, Logic and Philosophy; VII, History and Education.

The official languages will be English, French, German, Italian and Russian.

The plans for the Congress are under the supervision of an Organizing Committee which was elected by the Council of the American Mathematical Society in February, 1948. The Chairman is Professor Garrett Birkhoff of Harvard University and the Vice Chairman is Professor W. T. Martin of Massachusetts Institute of Technology. Professor J. R. Kline of the University of Pennsylvania has been named Secretary of the Congress.

Harvard University has offered the use of its dormitories and dining rooms for mathematicians and their guests for the period of the Congress. The Organizing Committee hopes that it will be possible to furnish board and room without charge to all mathematicians from outside the North American continent who are members of the Congress. Congress membership fees will be announced well in advance of the opening of the Congress. Every effort will be made to facilitate the travel at reasonable cost of foreign participants while in the United States.

Detailed information will be sent in due course to mathematical societies and academies for communication to their membership. Individuals interested in receiving information may file their names in the office of the American Mathematical Society. Communications should be addressed to the American Mathematical Society, 531 West 116th Street, New York City 27, U. S. A.

The Organizing Committee.

Adresse postale: **Acta Scientiarum Mathematicarum,** *Institut Bolyai de l'Université, 1, Ady-tér, Szeged, Hongrie.* Toute espèce de correspondance ainsi que le montant des abonnements doivent être envoyés à cette adresse.

Prix d'abonnement du volume courant (à 256 pages au moins): 4 dollars (U. S. A.), ou des ouvrages mathématiques du même prix, parus pendant ou après la guerre.

Nous signalons et autant que possible nous analysons les *ouvrages envoyés* par MM. les auteurs et les éditeurs.

Les Sociétés savantes et MM. les rédacteurs de journaux scientifiques qui désirent entrer en *relation d'échange* avec nos Acta, sont priés de s'adresser à la Rédaction.

Les auteurs reçoivent de leurs ouvrages 100 tirages à part à titre gratuit.

Postal address: **Acta Scientiarum Mathematicarum,** *The Bolyai Institute of the University, 1, Ady-tér, Szeged, Hungary.* All communications as well as subscriptions, should be sent to this address.

Subscription price for the current volume (of 256 pages at least): 4 U. S. A. dollars, or mathematical works of the same price, edited during or after the war.

Books sent on for review by the author or publisher are announced and as far as possible discussed.

Learned societies and editors of scientific periodicals desiring to *exchange* their publications with these Acta are requested to apply to the Editors.

Authors receive 100 reprints of their papers free of cost.

Postanschrift: **Acta Scientiarum Mathematicarum,** *Bolyai-Institut der Universität, Szeged, Ungarn, Ady-tér 1.* Zuschriften jeder Art, wie auch der Bezugspreis sind an diese Adresse zu senden.

Der *Bezugspreis* des laufenden Bandes (wenigstens 256 Seiten): 4 U. S. A. — Dollars oder während des Krieges oder nach dem Kriege erschienene mathematische Werke vom selben Preis.

Die von Verfassern oder Verlegern *eingesandten Werke* werden angezeigt und tunlichst besprochen.

Die Gesellschaften und Redaktionen der Fachzeitschriften, die mit unseren Acta in *Tauschverkehr* treten wollen, werden gebeten, sich zu diesem Zwecke an die Redaktion zu wenden.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 100 Sonderdrucke unentgeltlich.

INDEX — TARTALOM.

Sz. Nagy, Gy. Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten . . . 1
Alexits, G. Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires. 14
Alexits, G. Sur la convergence d'une classe de séries orthonormales. 18
Rédei, L. Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós. 21
Fenyő, St. Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte. 36
Fuchs, L. The extension of the notion of "relatively prime". 43
Császár, Á. Sur les fonctions internes, non monotones. 48
Szélpál, I. Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen. . . . 51
Szele, T. Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. 54
Erdős, P. On some applications of Brun's method. 57
Bibliographie. 64
International Congress of Mathematicians. 68

PRINTED IN HUNGARY

SZEGED VÁROSI NYOMDA ÉS KÖNYVKIADÓ R. T. 47—101
Felelős nyomdavezető: Kiss István igazgató