ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVI.

FASC. 1—2.

REDIGUNT:

L. KALMÁR, B. SZ.-NAGY, L. RÉDEI, F. RIESZ

S Z E G E D, 1. V. 1955.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

16. KÖTET

1—2. FÜZET

SZEGED, 1955. május 1.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Elementargeometrische Herstellung des Klein—Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

In einer früheren Arbeit[1]) haben wir auf elementargeometrischem Wege bewiesen, daß der *Poincarésche Halbraum*[2]) ein Modell des hyperbolischen Raumes darstellt, wodurch ein elementargeometrischer Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie erbracht wurde. In folgendem wollen wir für das bekannte *Klein—Hilbertsche Kugelmodell*[3]) dasselbe leisten. Dieses Modell kann mit Vermeidung des Begriffes der Kollineation in vollständig elementargeometrischer Form angegeben werden, wie folgt.

Es sei im euklidischen Raume eine Kugel σ als *Fundamentalkugel* vorgelegt. Die inneren Punkte dieser Kugel sollen *Pseudopunkte*, die im ihren Innern liegenden Teile der sie schneidenden Geraden bzw. Ebenen *Pseudogeraden*, resp. *Pseudoebenen* heißen. Als *Charakteristik einer Pseudostrecke* $\overline{P_1P_2}$ (d. h. einer Strecke, deren Endpunkte P_1 und P_2 Pseudopunkte sind) erklären wir das Doppelverhältnis

$$(\Xi \mathrm{H} P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 \mathrm{H}} : \frac{\Xi P_1}{P_1 \mathrm{H}}$$

wobei Ξ, H die Schnittpunkte der Geraden P_1P_2 mit der Fundamentalkugel σ

---

1) PAUL SZÁSZ, Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes, *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae* (im Erscheinen).

2) Vgl. H. POINCARÉ, Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Math.* (Stockholm), **3** (1883), 49—92, besonders 55—56, oder *Oeuvres,* tome II (Paris, 1916), 258—299, besonders 264—265.

3) F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen,* **4** (1871), 573—625, besonders 620—622, oder *Gesammelte mathematische Abhandlungen* I (Berlin, 1921), besonders 300—302; s. ferner D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), S. 38.

sind, so bezeichnet, daß P_2 zwischen P_1 und H liegt (Fig. 1). Zwei Pseudostrecken sollen einander *pseudokongruent* oder *pseudogleich* heißen, falls sie dieselbe Charakteristik haben. Wird die Fundamentalkugel σ von der Ebene eines *Pseudowinkels* $\sphericalangle(l, m)$ im Kreise k geschnitten und sind die Schnittpunkte von der Geraden l bzw. m mit k die Punkte Ξ und H, bzw. M und N, so sei der Winkel derjenigen Kreisbogen $\widehat{\Xi H}$ und $\widehat{MN}$ in dieser Ebene, die k rechtwinklig schneiden (Fig. 2), als die *Charakteristik dieses Pseudowinkels* erklärt werden. (Die Durchmesser von k sind dabei als ihn rechtwinklig schneidenden Kreisbogen mitgerechnet.) Dementsprechend sollen zwei Pseudowinkel von gleicher Charakteristik einander *pseudokongruent* oder *pseudogleich* heißen.

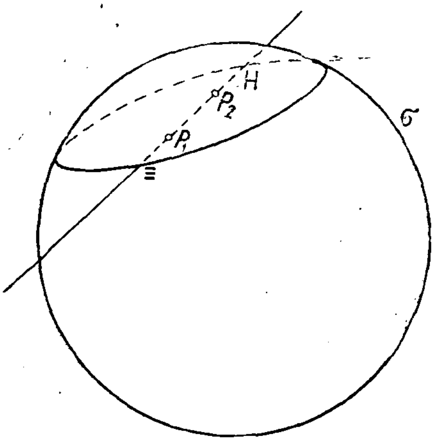


Fig. 1.

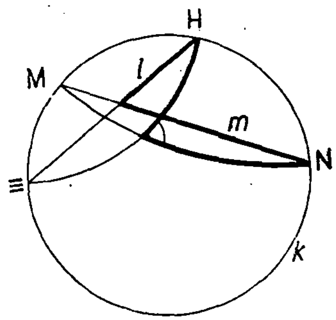


Fig. 2.

In der durch diese und durch die übrigen trivialen Festsetzungen erklärten *Pseudogeometrie* oder *Bildgeometrie* sind alle Axiome der hyperbolischen Raumgeometrie gültig, mit anderen Worten ist diese Pseudogeometrie in der Tat ein Modell (das Klein—Hilbertsche Kugelmodell) des hyperbolischen Raumes. Unsere gegenwärtige Aufgabe ist eben die Durchführung eines elementargeometrischen Beweises dieser Behauptung.[4]) Dabei sei als Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie der Inbegriff folgender Axiome zugrunde gelegt werden: die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz von D. Hilbert[5]), die Negation des euklidischen Parallelenaxioms, endlich das Archimedische Axiom und das Cantorsche Stetigkeitsaxiom.

---

[4]) Zum Beispiel im schönen Buche von G. Verriest, *Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire* (referiert in diesen *Acta*, **14** (1952), 277—278) vermißt man eben einen derartigen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie.

[5]) D. Hilbert, a. a. O. [3]), S. 3—14.

Wir können uns auf den Beweis der Kongruenzaxiome III_4 und III_5[6]) beschränken, da das bestehen aller übrigen Axiome unmittelbar einleuchtet. Zu beweisen sind also für die obige Pseudogeometrie die beiden nachstehenden Sätze.

III_4. *Es sei in einer Pseudoebene α ein Pseudohalbstrahl l sowie eine bestimmte Seite der l enthaltenden Pseudogeraden gegeben. Dann gibt es zu jedem gegebenen Pseudowinkel einen und nur einen Pseudohalbstrahl m in der Pseudoebene α, so daß der gegebene Pseudowinkel pseudokongruent dem Pseudowinkel $\sphericalangle(l, m)$ ist und zugleich alle inneren Pseudopunkte des Pseudowinkels $\sphericalangle(l, m)$ auf der gegebenen Seite der l enthaltenden Pseudogeraden liegen.* (Der Zusatz, laut welchem jeder Pseudowinkel sich selbst pseudokongruent ausfällt, ist trivial, auf Grund der Erklärung der Pseudokongruenz).

III_5. *Wenn für zwei Pseudodreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Pseudokongruenzen*

$$\overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1}, \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B_1A_1C_1 \tag{1}$$

gelten, so ist auch stets die Pseudokongruenz

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A_1B_1C_1 \tag{2}$$

erfüllt.

Zum Beweise dieser Sätze schicken wir drei elementargeometrische Hilfssätze[7]) voran, die wir an dieser Stelle auch elementargeometrisch beweisen-

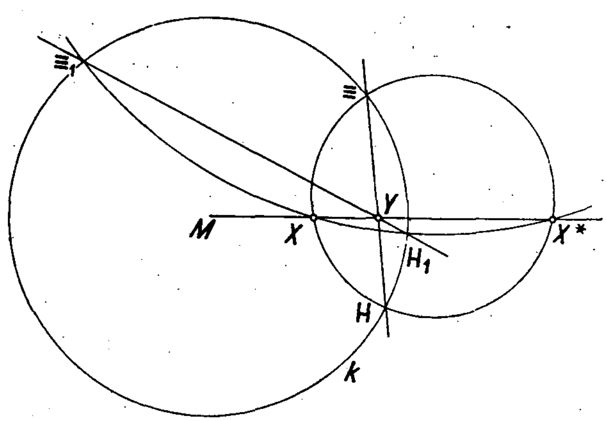


Fig. 3.

---

[6]) D. Hilbert, a. a. O. [3]), S. 13—14.

[7]) Vgl. Paul Szász, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae,* **5 (1954),** 29—34, besonders 31—33, wobei die Hilfssätze 1 und 2 angeführt und auf trigonometrischem Wege bewiesen sind.

Hilfssatz 1. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern eines Kreises k und wird durch X ein Kreis gelegt der k in den Punkten Ξ, H rechtwinklig schneidet, so ist der Schnittpunkt Y der Geraden $\Xi\mathrm{H}$, MX von der Wahl des durch X gelegten Kreises unabhängig.*

Dieser Hilfssatz ist eine Folge des bekannten Satzes, laut welchem die Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden. Die durch X gelegten und zu k orthogonalen Kreise haben nämlich auch denjenigen Punkt X^* der Geraden MX gemein, der in Bezug auf k zu X invers ist (Fig. 3).

Hilfssatz 2. *Ist auf einem Kreise der Bogen $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ kleiner als der Halbkreis und bezeichnet M den Schnittpunkt der in Ξ bzw. H an den Kreis gelegten Tangenten, so ist bei beliebiger Wahl des Zwischenpunktes X auf $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ für den Schnittpunkt Y der Geraden $\Xi\mathrm{H}$, MX stets*

$$\left(\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{\Xi Y}{Y\mathrm{H}}. \tag{3}$$

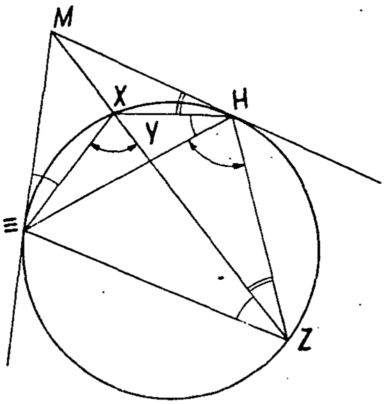


Fig. 4.

Zur Herleitung dieser Formel bezeichne Z den anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden MX (Fig. 4). Da bekanntlich $\sphericalangle X\Xi M = \sphericalangle XZ\Xi$ und ebenso $\sphericalangle X\mathrm{H}M = \sphericalangle XZ\mathrm{H}$ ausfällt, so ist $\triangle M\Xi X \sim \triangle MZ\Xi$ bzw. $\triangle M\mathrm{H}X \sim \triangle MZ\mathrm{H}$, also

$$\frac{\Xi X}{MX} = \frac{Z\Xi}{M\Xi}, \quad \frac{X\mathrm{H}}{MX} = \frac{\mathrm{H}Z}{M\mathrm{H}},$$

woraus mit Rücksicht auf $M\Xi = M\mathrm{H}$ folgt

$$\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}} = \frac{Z\Xi}{\mathrm{H}Z}. \tag{4}$$

Weiter ist als Peripheriewinkel $\sphericalangle \Xi\mathrm{H}X = \sphericalangle \Xi ZX$ und in ähnlicher Weise $\sphericalangle \Xi\mathrm{H}Z = \sphericalangle \Xi XZ$, also $\triangle X\mathrm{H}Y \sim \triangle \Xi ZY$, bzw. $\triangle \mathrm{H}ZY \sim \triangle X\Xi Y$, und somit

$$\frac{XY}{X\mathrm{H}} = \frac{\Xi Y}{Z\Xi}, \quad \frac{XY}{X\Xi} = \frac{\mathrm{H}Y}{\mathrm{H}Z},$$

woher

$$\frac{X\Xi}{X\mathrm{H}} = \frac{\Xi Y}{\mathrm{H}Y}\,\frac{\mathrm{H}Z}{Z\Xi}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt (3) durch Multiplikation.

Hilfssatz 3. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern des Kreises k und sind Ξ_0, H_0 die Schnittpunkte der Geraden MX mit k, so bezeichnet, daß X zwischen M und H_0 liegt, so gilt für den durch Hilfs-*

satz 1 bestimmten Punkt Y der Formel (3) *entsprechend*

$$\left(\frac{\Xi_0 X}{X H_0}\right)^2 = \frac{\Xi_0 Y}{Y H_0}. \tag{6}$$

Zum Beweise legen wir durch X denjenigen Kreis $\bar{k}$, der zu k orthogonal ist und die Gerade MX zu Symmetrieachse hat (Fig. 5). Sind Ξ, H die Schnittpunkte von k und $\bar{k}$, so ist der Schnittpunkt der Geraden MX und

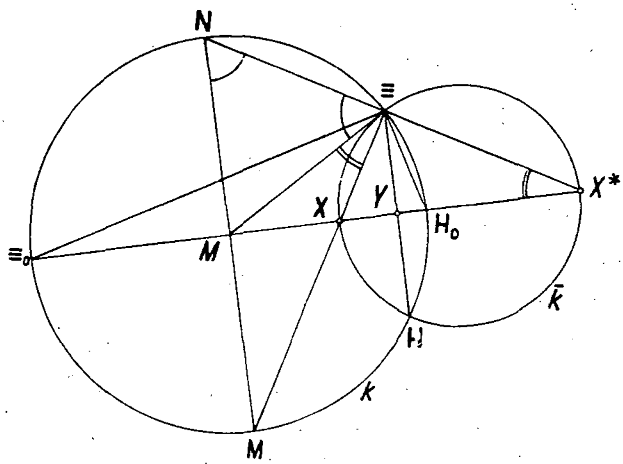


Fig. 5.

ΞH der betrachtete Punkt Y. Es sei X^* der zweite Schnittpunkt von MX und $\bar{k}$ (d. h. der zu X inverse Punkt in Bezug auf k). Bezeichnet M bzw. N den zweiten Schnittpunkt von k mit ΞX resp. ΞX^*, so ist MN ein Durchmesser von k, da doch nach dem Satze des THALES $\sphericalangle X\Xi X^* = 90°$ ausfällt. Da weiter nach Voraussetzung $\bar{k}$ von $M\Xi$ berührt wird, so ist $\sphericalangle \mathrm{N} X^* M = \sphericalangle M \Xi X$, und infolge $M\Xi = M\mathrm{N}$ ist $\sphericalangle M\mathrm{N}\Xi = \sphericalangle M\Xi\mathrm{N}$. Es ist aber $\sphericalangle M\Xi X + \sphericalangle M\Xi\mathrm{N} = 90°$, also zugleich $\sphericalangle \mathrm{N}X^*M + \sphericalangle M\mathrm{N}\Xi = 90°$, folglich is $\sphericalangle X^* M\mathrm{N} = 90°$. Infolgedessen wird der Bogen $\widehat{\Xi_0 \mathrm{M} \mathrm{H}_0}$ von M halbiert und somit ist ΞM die Winkelhalbierende von $\sphericalangle \Xi_0 \Xi \mathrm{H}_0$, also bekanntlich

$$\frac{\Xi_0 X}{X \mathrm{H}_0} = \frac{\Xi_0 \Xi}{\Xi \mathrm{H}_0}. \tag{7}$$

Wegen $\Xi Y \perp \Xi_0 \mathrm{H}_0$ ist aber

$$\Xi_0 \Xi^2 = \Xi_0 Y \cdot \Xi_0 \mathrm{H}_0, \quad \Xi \mathrm{H}_0^2 = Y \mathrm{H}_0 \cdot \Xi_0 \mathrm{H}_0,$$

also hat (7) die Formel (6) zur Folge.

Nun kann Satz III$_4$ aus Hilfssatz 1 gleich gefolgert werden. Es werde nämlich die Fundamentalkugel σ von der Ebene der Pseudoebene α in dem

Kreis k mit dem Mittelpunkt M geschnitten, bezeichne Y den Anfangspunkt des Pseudohalbstrahls l und es seien Ξ, H die Schnittpunkte der l enthaltenden Geraden mit k, wobei H den (nicht zugerechneten) Endpunkt von l bezeichnen soll, ferner sei X der Schnittpunkt von MY mit dem zu k orthogonalen Kreisbogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ (Fig. 6). Durch X kann ein ganz bestimmter Kreis gelegt werden, der k in M und N ebenfalls rechtwinklig schneidet und dessen Bogen $\widehat{X\mathrm{N}}$ mit $\widehat{X\mathrm{H}}$ nach der gegebenen Seite der Pseudogeraden ΞH hin dem Charakteristik des gegebenen Pseudowinkels gleichen Winkel bildet. Nach Hilfsatz 1 geht die Gerade MN durch den Punkt Y, also hat der von der Strecke YN (N ausgenommen) representierte Pseudohalbstrahl m und nur dieser, die verlangte Eigenschaft. Damit ist Satz III_4 bewiesen.

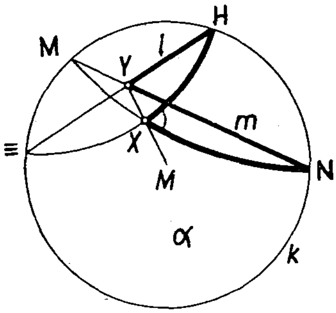


Fig. 6.

Wenden wir uns jetzt dem Beweise des Satzes III_5 zu. Es werde die Fundamentalkugel σ von der Ebene des Pseudodreiecks ABC im Kreise k

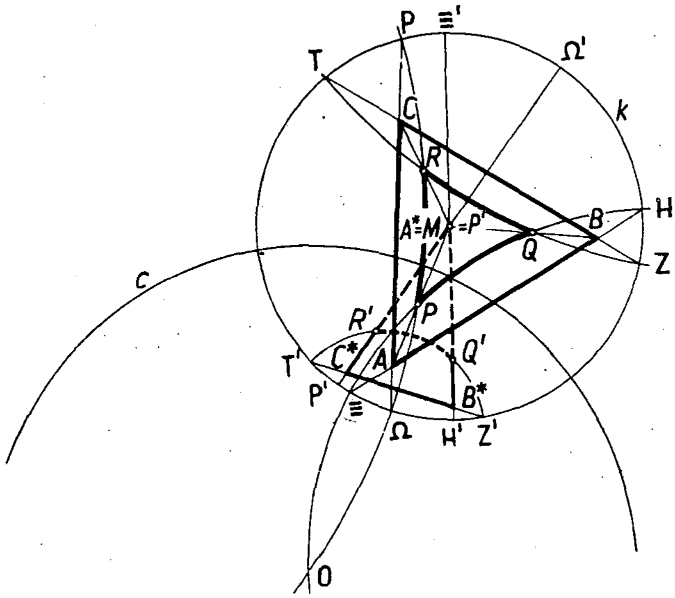


Fig. 7.

mit dem Mittelpunkt M geschnitten und es seien Ξ, H die Schnittpunkte der Geraden AB, Z, T die von BC, endlich P, Ω die von CA mit k, so bezeichnet, daß B zwischen A und H, C zwischen B und T, A zwischen C und Ω liegt (Fig. 7). Konstruiert man die zu k orthogonalen Kreisbogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$, $\widehat{\mathrm{ZT}}$, $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$, so liegt im Sinne des Hilfssatzes 1 der Schnittpunkt P von $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ und $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ auf der Geraden MA, der Schnittpunkt Q von $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ und $\widehat{\mathrm{ZT}}$ auf MB, endlich der Schnittpunkt R von $\widehat{\mathrm{ZT}}$ und $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ auf MC. Ist P von M verschieden (was dann und nur dann der Fall ist, wenn schon $A \neq M$ ausfällt), so ist $M = P'$ der Spiegelpunkt von P in Bezug auf einen bestimmten, zu k orthogonalen Kreis c, dessen Mittelpunkt mit O bezeichnet sein möge.[8]) Es seien die inversen Figuren der Bogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$, $\widehat{\mathrm{ZT}}$, $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ in Bezug auf c der Reihe nach die Bogen $\widehat{\Xi' \mathrm{H}'}$, $\widehat{\mathrm{Z}'\mathrm{T}'}$, $\widehat{\mathrm{P}'\Omega'}$ (unter deren $\widehat{\Xi' \mathrm{H}'}$ und $\widehat{\mathrm{P}'\Omega'}$ in Durchmesser von k ausarten, da doch den Bogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ bzw. $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ enthaltender Kreis offenbar durch das Inversionszentrum O geht und P bei dieser Inversion in M übergeführt wird). Ferner sei die inverse Figur des Kreisbogendreiecks PQR das Kreisbogendreieck $P'Q'R'$ (wobei also $P' = M$ ist). Wird der Punkt $M = P'$ anderer Weise mit A^*, der Schnittpunkt von MQ' und $\mathrm{Z}'\mathrm{T}'$ mit B^*, der von MR' und $\mathrm{Z}'\mathrm{T}'$ mit C^* bezeichnet, so sind die Pseudodreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ einander pseudokongruent! Das sieht man so ein. Infolge des Hilfssatzes 2 ist

$$(8) \qquad (\Xi \mathrm{H} B A) = (\Xi \mathrm{H} Q P)^2$$

und im Sinne des Hilfssatzes 3 ist

$$(9) \qquad (\Xi' \mathrm{H}' B^* A^*) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P')^2.$$

Da aber $\Xi', \mathrm{H}', P', Q'$ die Spiegelpunkte von Ξ, H, P, Q in Bezug auf den Kreis c sind, so ist auch

$$(\Xi \mathrm{H} Q P) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P').$$[9])

(8) und (9) ziehen daher die Gleichung

$$(\Xi \mathrm{H} B A) = (\Xi' \mathrm{H}' B^* A^*)$$

---

[8]) Bezüglich dieses Kunstgriffes vgl. Howard Eves und V. E. Hoggatt, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *The American Math. Monthly*, **58** (1951), 469—474, besonders 470—471.

[9]) Der Beweis dieser bekannten Tatsache läßt sich elementargeometrisch so führen. Infolge der Inversion ist es offenbar $\triangle O\Xi P \sim \triangle OP'\Xi'$ und $\triangle O\mathrm{H}P \sim \triangle OP'\mathrm{H}'$, also

$$\frac{\Xi P}{P\mathrm{H}} = \frac{\Xi P}{OP}\frac{OP}{P\mathrm{H}} = \frac{\Xi' P'}{O\Xi'}\frac{O\mathrm{H}'}{P'\mathrm{H}'}.$$

Und da ähnlicher Weise $\triangle O\Xi Q \sim \triangle OQ'\Xi'$, $\triangle O\mathrm{H}Q \sim \triangle OQ'\mathrm{H}'$ ausfällt, so ist

$$\frac{\Xi Q}{Q\mathrm{H}} = \frac{\Xi Q}{OQ}\frac{OQ}{Q\mathrm{H}} = \frac{\Xi' Q'}{O\Xi'}\frac{O\mathrm{H}'}{Q'\mathrm{H}'}.$$

Durch Division ergibt sich daher

$$\frac{\Xi Q}{Q\mathrm{H}}\frac{P\mathrm{H}}{\Xi P} = \frac{\Xi' Q'}{Q'\mathrm{H}'}\frac{P'\mathrm{H}'}{\Xi' P'}$$

d. h.

$$(\Xi \mathrm{H} Q P) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P').$$

nach sich. Demnach besteht die Pseudokongruenz

$$\overline{AB} \equiv \overline{A^*B^*}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich auf Grund der Hilfssätze 2 und 3 die Pseudokongruenz

$$\overline{CA} = \overline{C^*A^*},$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes 2

$$\overline{BC} = \overline{B^*C^*}.$$

Und da die Größe der Winkel von Kreisen (die Gerade als eine Ausartung des Kreises betrachtet) bei einer Inversion unverändert bleiben,[10]) so sind die Winkel des Kreisbogendreiecks PQR der Reihe nach gleich den Winkeln von $P'Q'R'$:

$$\sphericalangle P = \sphericalangle P', \quad \sphericalangle Q = \sphericalangle Q', \quad \sphericalangle R = \sphericalangle R'.$$

Das bedeutet aber für die Pseudodreiecke ABC und $A^*B^*C^*$, daß $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle A^*$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle B^*$, $\sphericalangle C$ und $\sphericalangle C^*$ der Reihe nach von gleicher Charakteristik sind, d. h. bestehen auch die Pseudokongruenzen

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A^*, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B^*, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C^*.$$

Damit haben wir die Pseudokongruenz dieser Pseudodreiecke nachgewiesen. In derselben Weise entspricht dem Pseudodreieck $A_1B_1C_1$ ein ihm pseudokongruentes $A_1^*B_1^*C_1^*$, wobei $A_1^* = M_1$ der Mittelpunkt derjenigen Kreises k_1 ist, in dem die Fundamentalkugel σ von der Ebene $A_1B_1C_1$ geschnitten wird. Infolge der Voraussetzung (1) bestehen für die so hergestellten Pseudodreiecke $A^*B^*C^*$ und $A_1^*B_1^*C_1^*$ die Pseudokongruenzen

$$\overline{A^*B^*} \equiv \overline{A_1^*B_1^*}, \quad \overline{A^*C^*} \equiv \overline{A_1^*C_1^*}, \quad \sphericalangle B^*A^*C^* \equiv \sphericalangle B_1^*A_1^*C_1^*.$$

Da aber die Kreise einander ähnlich, um ihre Mittelpunkte in sich drehbar und in Bezug auf eine Gerade durch den Mittelpunkt symmetrisch sind, so folgt aus diesen Pseudokongruenzen offenbar die Pseudokongruenz

$$\sphericalangle A^*B^*C^* \equiv \sphericalangle A_1^*B_1^*C_1^*. \tag{10}$$

Andererseits gelten nach der Konstruktion die Pseudokongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A^*B^*C^*, \quad \sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_1^*B_1^*C_1^*.$$

Aus (10) folgt demnach die Pseudokongruenz (2), was zu beweisen war.

Solchergestalt ist das Klein—Hilbertsche Kugelmodell des hyperbolischen Raumes (in der von uns gewählter Form) auf elementargeometrischem Wege hergestellt, und dadurch ein elementargeometrischer Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie wieder erbracht. Wir meinen damit eine methodische Lücke ausgefüllt zu haben.

(Eingegangen am 1. Juli 1954.)

---

[10]) Siehe z. B. H. Thieme, *Die Elemente der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1909), § 30, besonders S. 121—122.

On the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in a finite group.

By NOBORU ITÔ in Nagoya (Japan).

Let G be a finite group. Let $r(G)$ be the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in G and let $t(G)$ be the number of distinct prime factors of the order of G. Recently TROFIMOV [2][1]) obtained the following results: (1) If $r(G) < t(G)+2$, then G is soluble. (2) If $r(G) < 7$, then G is soluble. He remarked also the following: If A_5 is the alternating group of degree 5, then $r(A_5) = 2t(A_5)+1 = 7$.

In this note we shall prove the following theorem, which contains the results of TROFIMOV as a special case.

Theorem. *If G is insoluble and if $r(G) < 2t(G)+2$, then G is isomorphic to A_5.*

Proof. We prove this theorem by an induction argument with respect to the order of the group.

(i) G contains no normal p-subgroup P which is distinct from a p-Sylow subgroup of G. In fact, otherwise, put $\bar{G} = G/P$. Then $\bar{G}$ is insoluble and $t(\bar{G}) = t(G)$. If $\bar{G}$ is not isomorphic to A_5, then $\bar{G}$ contains at least $2t(\bar{G})+2 = 2t(G)+2$ classes of nonnormal subgroups, and a fortiori G does so. Thus $\bar{G}$ is isomorphic to A_5. Then, as TROFIMOV remarked, $\bar{G}$ contains seven classes of nonnormal subgroups. Let q be a prime factor of the order of G distinct from p and let Q be a q-Sylow subgroup of G. Then Q is nonnormal and does not contain P. Thus G contains at least eight classes of nonnormal subgroups. Since $t(G) = 3$, this is a contradiction.

(ii) G contains no normal p-Sylow subgroup P. In fact, otherwise, by SCHUR's theorem [3, p. 125], there exists a subgroup H of G such that $G = PH$ and $P \cap H = 1$. Then H is insoluble and $t(H) = t(G)-1$. If H is not isomorphic to A_5, then H contains at least $2t(H)+2 = 2t(G)$ classes of nonnormal subgroups. Let us consider the totality of products, each of

1) Though TROFIMOV uses the weaker notion "conjugate classes" in his paper [2], his proof remains valid under this stronger notion "isomorphic classes". Further the proof in the present paper does not hold under the notion "conjugate classes". The writer owes this suggestion to Professor RÉDEI and expresses his hearty thanks to him.

which is a product of any one of such subgroups of H with P. Then it occur new $2t(G)$ classes of nonnormal subgroups of G. Since $t(G) \geqq 3$, this is a contradiction. Thus H is isomorphic to A_5. As just above, we have at least fourteen classes of nonnormal subgroups of G. Since $t(G)=4$, this is a contradiction. Thus G has $t(G)$ classes of nonnormal Sylow subgroups.

(iii) Any p-Sylow subgroup P of G is not contained in the centre of its normalizer. In fact, otherwise, by BURNSIDE's theorem [3; p. 133], there exists a normal subgroup H of G such that $G=PH$ and $P \cap H=1$. Then H is insoluble and $t(H)=t(G)-1$. If H is not isomorphic to A_5, then H contains at least $2t(H)+2=2t(G)$ classes of nonnormal subgroups. Further there exist at least two distinct prime factors q, r of the order of H such that the corresponding Sylow subgroups Q, R are nonnormal in H. Let $N(Q)$ and $N(R)$ be the normalizers of Q and R in G respectively. Since H is normal in G, we have $xQx^{-1} \subseteqq H$ for every $x \in G$. Thus, by Sylows's theorem, there exists an element $y \in H$ such that $xQx^{-1}=yQy^{-1}$. Then $y^{-1}x \in N(Q)$. This proves $G=N(Q)H=N(R)H$. By this and the normality of H one may assume that $P \subset N(Q)$. Since Q is the only one q-Sylow subgroup of PQ, if PQ is normal in G, the Q is normal in G. This contradicts either (i) or (ii). Hence the subgroups PQ and PR are nonnormal in G. Thus G contains at least $2t(G)+2$ classes of nonnormal subgroups, which is a contradiction. Thus H is isomorphic to A_5. Since H contains seven isomorphic classes of nonnormal subgroups and three nonnormal Sylow subgroups to the primes $2, 3, 5$ we have, as just above, that G contains at least ten classes of nonnormal subgroups. Since $t(G)=4$, this is a contradiction.

(iv) We consider any q-Sylow subgroup Q of G. Now let us assume that Q is abelian. Let $N(Q)$ be the normalizer of Q. Then, from the fact just proved there exists at least one prime factor q' of the order of $N(Q)$ such that for a corresponding Sylow subgroup Q' of $N(Q)$ the product QQ' is not abelian. Clearly QQ' is nonnormal in G. Let us correspond to each prime factor q of the order of G either QQ' or a maximal subgroup Q_1 of Q according as Q is abelian or not. Thus G has again $t(G)$ classes of nonnormal subgroups.

(v) Let there exist a prime factor p of the order of G such that a corresponding Sylow subgroup P is not abelian. Let P_0 be a subgroup of P of order p. Since P_0 is nonnormal, G contains no class of nonnormal subgroups except that of P_0 and the cases mentioned in (ii) and (iv). Therefore for every prime factor q of the order of G, distinct from p, a q-Sylow subgroup Q of G is of order q. If Q is normal in a subgroup H of G then H is in G nonnormal, for otherwise Q were normal in G and this is impossible. Consequently the order of every subgroup QQ' mentioned in (iv) is product of two primes. By virtue of (iii), p is the least prime factor of the order of G.

Assume that G contains two different p-Sylow subgroups, P and P', with $D = P \cap P' \neq 1$. From all such D's we choose a maximal one. The order of the normalizer $N(D)$ of D in G is divisible by p^2q for some q and $N(D)$ contains D as a characteristic subgroup [3; p. 102]. Since $N(D)$ must be normal in G, so is D normal in G too. This is a contradiction. Therefore $P \cap P' = 1$ for all $P' \neq P$. If the normalizer $N(P)$ of P in G is equal to P, then by a well known theorem of FROBENIUS G contains a normal subgroup H, such that the factor group G/H is isomorphic to P. Hence G is soluble, and this yields a contraction. Therefore $N(P)$ contains P properly. If $N(P)$ is normal in G, then P is also normal in G which is a contradiction. Then $N(P)$ is nonnormal. This is again a contradiction. Thus every p-Sylow subgroup of G is abelian of order at most p^2. Now there exsists just one prime factor p of the order of G such that a corresponding Sylow subgroup is of order p^2. In fact, if there exist no such prime factors, then G is soluble. If there exist two such prime factors, then G contains at least $2t(G)+2$ classes of nonnormal subgroups, which is a contradiction. Further since G is insoluble, p should be equal to two.

(vi) Let M be any maximal subgroup of G. If M is normal in G, then M is of prime index q in G and therefore M is insoluble. Then q is not equal to two. Let Q be a q-Sylow subgroup of G. Then $G = MQ$ and $M \cap Q = 1$. Then Q is contained in the centre of its normalizer, which contradicts (iii). Thus M is nonnormal and therefore M should be conjugate to some QQ' in (iv). Thus any non-maximal subgroup of G is abelian and G is simple. In other words, G is a simple group of Rédei type of even order. Thus by RÉDEI's theorem [1] G is isomorphic to A_5.

This completes the proof.

MATHEMATICAL INSTITUTE,
NAGOYA UNIVERSITY.

Literature.

[1] RÉDEI, L., Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen, *Acta Math.*, **84** (1950), 129—153.

[2] TROFIMOV, P. I., O vliyanii čisla vseh klassov neinvariantnyh sopryažennyh podgrupp na svoistva konečnoi nespecial'noi gruppy, *Mat. sbornik*, **33** (75) (1953), 45—72.

[3] ZASSENHAUS, H., *Lehrbuch der Gruppentheorie.* Bd. I (Berlin—Leipzig, 1937).

(Received March 29, in revised form June 2, 1954.)

Über einseitige Approximation durch Polynome. I.

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Einleitung.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet der folgende Satz von H. WEYL:

Es sei $f(x)$ eine in (a, b) definierte, beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jeder positiven Zahl ε zwei Polynome $p(x)$ und $P(x)$, so daß

(1) $$p(x) \leqq f(x) \leqq P(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

und

$$\int_a^b [P(x)-p(x)]\,dx < \varepsilon$$

besteht.

H. WEYL [13] hat diesen Satz auf Probleme der Gleichverteilung der Zahlen modulo Eins erfolgreich angewandt. Später hat L. FEJÉR [2] denselben Satz zum Beweise der Konvergenz positiver mechanischer Quadraturverfahren benutzt. Wie G. SZEGŐ [12] bemerkte, lassen sich die Resultate von L. FEJÉR auf gewichtete mechanische Quadraturverfahren verallgemeinern, indem man den Weylschen Satz folgenderweise verallgemeinert:

Es sei $f(x)$ inbezug auf die monoton wachsende Funktion $\alpha(x)$ im Riemann—Stieltjesschen Sinne integrierbar. Dann kann man zu einer beliebigen positiven Zahl ε Polynome $p(x)$ und $P(x)$ finden, so daß (1) erfüllt ist, ferner

$$\int_a^b [P(x)-p(x)]\,d\alpha(x) < \varepsilon$$

besteht.

Eine dritte Anwendung dieses Satzes war die von J. KARAMATA [8] gegebene Herleitung des Tauberschen Satzes von G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD. Verfasser beschäftigte sich in einigen Arbeiten [3], [4], [5] mit dem Restglied dieses letzterwähnten Satzes. Um die entsprechenden Abschätzungen zu erhalten, war es erforderlich, für Funktionen $f(x)$ von spezieller Art eine von ε abhängige Schranke des Grades der Polynome $p(x)$ und $P(x)$ zu erhalten.

In dieser Arbeit wollen wir diese Sätze für allgemeinere Funktionenklassen beweisen, ferner bringen wir einige weitere Anwendungen, und endlich werden in einigen Fällen die Polynome vorgeschriebenen Grades konstruiert, die die bestmögliche Approximation in der geschilderten Weise liefern.

Es sei besonders hervorgehoben, daß die Polynome konstruiert werden, die die bestmögliche Approximation für die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } 0\leqq x\leqq \xi, \\ x^{-1} & \text{für } \xi< x\leqq 1 \end{cases}$$

darstellen. Das ist genau die Approximationsfrage, die bei dem Karamataschen Beweise des Hardy—Littlewoodschen Satzes auftritt. Die Gewichtsfunktion kann dabei beliebig sein.

D e f i n i t i o n. Es sei K_ν die Klasse der Funktionen $f(x)$, die im vorgeschriebenen Intervall (a, b) $\nu-1$-mal stetig differenzierbar sind, und für welche $f^{(\nu-1)}(x)$ die Integralfunktion einer Funktion $f_\nu(x)$ von beschränkter Schwankung ist. Die Variation von $f_\nu(x)$ bezeichnen wir mit V_ν.

S a t z I. *Es sei $f(x)\in K_\nu$, dann gibt es Polynome $p_N(x)$ und $P_N(x)$ höchstens N-ten Grades, so daß*

$$p_N(x)\leqq f(x)\leqq P_N(x)$$

ist und

$$\int_a^b [P_N(x)-p_N(x)]\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}<\frac{A_\nu V_\nu}{N^{\nu+1}} \tag{2}$$

besteht, wobei A_ν eine nur von ν abhängige Zahl bedeutet.

Für die Zahlen A_ν werden numerische Abschätzungen angegeben. Wie schon von J. KOREVAAR bemerkt wurde, folgt aus einem Satze von S. NIKOLSKIJ [10], daß (2) größenordnungsmäßig nicht verbessert werden kann. Wir wiederholen den Beweis: Der Satz von NIKOLSKIJ behauptet, daß falls $f(x)$ $\nu-1$-mal stetig differenzierbar ist und $f^{(\nu-1)}(x)$ die Integralfunktion einer solchen Funktion ist, welche höchstens Sprungstellen erster Art besitzt, aber wenigstens eine solche Sprungstelle tatsächlich besitzt, dann besteht für jedes Polynom $q_n(x)$ höchstens n-ten Grades die Ungleichung

$$\max_{a\leqq y\leqq b}\left|\int_a^y f(x)\,dx-q_n(y)\right|\geqq\frac{H}{n^{\nu+1}},$$

wobei die Zahl H von n unabhängig ist.[1]) Es sei in diesem Satze

$$q_n(y)=\int_a^y p_N(t)\,dt \qquad (n=N+1),$$

[1]) In der Arbeit von NIKOLSKIJ wird auch die Abhängigkeit der Zahl H von ν und $f(x)$ angegeben. Das ist aber für unsere Zwecke belanglos.

dann ist wegen $f(x) \geqq p_N(x)$

$$\operatorname*{Max}_{a \leqq y \leqq b} \left| \int_a^y f(x)\,dx - q_n(x) \right| = \int_a^b [f(x) - p_N(x)]\,dx,$$

also besteht a fortiori

$$\int_a^b [f(x) - p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \geqq \frac{H'}{(N+1)^{\nu+1}}$$

mit $H' = 2H/(b-a)$.

Unter den Anwendungen behandeln wir zwei Fragen: die Fehlerabschätzung von positiven mechanischen Quadraturen interpolatorischer Art, und Taubersche Sätze bezüglich der Laplace—Stieltjes-Transformation.

I. Beweis des Approximationssatzes.

Im weiteren können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $a = -1$, $b = +1$ ist. Der allgemeine Fall kann mittels einer affinen Transformation auf diesen zurückgeführt werden. Zuerst betrachten wir die Approximation der Funktionen:

$$g_\nu(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leqq x \leqq \xi, \\ (x-\xi)^\nu & \text{für } \quad \xi < x \leqq 1, \end{cases} \tag{3}$$

wobei ν eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Für gerade ν wurde die einseitige Approximation dieser Funktionen schon in einer früheren Arbeit des Verfassers [4] behandelt. Hier wird die Methode vereinfacht und die Rechnung bis zum numerischen Werte der auftretenden Konstanten verfolgt, weiter wird die Frage auch für ungerade ν gelöst, wozu einige neue Kunstgriffe benötigt werden.

Es sei $n > \nu + 1$ und wir bezeichnen mit

$$x_{kn} = \cos \frac{2(n-k)+1}{2n} \pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

die Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x)$. Es sei ξ eine feste Zahl, $-1 < \xi < +1$, und wir wählen $\mu = \mu(n)$ in der Weise, daß

$$x_{\mu n} \leqq \xi < x_{\mu+1, n} \tag{5}$$

besteht[2]). Wir bezeichnen

$$r = \left[\frac{\nu+1}{2} \right]. \tag{6}$$

---

[2]) Wo $x_{0n} = -1$, $x_{n+1,n} = 1$ bedeutet.

Es sei $f_n(x)$ das Polynom höchstens $2(n-r)-2$-ten Grades[3]) für welches die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} &f_n(x_{1n})=\cdots=f_n(x_{\mu+1,n})=0, \quad f_n(x_{\mu+r+2,n})=\cdots=f_n(x_{nn})=1, \\ &f_n'(x_{1n})=\cdots=f_n'(x_{\mu n})=0, \qquad f_n'(x_{\mu+r+2,n})=\cdots=f_n'(x_{nn})=0 \end{aligned}$$

bestehen. Ähnlicherweise sei $F_n(x)$ das Polynom ebenfalls höchstens $2(n-r)-2$-ten Grades mit

$$(8)\qquad \begin{aligned} &F_n(x_{1n})=\cdots=F_n(x_{\mu-r-1,n})=0, \quad F_n(x_{\mu n})=\cdots=F_n(x_{nn})=1, \\ &F_n'(x_{1,n})=\cdots=F_n'(x_{\mu-r-1,n})=0, \quad F_n'(x_{\mu+1,n})=\cdots=F_n'(x_{nn})=0. \end{aligned}$$

Diese Polynome wurden durch A. A. MARKOV [7] und T. J. STIELTJES [11] ersonnen, und zum Beweise des Separationssatzes bezüglich der Nullstellen von Orthogonalpolynomen angewandt. Bekanntlich gilt

$$(9)\qquad f_n(x) \leqq \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqq x_{\mu+1,n}, \\ 1 & \text{für} \quad x > x_{\mu+1,n}, \end{cases}$$

$$(10)\qquad 0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu+1,n} \leqq x \leqq x_{\mu+r+2,n},$$

bzw.

$$(11)\qquad F_n(x) \geqq \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqq x_{\mu n}, \\ 1 & \text{für} \quad x > x_{\mu n}, \end{cases}$$

und

$$(12)\qquad 0 \leqq F_n(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu-r-1,n} \leqq x \leqq x_{\mu n}.$$

Wir betrachten jetzt die Polynome

$$(13)\qquad \gamma_{nr}(x,\xi)=(x-\xi)^r f_n(x)$$

und

$$(14)\qquad \Gamma_{nr}(x,\xi)=(x-\xi)^r F_n(x),$$

deren Grad infolge (6) höchstens $2n-1$ ist. Aus den Ungleichungen (9)—(12) erhält man, falls r eine gerade Zahl ist,

$$(15)\qquad \gamma_{nr}(x,\xi) \leqq g_r(x,\xi) \leqq \Gamma_{nr}(x,\xi).$$

Nach einem klassischen Resultat von CH. HERMITE besteht für ein beliebiges Polynom $\Pi_{2n-1}(x)$ höchstens $2n-1$-ten Grades die Relation

$$(16)\qquad \int_{-1}^{+1} \Pi_{2n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\Pi_{2n-1}(x_{kn}).$$

Infolge der Definition der γ_{nr} und Γ_{nr} ist

$$\Gamma_{nr}(x_{kn},\xi)=\gamma_{nr}(x_{kn},\xi)$$

---

[3]) Nach der Annahme $n > r+1$ ist $n-r \geqq 1$ und so ist $2(n-r)-2 \geqq 0$.

für $k \leqq \mu - r - 1$ und $k \geqq \mu + r + 2$. Somit besteht

$$\int_{-1}^{+1} [\Gamma_{n\nu}(x, \xi) - \gamma_{n\nu}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu-r}^{\mu-1} (x_{kn} - \xi)^\nu F_n(x_{kn}) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu}^{\mu+r+1} (x_{kn} - \xi)^\nu [1 - f_n(x_{kn})].$$

Wegen (4) und (5) ist

$$(17) \qquad |x_{kn} - \xi| < \frac{(r+1)\pi}{n} \qquad (\mu - r \leqq k \leqq \mu + r + 1)$$

Aus (10) und (12) folgt somit

$$(18) \qquad \int_{-1}^{+1} [\Gamma_{n\nu}(x, \xi) - \gamma_{n\nu}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 2 \left(\frac{\pi(r+1)}{n} \right)^{\nu+1}.$$

Die Ungleichungen (15) und (18) ergeben das erstrebte Resultat für die Funktionen $g_\nu(x, \xi)$, wenn ν eine gerade Zahl ist.

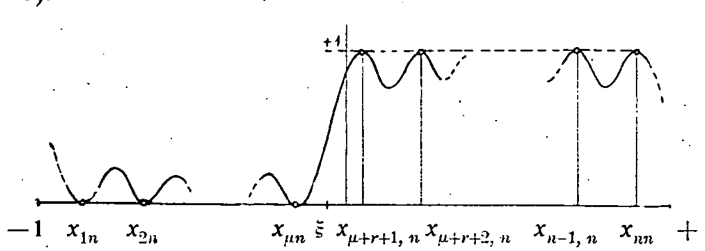
Der Beweis der entsprechenden Formeln für ungerade ν ist etwas verwickelter. Wir betrachten das Polynom $\varphi_n(x)$ höchstens $2(n-r)-1$-ten Grades mit

$$(19) \qquad \begin{array}{ll} \varphi_n(x_{1n}) = \cdots = \varphi_n(x_{\mu n}) = 0, & \varphi_n(x_{\mu+r+1,\, n}) = \cdots = \varphi_n(x_{nn}) = 1, \\ \varphi_n'(x_{1n}) = \cdots = \varphi_n'(x_{\mu n}) = 0, & \varphi_n'(x_{\mu+r+1,\, n}) = \cdots = \varphi_n'(x_{nn}) = 0. \end{array}$$

Somit wurden $n-r$ Nullstellen von $\varphi_n'(x)$ vorgeschrieben, ferner fallen infolge des Rolleschen Satzes weitere $n-r-2$ Nullstellen in die Intervalle

$$(x_{1n}, x_{2n}), \ldots, (x_{\mu-1,\, n}, x_{\mu n}), \quad (x_{\mu+r+1,\, n}, x_{\mu+r+2,\, n}), \quad (x_{n-1,\, n}, x_{nn}).$$

Da der Grad von $\varphi_n'(x)$ höchstens gleich $2(n-r)-2$ ist, gibt es keine weitere Nullstellen von $\varphi_n'(x)$. Damit ist der Verlauf des Polynoms $\varphi_n(x)$ bestimmt (vgl. Figur 1).



Figur 1.

Das wesentliche ist, daß

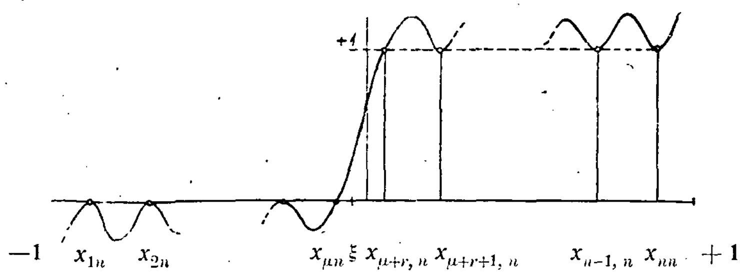
$$(20) \qquad \begin{array}{lll} \varphi_n(x) \geqq 0 & \text{für} & x \leqq x_{\mu n}, \\ \varphi_n(x) \leqq 1 & \text{für} & x \geqq x_{\mu+r+1,\, n} \end{array}$$

und

(21) $$0 \leqq \varphi_n(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leqq x \leqq x_{\mu+r+1,\, n}$$

bestehen. Weiter sei $\Phi_n(x)$ das Polynom höchstens $2(n-r)-1$-ten Grades mit

$$\Phi_n(x_{1n}) = \cdots = \Phi_n(x_{\mu n}) = 0, \qquad \Phi_n(x_{\mu+r,\, n}) = \cdots = \Phi_n(x_{nn}) = 1,$$
$$\Phi_n'(x_{1n}) = \cdots = \Phi_n'(x_{\mu-1,\, n}) = 0, \qquad \Phi_n'(x_{\mu+r+1,\, n}) = \cdots = \Phi_n'(x_{nn}) = 0.$$



Figur 2.

Eine ähnliche Überlegung wie bei $\varphi_n(x)$ zeigt, daß die Kurve von $\Phi_n(x)$ wie in Figur 2 verläuft, d. h.

(22) $$\begin{aligned} \Phi_n(x) &\leqq 0 \quad \text{für} \quad x \leqq x_{\mu n}, \\ \Phi_n(x) &\geqq 1 \quad \text{für} \quad x \geqq x_{\mu+r,\, n} \end{aligned}$$

und

(23) $$0 \leqq \Phi_n(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leqq x \leqq x_{\mu+r,\, n}$$

ist. Es sei jetzt ν ungerade, und wir bilden die Polynome

(24) $$\gamma_{n\nu}(x, \xi) = (x-\xi)^\nu \varphi_n(x)$$

und

(25) $$\Gamma_{n\nu}^*(x, \xi) = (x-\xi)^\nu \Phi_n(x).$$

Infolge (20) und (21) gilt

(26) $$\gamma_{n\nu}(x, \xi) \leqq g_\nu(x, \xi) \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Über die Polynome $\Gamma_{n\nu}^*(x, \xi)$ kann aber nur behauptet werden, daß

(27) $$g_\nu(x, \xi) \leqq \Gamma_{n\nu}^*(x, \xi) \quad \text{für} \quad x \leqq x_{\mu n}, \quad x \geqq x_{\mu+r,\, n}$$

und

(28) $$|\Gamma_{n\nu}^*(x, \xi)| \leqq \operatorname{Max} |x-\xi|^\nu < (x_{\mu+r,\, n} - x_{\mu n})^\nu < \left(\frac{r\pi}{n}\right)^\nu \text{ für } x_{\mu n} \leqq x \leqq x_{\mu+r,\, n}$$

ist. Aus der Definition von $\gamma_{n\nu}$ und $\Gamma_{n\nu}^*$ folgt, daß, analog zu (16),

$$\int_{-1}^{+1} [\Gamma_{n\nu}^*(x, \xi) - \gamma_{n\nu}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu+1}^{\mu+r} (x_{kn}-\xi)^\nu [\Phi_n(x_{kn}) - \varphi_n(x_{kn})],$$

also wegen (21) und (23)

$$(29)\qquad \int_{-1}^{+1}[\Gamma^*_{nr}(x,\xi)-\gamma_{nr}(x,\xi)]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\leqq\left(\frac{r\pi}{n}\right)^{r+1}$$

besteht.

Damit haben wir aber unseren Beweis noch nicht beendet, da im Intervall $(x_{\mu n}, x_{\mu+r,n})$ die Forderung $g_r(x,\xi)\leqq\Gamma^*_{nr}(x,\xi)$ nicht erfüllt ist. Daher müssen wir zu Γ^*_{nr} noch ein passend gewähltes Polynom addieren.

Wir bezeichnen mit $l_{kn}(x)$ die Lagrangeschen interpolatorischen Grundpolynome, die zu den Tschebyscheffschen Abszissen (4) gehören, d. h. $l_{kn}(x)$ ist das Polynom höchstens $n-1$-ten Grades mit

$$l_{kn}(x_{kn})=1 \quad\text{und}\quad l_{kn}(x_{in})=0 \qquad (i\neq k).$$

Nach einem Lemma von P. Erdős und P. Turán ([1], S. 529) besteht (auch für ein beliebiges Grundpunktsystem)

$$(30)\qquad l_{kn}(x)+l_{k+1,n}(x)\geqq 1 \qquad (x_{kn}\leqq x\leqq x_{k+1,n}).$$

Es sei jetzt

$$\omega_n(x)=\sum_{k=\mu}^{\mu+r-1}(l_{kn}(x)+l_{k+1,n}(x))^2.$$

Dann gilt wegen (30)

$$\omega_n(x)\geqq 1 \quad\text{für}\quad x_{\mu n}\leqq x\leqq x_{\mu+r,n}$$

und $\omega_n(x)$ ist für alle Werte von x positiv. Unter Anwendung von (27) und (28) erhält man hieraus, daß das Polynom höchstens $2n-1$-ten Grades

$$\Gamma_{nr}(x,\xi)=\Gamma^*_{nr}(x,\xi)+2\left(\frac{r\pi}{n}\right)^r\omega_n(x)$$

die Ungleichung (15) befriedigt. Es muß noch das Integral

$$\int_{-1}^{+1}[\Gamma_{nr}(x,\xi)-\gamma_{nr}(x,\xi)]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_{-1}^{+1}[\Gamma^*_{nr}(x,\xi)-\gamma_{nr}(x,\xi)]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+2\left(\frac{r\pi}{n}\right)^r\int_{-1}^{+1}\omega_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

abgeschätzt werden. Dies wurde für das erste Glied an der rechten Seite in Formel (29) erledigt. Zur Abschätzung des zweiten Gliedes beachte man, daß nach der Definition von $\omega_n(x)$

$$\omega_n(x_{kn})=\begin{cases}0 & \text{für}\quad k<\mu \quad\text{und}\quad k>\mu+r,\\ 1 & \text{für}\quad k=\mu \quad\text{und}\quad k=\mu+r,\\ 2 & \text{für}\quad \mu<k<\mu+r\end{cases}$$

gilt; $\omega_n(x)$ ist von höchstens $2n-2$-tem Grade. Somit erhält man aus der

Hermiteschen mechanischen Quadraturformel (16):

$$\int_{-1}^{+1} \omega_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2r\pi}{n},$$

also ist nach (29)

$$\int_{-1}^{+1} [\Gamma_{n\nu}(x,\xi) - \gamma_{n\nu}(x,\xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 5\left(\frac{r\pi}{n}\right)^{\nu+1}. \tag{31}$$

Zusammenfassend erhalten wir aus (18) und (31), indem wir $r = \left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ beachten, daß Polynome $\Gamma_{n\nu}(x,\xi)$ und $\gamma_{n\nu}(x,\xi)$ von niedrigerem Grade als $2n$ konstruiert wurden, für welche (15) besteht und

$$\int_{-1}^{+1} [\Gamma_{n\nu}(x,\xi) - \gamma_{n\nu}(x,\xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \begin{cases} 2\left(\frac{(\nu+2)\pi}{2n}\right)^{\nu+1} & \text{für gerade } \nu, \\ 5\left(\frac{(\nu+1)\pi}{2n}\right)^{\nu+1} & \text{für ungerade } \nu \end{cases} \tag{32}$$

gilt.

Der allgemeine Fall des Satzes I kann auf den somit erledigten speziellen Fall zurückgeführt werden. Die Funktion $f(x) \in K_\nu$ drücken wir mit der Taylorschen Formel aus:

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \cdots + \frac{f^{(\nu-1)}(-1)}{(\nu-1)!}(x+1)^{\nu-1} + \\ + \frac{1}{(\nu-1)!}\int_{-1}^{x} (x-\xi)^{\nu-1} f_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Hierbei ist $f^{(\nu-1)}(x)$ die Integralfunktion von $f_\nu(x)$, und diese letzte Funktion ist von beschränkter Schwankung. Mit einer partiellen Integration erhält man

$$\frac{1}{(\nu-1)!}\int_{-1}^{x} (x-\xi)^{\nu-1} f_\nu(\xi)\,d\xi = \frac{f_\nu(-1)}{\nu!}(x+1)^\nu + \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{x} (x-\xi)^\nu\, df_\nu(\xi) =$$

$$= \frac{f_\nu(-1)}{\nu!}(x+1)^\nu + \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} g_\nu(x,\xi)\, df_\nu(\xi)$$

und somit wird

$$f(x) = \Pi_\nu(x) + \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} g_\nu(x,\xi)\, df_\nu(\xi), \tag{33}$$

wobei $\Pi_\nu(x)$ ein Polynom höchstens ν-ten Grades bedeutet. Bekanntlich kann $f_\nu(x)$ in der Form

$$f_\nu(x) = h_1(x) - h_2(x)$$

dargestellt werden, wobei $h_1(x)$ und $h_2(x)$ monoton nicht abnehmende Funktionen sind, deren gesamte Schwankung gleich der Schwankung V_ν von $f_\nu(x)$ ist. Nun können wir die gesuchten Approximationspolynome $p_N(x)$ und $P_N(x)$ explizit angeben: es sei $N > \nu + 1$, $n = \left[\frac{N+1}{2}\right]$,

$$p_N(x) = \Pi_\nu(x) + \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} \gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_1(\xi) - \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} \Gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_2(x) \tag{34}$$

und

$$P_N(x) = \Pi_\nu(x) + \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} \Gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_1(\xi) - \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1} \gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_2(\xi). \tag{35}$$

Hierbei bedeutet (falls einige der x_{kn} mit Sprungstellen von h_1 oder h_2 zusammenfallen)

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_1(\xi) = \int_{-1}^{x_{1n}-0} \gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_1(\xi) +$$

$$+ \gamma_{n\nu}(x, x_{1n})\,[h_1(x_{1n}+0) - h_1(x_{1n}-0)] + \int_{x_{1n}+0}^{x_{2n}-0} \gamma_{n\nu}(x,\xi)\,dh_1(\xi) + \dots .$$

Die übrigen Integrale in (34) und (35) sind ähnlicherweise definiert.

Dann ist wegen (32)

$$\begin{aligned}(36)\qquad &\int_{-1}^{+1}\left[P_N(x) - p_N(x)\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1}{\nu!}\int_{-1}^{+1}\left\{\int_{-1}^{+1}\left[\Gamma_{n\nu}(x,\xi) - \gamma_{n\nu}(x,\xi)\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}\left[dh_1(\xi) + dh_2(\xi)\right] < \frac{C_\nu V_\nu}{N^{\nu+1}},\end{aligned}$$

wobei infolge $n = \left[\frac{N+1}{2}\right]$, $n \geqq \frac{N}{2}$, und

$$C_\nu = \begin{cases} \dfrac{2[(\nu+2)\pi]^{\nu+1}}{\nu!} & \text{(gerade } \nu\text{)}, \\[2ex] \dfrac{5[(\nu+1)\pi]^{\nu+1}}{\nu!} & \text{(ungerade } \nu\text{)} \end{cases} \tag{37}$$

ist. Damit sind wir mit dem Beweise fertig. Wir wollen den Satz I mit Angabe der Konstante nocheinmal formulieren:

Satz Ia. *Es sei im Intervall* $[a,b]$ $f \in K_\nu$ *und es sei* V_ν *die totale Schwankung von* $f_\nu(x)$ *in* $[a,b]$. *Dann gibt es Polynome* $p_N(x)$ *und* $P_N(x)$ *von höchstens N-tem Grade, so daß*

$$p_N(x) \leqq f(x) \leqq P_N(x) \tag{38}$$

für $a \leqq x \leqq b$ ist, und die Ungleichung

$$\int_a^b \left[P_N(x)-p_N(x)\right]\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \leqq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu}\frac{C_\nu V_\nu}{N^{\nu+1}} \tag{39}$$

besteht, wobei C_ν die in (37) *definierte Konstante bedeutet.*

II. Fehlerabschätzung mechanischer Quadraturverfahren.

Es soll jetzt ein mechanisches Quadraturverfahren betrachtet werden, welches das Integral

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$$

(wobei $w \in L$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion bedeutet) mit den Ausdrücken

$$Q_r(f)=\sum_{k=1}^{m_r}\lambda_{kr}f(\xi_{kr}) \qquad (r=1,2,\ldots) \tag{40}$$

approximiert. Es seien folgende zwei Voraussetzungen erfüllt:

a) $Q_r(f)$ ist interpolatorischer Art, d. h. es gibt eine monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge s_r, so daß $Q_r(f)$ die gewichteten Integrale von Polynomen höchstens s_r-ten Grades genau darstellt.

b) $Q_r(f)$ sei positiv, d. h. es seien

$$\lambda_{kn}>0 \qquad (k=1,2,\ldots,m_r;\; r=1,2,\ldots). \tag{41}$$

Aus einem Satze von L. FEJÉR [2] erhält man, daß unter diesen Bedingungen für jede beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$

$$\lim_{r\to\infty} Q_r(f)=\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$$

besteht. (FEJÉR betrachtete nur den Fall $w(x)\equiv 1$, die Verallgemeinerung bietet aber keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten.)

S a t z II. *Es seien*

$$w(x) \leqq \frac{M}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \tag{42}$$

$f \in K_\nu$, und wir bezeichnen die Schwankung von $f_\nu(x)$ in (a,b) mit $V_\nu(f)$. Dann ist

$$\left|Q_r(f)-\int_a^b f(x)w(x)dx\right| \leqq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu} M C_\nu \frac{V_\nu(f)}{s_r^{\nu+1}}. \tag{43}$$

Beweis: Es seien $p_{s_r}(x)$ und $P_{s_r}(x)$ die Polynome höchstens s_r-ten Grades, die infolge Satz Ia (38) und (39) erfüllen. Wegen (42) ist

$$\int_a^b \left[P_{s_r}(x)-p_{s_r}(x)\right] w(x)\,dx \leqq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu} M C_{\nu} \frac{V_{\nu}(f)}{s_r^{\nu+1}}.$$

Ferner erhält man unter Beachtung der Positivität von λ_{kn}

$$\int_a^b p_{s_r}(x)\,w(x)\,dx = Q_r(p_{s_r}) \leqq Q_r(f) \leqq Q_r(P_{s_r}) \leqq \int_a^b P_{s_r}(x)\,w(x)\,dx,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Es sei eine Schar positiver mechanischer Quadraturverfahren interpolatorischer Art besonders hervorgehoben. Es sei $\{t_n(x)\}$ die Folge der Orthogonalpolynome, die zu einer Gewichtsfunktion $w_1(x)$ gehören, und es seien $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ die Nullstellen von $t_n(x)$. Ferner seien $\{l_{kn}(x)\}$ die zu diesen Grundpunkten gehörigen Lagrangeschen interpolatorischen Grundparabeln, d. h. die Polynome höchstens $n-1$-ten Grades, für die

$$l_{kn}(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

besteht. Verfasser zeigte [6], daß die Beziehung

$$l_{kn}(x) = A_{kn} \sum_{\nu=0}^{n-1} t_{\nu}(x_{kn})\,t_{\nu}(x) \tag{44}$$

besteht, wobei die A_{kn} die Cotesschen Zahlen der Gauß—Jacobischen mechanischen Quadratur mit der Gewichtsfunktion $w_1(x)$ bedeuten:

$$A_{kn} = \int_a^b l_{kn}^2(x)\,w_1(x)\,dx > 0. \tag{45}$$

Es sei nun $w(x) = q(x)\,w_1(x)$ und wir betrachten das Quadraturverfahren mit den Cotesschen Zahlen

$$\lambda_{kr} = \int_a^b l_{kr}(x)\,w(x)\,dx. \tag{46}$$

Dieses Verfahren ist interpolatorisch mit $s_r = r-1$. Infolge (44) ist

$$\lambda_{kr} = A_{kr} \sum_{\nu=0}^{r-1} t_{\nu}(x_{kr}) \int_a^b t_{\nu}(x)\,q(x)\,w_1(x)\,dx.$$

Die Summe an der rechten Seite ist nichts anderes, als die $r-1$-te Partialsumme der Orthogonalentwicklung von $q(x)$ nach dem System $\{t_{\nu}(x)\}$ an der Stelle x_{kr}. Ist also $q(x) \geqq m > 0$ und ist die Orthogonalentwicklung in $[a, b]$ gleichmäßig konvergent, so sind alle λ_{kr} wenigstens für genügend große r positiv. Also gilt der

S a t z III. *Es sei*

$$w(x) = q(x)\, w_1(x), \quad q(x) \geqq m > 0 \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

und die Orthogonalentwicklung von $q(x)$ nach dem zur Gewichtsfunktion $w_1(x)$ in (a, b) gehörigen orthonormierten Polynomsystem $\{t_\nu(x)\}$ sei in (a, b) gleichmäßig konvergent. Dann ist das mechanische Quadraturverfahren über die Nullstellen von $\{t_\nu(x)\}$ mit den Cotesschen Zahlen (46) *interpolatorisch mit $s_r = r-1$, und wenigstens für genügend große r positiv.*

Besteht außerdem (42), so kann also der Fehler des Quadraturverfahrens für $r > R$ durch (43) abgeschätzt werden.

III. Bestimmung der bestmöglichen einseitigen Approximation in einigen Fällen.

Es sei

$$\varrho(x) = \varrho_0 \prod_{i=1}^{\mu} (x - \eta_i)$$

ein Polynom μ-ten Grades, dessen sämtliche Nullstellen η_ν reell und kleiner als a sind. Wir nehmen an, daß $\varrho(x)$ im $[a, b]$ positiv ist. Es sei ferner $w(x) \in L$ eine in (a, b) definierte, nichtnegative Gewichtsfunktion, die zugehörigen Orthogonalpolynome seien $\{t_\nu(x)\}$. Wir wählen eine Zahl A, so daß sämtliche Nullstellen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

von $\bar{t}_{n-1}(x) = t_n(x) + A t_{n-1}(x)$ in (a, b) fallen. (Für $A = 0$ ist das sicher erfüllt.) Wir konstruieren die Polynome $\bar{r}(x)$ und $\bar{R}(x)$ höchstens $2n + \mu - 2$-ten Grades, für welche

$$\bar{r}(\eta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$
$$\bar{r}(\xi_1) = \bar{r}(\xi_2) = \cdots = \bar{r}(\xi_k) = 0, \qquad \bar{r}(\xi_{k+1}) = \cdots = \bar{r}(\xi_n) = 1,$$
$$\bar{r}'(\xi_1) = \bar{r}'(\xi_2) = \cdots = \bar{r}'(\xi_{k-1}) = 0, \quad \bar{r}'(\xi_{k+1}) = \cdots = \bar{r}'(\xi_n) = 0,$$

bzw.

$$\bar{R}(\eta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$
$$\bar{R}(\xi_1) = \bar{R}(\xi_2) = \cdots = \bar{R}(\xi_{k-1}) = 0, \qquad \bar{R}(\xi_k) = \cdots = \bar{R}(\xi_n) = 1,$$
$$\bar{R}'(\xi_1) = \bar{R}'(\xi_2) = \cdots = \bar{R}'(\xi_{k-1}) = 0, \quad \bar{R}'(\xi_{k+1}) = \cdots = \bar{R}'(\xi_n) = 1.$$

Dann hat die Derivierte $\bar{r}'(x)$ $n-1$ vorgeschriebene Nullstellen, ferner muß es nach dem Satze von ROLLE im Inneren der Intervalle

$$(\eta_1, \eta_2), \ldots, (\eta_{\mu-1}, \eta_\mu), (\eta_\mu, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_{k-1}, \xi_k), (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}), \ldots, (\xi_{n-1}, \xi_n)$$

wenigstens einmal verschwinden; das sind insgesamt $2n + \mu - 3$ Nullstellen. Da der Grad von $\bar{r}'(x)$ diese Zahl nicht übersteigen kann, kann es weitere Nullstellen nicht geben. Hiermit is der Verlauf der Kurve von $\bar{r}(x)$ bestimmt;

es ist
$$\bar{r}(x) \leqq g_0(x, \xi_k) = \begin{cases} 0 & (x \leqq \xi_k), \\ 1 & (x > \xi_k), \end{cases}$$
und änlicherweise
$$\bar{R}(x) \geqq g_0(x, \xi_k).$$

Hieraus folgt, daß die Polynome höchstens $2n-2$-ten Grades
$$r(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\varrho(x)}, \quad R(x) = \frac{\bar{R}(x)}{\varrho(x)}$$
die Ungleichung

(47) $$r(x) \leqq U(x, \xi_k) \leqq R(x)$$

befriedigen, wo

(48) $$U(x, \xi_k) = \begin{cases} 0 & (x \leqq \xi_k), \\ \varrho^{-1}(x) & (x > \xi_k) \end{cases}$$

bedeutet. Nun gilt für jedes Polynom $\Pi_{2n-2}(x)$ höchstens $2n-2$-ten Grades
$$\int_a^b \Pi_{2n-2}(x) w(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \Pi_{2n-2}(\xi_\nu),$$
wobei λ_k die Cotesschen Zahlen der verallgemeinerten Gauß—Jacobischen mechanischen Quadratur mit den Grundpunkten ξ_k bedeuten. (Bekanntlich sind sämtliche λ_k positiv; vgl. FEJÉR [2].) Ist $\Pi_{2n-2}(x) \geqq U(x, \xi_k)$, dann erhält man hieraus infolge (47), (48) und der Positivität der Cotesschen Zahlen[4])
$$\int_a^b \Pi_{2n-2}(x)\, w(x)\, dx \geqq \sum_{\nu=k}^{n} \lambda_\nu \frac{1}{\varrho(\xi_\nu)}$$
und das Gleichheitszeichen findet statt, falls $\Pi_{2n-2}(x) \equiv R(x)$ ist. Ähnlicherweise bekommen wir, daß für Polynome $\Pi^*_{2n-2}(x)$ höchstens $2n-2$-ten Grades, die die Ungleichung $\Pi^*_{2n-2}(x) \leqq U(x, \xi_k)$ befriedigen,
$$\int_a^b \Pi^*_{2n-2}(x) w(x)\, dx \leqq \sum_{\nu=k+1}^{n} \lambda_\nu \frac{1}{\varrho(\xi_\nu)}$$
ist, und hier gilt für $\Pi^*_{2n-2}(x) \equiv r(x)$ ebenfalls das Gleichheitszeichen. Zusammenfassend, besteht der folgende Satz:

Satz IV. *Es sei $\{t_n(x)\}$ die Folge der Orthogonalpolynome, die zur Gewichtsfunktion $w(x)$ in (a, b) gehören. Die Nullstellen ξ_ν von $t_n(x) + A t_{n-1}(x)$ sollen sämtlich im Intervall (a, b) liegen. Dann bestehen für alle Polynome höchstens $2n-2$-ten Grades*
$$\Pi_{2n-2}(x) \geqq U(x, \xi_k)$$

[4]) Man beachte, daß aus (48) und der Stetigkeit von $\Pi_{2n-2}(x)$ folgt: $\Pi_{2n-2}(\xi_k) \geqq \varrho^{-1}(\xi_k)$.

bzw.

$$\Pi^*_{2n-2}(x) \leqq U(x, \xi_k)$$

die Ungleichungen

$$\int_a^b [\Pi_{2n-2}(x) - U(x, \xi_k)]\, w(x)\, dx \geqq \sum_{\nu=k}^{n} \lambda_\nu \frac{1}{\varrho(\xi_\nu)} - \int_{\xi_k}^{b} \frac{w(x)}{\varrho(x)}\, dx,$$

bzw.

$$\int_a^b [U(x, \xi_k) - \Pi^*_{2n-2}(x)]\, w(x)\, dx \geqq \int_{\xi_k}^{b} \frac{w(x)}{\varrho(x)}\, dx - \sum_{\nu=k+1}^{n} \lambda_\nu \frac{1}{\varrho(\xi_\nu)}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\Pi_{2n-2}(x) = R(x)$, *bzw.* $\Pi^*_{2n-2}(x) = r(x)$ *ist.*

Der genaue kleinste Wert der Approximation von beiden Seiten ist also

$$\int_a^b [\Pi_{2n-2}(x) - \Pi^*_{2n-2}(x)]\, w(x)\, dx \geqq \frac{\lambda_k}{\varrho(\xi_k)}.$$

Wir geben noch ein Beispiel speziellerer Art, wo die bestmögliche einseitige Approximation von $|x|$ (allerdings nur von der einen Seite) bestimmbar ist.

Es sei $(a, b) = (-1, 1)$, $w(x) \in L(-1, 1)$ eine gerade, nichtnegative Funktion und es seien $t_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die in $(-1, +1)$ zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehörigen Orthogonalpolynome. Die der Größe nach geordneten Nullstellen von $t_{2n+1}(x)$ seien

$$\zeta_{-n} < \zeta_{-n+1} < \cdots < \zeta_{-1} < \zeta_0 = 0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n.$$

Wir konstruieren das Polynom $\vartheta(x)$ höchstens $4n-1$-ten Grades mit

$$\vartheta(\zeta_{-k}) = -1, \quad \vartheta(\zeta_k) = 1, \quad \vartheta'(\zeta_{-k}) = \vartheta'(\zeta_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus Symmetriegründen wird $\vartheta(0) = 0$.

Der Verlauf dieses Polynoms ist im Wesentlichen derselbe, wie derjenige von $\varphi_n(x)$ in Gleichung (19) des I. Teiles dieser Arbeit, d. h.

$$\vartheta(x) \geqq -1 \quad \text{für} \quad x < 0,$$
$$\vartheta(x) \leqq 1 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Es gilt also im ganzen Intervall $(-1, +1)$:

$$x\vartheta(x) \leqq |x|. \tag{49}$$

Da der Grad von $x\vartheta(x)$ gleich $4n$, also kleiner als $4n+1 = 2(2n+1)-1$ ist, folgt aus der Gauß—Jacobischen mechanischen Quadraturformel, daß

$$\int_{-1}^{+1} x\,\vartheta(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\xi_k|$$

ist, wobei die $A_k > 0$ die Cotes—Christoffelschen Zahlen der Gauß—Jacobischen mechanischen Quadraturformel mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ bedeuten, deren Grundpunkte ζ_k sind. Andererseits, ist $\Pi_{4n+1}(x)$ ein beliebiges Polynom höchstens $4n+1$-ten Grades, welches die Ungleichung

$$\Pi_{4n+1}(x) \leqq |x| \tag{50}$$

in $(-1, +1)$ befriedigt, dann ist infolge der Positivität der A_k

$$\int_{-1}^{+1} \Pi_{4n+1}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=-n}^{+n} A_k \Pi_{4n+1}(\zeta_k) \leqq \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\zeta_k|.$$

Hieraus folgt der

Satz V. *Es seien $w(x) \in L$ eine gerade nichtnegative Funktion, $t_{2n+1}(x)$ das zur Gewichtsfunktion $w(x)$ in $(-1, +1)$ gehörige Orthogonalpolynom $2n+1$-ten Grades; die Nullstellen von $t_{2n+1}(x)$ seien ζ_k $(k = -n, -n+1, \ldots, n)$. Ist $\Pi_{4n+1}(x)$ ein Polynom höchstens $4n+1$-ten Grades, welches die Ungleichung* (50) *befriedigt, so besteht die Ungleichung*

$$\int_{-1}^{+1} [|x| - \Pi_{4n+1}(x)]\, w(x)\, dx \geqq \int_{-1}^{+1} |x|\, w(x)\, dx - \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\zeta_k|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn Π_{4n+1} gleich dem oben definierten Polynom $x\vartheta(x)$ ist.

IV. Restgliedabschätzung Tauberscher Sätze.

Dieser Teil der Arbeit ist einigen Verallgemeinerungen früherer Resultate des Verfassers (G. Freud [3], [4], [5]) gewidmet. In den erwähnten Arbeiten wurden im Wesentlichen nur die Folgerungen von (32) behandelt, hier wollen wir eine Konsequenz des Satzes I a betrachten. In den erwähnten Arbeiten beschäftigten wir uns mit speziellen Mittelbildungen; im folgenden wollen wir Taubersche Sätze untersuchen, die aus der Laplace—Stieltjes-Transformation auf die Asymptotik von Mittelbildungen allgemeiner Art schließt. Der Ausgangspunkt ist der folgende Satz von J. Karamata [9].

Es sei $\tau(t)$ eine in $(0, \infty)$ definierte, monoton nicht abnehmende Funktion, für welche das Laplace-Integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\tau(t) \tag{51}$$

für $s > 0$ konvergiert, und es sei

$$F(s) \approx A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}}.$$

Dann besteht für jede in $[0, 1]$ im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$

$$\int_0^\infty f\left(e^{-\frac{t}{x}}\right) e^{-\frac{t}{x}} d\tau(t) \approx A x^\alpha \int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

Wir zeigen, daß für $f \in K_\nu$ dieser Satz mit einer Restgliedabschätzung ergänzt werden kann.

Satz VI. *Es sei* $f \in K_\nu$ *und* $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, *ferner bestehe für das Laplace—Stieltjes-Integral* (51) *in der Nähe von* $s = +0$ *die Asymptotik*

$$F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} [1 + O\{R(s)\}], \tag{52}$$

wobei $R(s)$ *eine monoton wachsende Funktion mit* $R(+0) = 0$ *bedeutet, für welche für jedes positive* s *und eine passend gewählte positive Konstante* c_1

$$R(ks) < e^{c_1 k} R(s) \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{53}$$

besteht. Dann gilt

$$\int_0^\infty f\left(e^{-\frac{t}{x}}\right) e^{-\frac{t}{x}} d\tau(t) = A x^\alpha \left[\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} f(x)\, dx + O\left\{ \left(\log \frac{1}{R\left(\frac{1}{x}\right)} \right)^{-\nu-1} \right\} \right]. \tag{54}$$

Beweis. Infolge des Satzes I a gibt es Polynome $P_n(x)$ und $p_n(x)$ höchstens n-ten Grades mit

$$p_n(x) \leqq f(x) \leqq P_n(x) \tag{55}$$

und

$$\int_0^1 [P_n(x) - p_n(x)] \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \leqq \frac{c_2}{n^{\nu+1}}. \tag{56}$$

Hieraus folgt wegen $\alpha \geqq \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 [P_n(x) - p_n(x)] \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \leqq \frac{c_3}{n^{\nu+1}}. \tag{57}$$

Aus (52), (53), (55) und (57) schließt man ebenso weiter, wie in den Arbeiten [3] und [4] des Verfassers; die weiteren Einzelheiten des Beweises kann man Schritt für Schritt aus [3] und [4] übernehmen.

Literaturverzeichnis.

[1] P. Erdős—P. Turán, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 510—553.

[2] L. Fejér, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), 287—309.

[3] G. Freud, Restglied eines Tauberschen Satzes. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **2** (1951), 299—308.

[4] G. Freud, Restglied eines Tauberschen Satzes. II, *ebenda*, **3** (1952), 299—307.

[5] G. Freud, Restglied eines Tauberschen Satzes. III, *ebenda*, im Erscheinen.

[6] G. Freud, Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation, *ebenda*, **4** (1953), 137—142.

[7] A. A. Марков, О некоторых приложениях алгебрических непрерывных дробей (Петроград, 1884).

[8] J. Karamata, Über die Hardy—Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 519—520.

[9] J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **164** (1931), 27—29.

[10] С. Никольский, О наилучшем приближении функции, s-ая производная которой имеет разрыв первого порядка, Доклады Акад. Наук СССР, **55** (1947), 99—102.

[11] T. J. Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, *Annales de l'École Normale Sup.*, **1** (1884), 409—426.

[12] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (New York, 1939).

[13] H. Weyl, Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen*, **77** (1916), 313—352.

(Eingegangen am 1. Oktober 1954.)

Berichtigung zur Arbeit „Über einen Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen Lip α und Lip (β, p).“ *)

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Der angeführte Satz wurde von G. H. Hardy und J. E. Littlewood sogar mit der schärferen Aussage $g \in \mathrm{Lip}\left(\beta - \frac{1}{p}\right)$ bewiesen: A convergence criterion for Fourier series, *Math. Zeitschrift*, **28** (1928), 612—634, insbesondere S. 627—628. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes befindet sich in der Arbeit von Ya. L. Geronimus, Über Annäherungen im Mittel und gleichmäßige Annäherungen, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **88** (1953), 597—599 (Russisch).

*) *Diese Acta*, **15** (1954), 260.

Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen, insbesondere deren Äquivalenz.

Von A. MOÓR und GY. SOÓS in Debrecen.

Einleitung.

Zu Grunde gelegt sei eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit P_n. Die Punktmannigfaltigkeit P_n werden wir nun dadurch zu einer Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen H_n erweitern, daß wir zu jedem Punkt x^i von P_n alle den Punkt x^i enthaltende orientierte Hyperflächenelemente u_t hinzunehmen. Das Grundelement (x^i, u_t) des Raumes H_n ist also das Hyperflächenelement u_t mit dem Zentrum x^i.

Bei einer Koordinatentransformation

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{0, 1}$$

die wir immer als umkehrbar und eindeutig voraussetzen, transformieren sich die u_t wie kovariante Vektordichten vom Gewicht -1. Es wird also bei der Koordinatentransformation (0, 1)

$$\bar{u}_t = \Delta^{-1} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^t} u_p, \tag{0, 2}$$

wo

$$\Delta = \operatorname{Det}\left| \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} \right|, \quad \Delta^{-1} = \operatorname{Det}\left| \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \right| \tag{0, 3}$$

bedeutet.

Existiert in H_n eine metrische Grundfunktion

$$L = L(x, u),$$

die in den u_t positiv homogen von erster Dimension ist, und die das Oberflächenelement in der Form

$$dO = \frac{L(x, u)}{u_n} dx^1 \ldots dx^{n-1}$$

definiert, so ist H_n ein Cartanscher Raum. Die Geometrie der Cartanschen Räume hat L. BERWALD in einer fundamentalen Arbeit[1]) entwickelt. In einem

[1]) Vgl. [1], Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

Cartanschen Raum sind die Größen, die das invariante und das kovariante Differential der Vektoren und der Tensoren bestimmen, alle von der Grundfunktion $L(x, u)$ ableitbar.

Im folgenden wollen wir die Existenz einer metrischen Grundfunktion in unserem H_n nicht bedingen, wohl aber voraussetzen, daß ein invariantes Differential der Vektordichten existiert. Die Grundgrößen, die das invariante Differential der Vektordichten bestimmen, bilden also die Fundamentalgrößen des H_n.

H_n ist also eine „affine" Erweiterung des Cartanschen Raumes. In diesem Raum treten neben den Tensoren auch Tensordichten auf, deswegen werden wir in § 1 und § 2 für Vektordichten das invariante und das kovariante Differential angeben. In § 3 werden wir die fundamentalen Krümmungs-, und Torsionsgrößen dieses Raumes bestimmen, endlich in § 4 untersuchen wir das Äquivalenzproblem der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten der Hyperflächenelemente. Das wird uns eine Möglichkeit geben, die charakterisierenden Invarianten des Raumes zu bestimmen.

Wir werden dieses Problem in analoger Weise behandeln, wie Herr O. VARGA das entsprechende Problem der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen behandelt hat.[2])

§ 1. Invariantes Differential von Vektordichten.

In diesem § werden wir das invariante Differential von Vektordichten angeben. Die entsprechenden Formeln lassen sich dann leicht auch auf allgemeine Tensoren und Tensordichten erweitern. Sämtliche Größen von H_n sind erst in bezug auf ein Hyperflächenelement definiert; sie sollen in den u_i homogen von irgendwelcher ganzzahliger Dimension sein.

Die Formel des invarianten Differentials der Vektordichten ergibt auch das invariante Differential der Vektoren, wenn darin $p=0$ gesetzt wird. Vom invarianten Differential der Vektordichten fordern wir, daß es zu einer Vektordichte vom Gewicht p eine ebensolche Vektordichte zuordne, und die Gesetze des gewöhnlichen Differentials befriedige.

Das invariante Differential einer kontravarianten Vektordichte $\mathfrak{x}^i$ vom Gewicht p ist durch die Formel

$$(1,1)\qquad D\mathfrak{x}^i = d\mathfrak{x}^i + \Gamma_s{}^i{}_k \mathfrak{x}^s dx^k + \mathfrak{C}_s{}^{ik} \mathfrak{x}^s du_k - p\mathfrak{x}^i (\Gamma_t{}^t{}_k dx^k + \mathfrak{C}_t{}^{tk} du_k)$$

angegeben.[3]) Offensichtlich befriedigt die Operation „D" die Gesetze des gewöhnlichen Differentials; somit müssen wir nur noch zeigen, daß $D\mathfrak{x}^i$ eine Tensordichte vom Gewicht p ist.

---

[2]) Vgl. [4], § 4.

[3]) Wir werden die Vektor- und Tensordichten, falls $p \neq 0$ besteht, mit gotischen Buchstaben bezeichnen; wir bezeichnen nur das Grundelement u_i mit lateinischem Buchstaben.

Dazu gehen wir jetzt über. Wir definieren die Transformationsformeln der $\Gamma^{\,i}_{s\,k}$, $\mathfrak{C}_s{}^{i}{}_{k}$ in bezug auf (0, 1) durch folgende Transformationsgleichungen:

$$
\text{(1,2)} \quad \begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{\,i}_{s\,k} = \Gamma^{\,b}_{a\,c} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} - \mathfrak{C}_a{}^{bc} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^c} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^k} u_t - \\
- \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^a \partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}
\end{aligned}
$$

und

$$
\text{(1,3)} \qquad \overline{\mathfrak{C}}_s{}^{ik} = \Delta \mathfrak{C}_a{}^{bc} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^c}.
$$

Da das invariante Differential (1, 1) einer Vektordichte sich nicht ändern kann, wenn man die u_i durch ϱu_i $(\varrho > 0)$ ersetzt, müssen die $\Gamma^{\,i}_{s\,k}$ in den u_i homogen von nullter, die $\mathfrak{C}_s{}^{ik}$ homogen von (-1)-ter Dimension und $\mathfrak{C}_s{}^{io} = 0$ sein.

Wir nehmen an, dass die $\mathfrak{C}_s{}^{ik}$ die Relationen

$$
\text{(1,4)} \qquad \mathfrak{C}_s{}^{ok} = u_s \mathfrak{C}_t{}^{tk}
$$

befriedigen, die in dem metrischen Fall, also im Cartanschen Raum immer erfüllt sind. Dabei bedeutet das „o" jetzt und im folgenden stets die Überschiebung mit u_i. Aus (1, 2) folgt

$$
\text{(1,5)} \qquad \overline{\Gamma}^{\,t}_{t\,k} = \Gamma^{\,a}_{a\,c} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} - \mathfrak{C}_a{}^{ac} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^c} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^k} u_t + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \overline{x}^k};
$$

bei der Herleitung von dieser Transformationsformel haben wir noch die Relationen:

$$
\text{(1,6)} \qquad \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} = \delta^i_k, \qquad \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^t} \frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^l} = \delta^j_l
$$

benutzt, wo δ^i_k das Kroneckersche Symbol bedeutet.

Aus (1, 1)—(1, 6) folgt nun die Formel

$$
D\overline{\mathfrak{x}}^i = \Delta^p \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^t} D\mathfrak{x}^t,
$$

die ausdrückt, daß $D\mathfrak{x}^t$ eine Vektordichte vom Gewicht p ist, wie wir das gefordert haben.

Für eine kovariante Vektordichte lautet das invariante Differential:

$$
\text{(1,7)} \qquad D\mathfrak{x}_i = d\mathfrak{x}_i - \Gamma^{\,s}_{i\,k} \mathfrak{x}_s dx^k - \mathfrak{C}_i{}^{sk} \mathfrak{x}_s du_k - p\mathfrak{x}_i (\Gamma^{\,t}_{t\,k} dx^k + \mathfrak{C}_t{}^{tk} du_k).
$$

Wie es schon bemerkt wurde, erhält man das invariante Differential der Vektoren aus (1, 1) bzw. (1, 9), wenn man darin $p = 0$ setzt. Es wird z. B. für einen kontravarianten Vektor ξ^i:

$$
\text{(1,8)} \qquad D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^{\,i}_{j\,k} \xi^j dx^k + \mathfrak{C}_j{}^{ik} \xi^j du^k.
$$

Wenn die $\Gamma^{\,i}_{j\,k}$ und $\mathfrak{C}_j{}^{ik}$ von einer metrischen Grundfunktion ableitbar sind, also H_n ein Cartanscher Raum ist, dann ergibt (1, 8) eben das invariante Differential des Vektors ξ^i im Cartanschen Raum.

Aus den Gleichungen (1, 1) und (1, 7) kann man das invariante Differential einer allgemeinen Tensordichte schon ableiten, was wir aber jetzt nicht durchführen werden; wir verweisen aber darauf, daß die $\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ und $\mathfrak{C}_j^{\ ik}$ enthaltenden Glieder bei kontravarianten Indexen stets positive, bei kovarianten Indexen dagegen stets negative Vorzeichen erhalten. Ähnlich für Vektoren. Wir geben die folgende

D e f i n i t i o n: *Eine Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen heißt affinzusammenhängend, falls für sie Funktionen* $\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ *und* $\mathfrak{C}_j^{\ ik}$ *definiert sind, die den Transformationsgleichungen* (1, 2) *und* (1, 3) *und ferner die Relationen* (1, 4) *genügen.*

§ 2. Die kovariante Ableitung.

Die kovariante Ableitung spielt in der Tensorrechnung die Rolle der partiellen Ableitung. Angewandt auf einen Tensor läßt die kovariante Ableitung die kovariante Stufenzahl des Tensors um eins wachsen. In Bezug auf Tensordichten fordern wir von der kovarianten Ableitung:

1. sie soll die kovariante Stufenzahl einer Tensordichte vom Gewicht p und homogen in den u_i von ν-ter Dimension um eins erhöhen;

2. sie soll das Gewicht p und den Homogenitätsgrad ν unverändert lassen;

3. sie soll die gewöhnlichen Differentiationsregeln befriedigen;

4. für einen Vektor ξ^i, der in den u_i homogen von nullter Dimension ist, soll

$$\xi^i|_k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial u_s} \Gamma_{s\ k}^{*o} + \Gamma_{s\ k}^{*i} \xi^s \tag{2, 1}$$

sein, wo

$$\Gamma_{s\ k}^{*i} = \Gamma_{s\ k}^{\ i} + \mathfrak{C}_s^{\ ir} \Gamma_{r\ k}^{\ o} \tag{2, 2}$$

bedeutet. Aus den Formeln (1, 2)—(1, 4) folgt leicht, daß $\Gamma_{s\ k}^{*i}$ dieselbe Transformationsformel besitzt, wie der Übertragungsparameter eines affinzusammenhängenden Punktraumes P_n. Es ist also

$$\overline{\Gamma}_{s\ k}^{*i} = \Gamma_{a\ c}^{*b} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^b}{\partial \overline{x}^s \partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b}. \tag{2, 3}$$

Nach (2, 3) folgt nach einer kurzen Rechnung sofort, daß (2, 1) einen Tensor zweiter Stufe bestimmt.

Definiert man die kovariante Ableitung für Skalardichten, dann kann man nach den Forderungen 1—4 die kovariante Ableitung der Tensordichten explizite angeben.

Für eine Skalardichte $\mathfrak{t}$, die in u_t homogen von ν-ter Dimension, und vom Gewicht p ist, ist die kovariante Ableitung durch:

$$(2,4)\qquad \mathfrak{t}|_k = \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_s} \Gamma_{s}{}^{*o}{}_{k} - (p+\nu)\,\mathfrak{t}\,\Gamma_s{}^{*s}{}_k$$

definiert. In der Definition der kovarianten Ableitung könnte man im letzten Glied statt $\nu\mathfrak{t}$ auch

$$\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_i} u_i = \nu \mathfrak{t}$$

setzen. In dieser Weise definiert R. S. CLARK die kovariante Ableitung in allgemeinen metrischen Räumen, deren Grundelement also eine Vektordichte vom Gewicht $-p$ ist.[4]) Die von ihm angegebene Definition stimmt im wesentlichen mit der unsrigen überein, wenn darin $p=1$ und $\|^0 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ gesetzt wird.[5]) Im metrischen Fall steht aber statt u_i der Vektor l_i.

Wir beweisen jetzt, daß $\mathfrak{t}|_k$ die Forderungen 1—3 befriedigt, daß also auf $\mathfrak{t}|_k$ in bezug auf die Transformation (0, 1) die Transformationsformel:

$$(2,5)\qquad \bar{\mathfrak{t}}|_k = \Delta^p \mathfrak{t}|_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}$$

gültig ist (für Δ vgl. (0, 3)). Die Forderung 3 ist offensichtlich erfüllt. Beachtet man nun die Transformationsformel:

$$(2,6)\qquad \bar{\mathfrak{t}}(\bar{x}, \bar{u}) = \Delta^p \mathfrak{t}(x, u)$$

von $\mathfrak{t}$, ferner die aus (0, 2), wegen der Gleichungen (1, 6) folgenden Relationen:

$$(2,7)\qquad u_s = \Delta \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \bar{u}_r$$

und

$$\frac{\partial u_s}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^k} u_s + \Delta \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^s \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \bar{u}_m,$$

hierauf die aus (2, 6) und (2, 7) folgende Transformationsgleichung:

$$(2,8)\qquad \frac{\partial \bar{\mathfrak{t}}}{\partial \bar{u}_k} = \Delta^{p+1} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_s} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s},$$

so bekommt man nach einfachen Rechnungen eben die Formel (2, 5), w. z. b. w.

Nebenbei bemerken wir, daß die Gleichung (2, 8) eine wichtige Tatsache ausdrückt: *die partielle Ableitung einer Tensordichte nach* u_k *erhöht um eins die kontravariante Stufenzahl und auch das Gewicht;* selbstverständlich vermindert sich dabei der Homogenitätsgrad in der u_i um eins.

[4]) Vgl. [2], Gleichung (1. 10).

[5]) $-p$ bedeutet bei CLARK das Gewicht des Grundelementes; dies ist in unserem Fall -1.

Jetzt können wir die kovariante Ableitung einer Vektordichte bestimmen. Wir nehmen an, daß die Vektordichte $\mathfrak{T}^i$ in der Form:

$$\mathfrak{T}^i = \mathfrak{t}\xi^i \tag{2, 9}$$

angegeben ist, wo $\mathfrak{t}$ eine Skalarendichte vom Gewicht p und homogen ν-ter Dimension in den u_t ist, ξ^i aber einen Vektor homogen von nullter Dimension in den u_i darstellt. Es wird nach der Forderung 3 und (2, 9):

$$\mathfrak{T}^i|_k = \mathfrak{t}|_k \xi^i + \mathfrak{t}\xi^i|_k,$$

und nach den Gleichungen (2, 1) und (2, 4) wird:

$$\mathfrak{T}^i|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}^i}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k + \Gamma_s{}^{*i}{}_k \mathfrak{T}^s - (p+\nu)\mathfrak{T}^i \Gamma_s{}^{*s}{}_k. \tag{2, 10}$$

Wie man sich aus den entsprechenden Transformationsformeln leicht überzeugen kann, befriedigt (2, 10) die Forderungen 1—4 auch dann wenn $\mathfrak{T}^i$ nicht in der Form (2, 9) darstellbar ist.

In ähnlicher Weise kann man für eine kovariante Vektordichte die Formel:

$$\mathfrak{T}_i|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}_i}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k - \Gamma_i{}^{*s}{}_k \mathfrak{T}_s - (p+\nu)\mathfrak{T}_i \Gamma_s{}^{*s}{}_k \tag{2, 11}$$

erhalten[6]). Nach (2, 11) bekommt man

$$u_i|_k = 0,$$

da u_i eine Vektordichte vom Gewicht -1 ist; es ist also $p = -1$, $\nu = 1$.

Mit Hilfe der Relationen (2, 10) und (2, 11) kann man schon auf Grund der Forderung 3 leicht das kovariante Differential für allgemeine Tensordichten ableiten. Es ist z. B.:

$$\mathfrak{T}^i{}_j|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}^i{}_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}^i{}_j}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k + \Gamma_s{}^{*i}{}_k \mathfrak{T}^s{}_j - \Gamma_j{}^{*s}{}_k \mathfrak{T}^i{}_s - (p+\nu)\mathfrak{T}^i{}_j \Gamma_s{}^{*s}{}_k. \tag{2, 12}$$

§ 3. Charakterisierende Tensordichten des Raumes.

Zuerst werden wir in diesem Paragraphen die Formel des invarianten Differentials der Vektordichten, also (1, 1) bzw. (1, 7) umformen, dann wie gewöhnlich[7]), mit Hilfe von vertauschbaren Differentiationssymbolen die Torsions- und Krümmungsgrößen des Raumes ableiten, und zuletzt die Parallelübertragung von Vektordichten untersuchen.

Das invariante Differential von u_k ist nach (1, 7) wegen $p = -1$

$$\omega_k(d) \equiv Du_k = du_k - \Gamma_k{}^o{}_r dx^r + u_k \Gamma_t{}^t{}_r dx^r,$$

die man nach (2, 2) und (1, 4) auch in der Form:

$$\omega_k(d) = du_k - \Gamma_k{}^{*o}{}_r dx^r + u_k \Gamma_t{}^{*t}{}_r dx^r \tag{3, 1}$$

[6]) p bedeutet in (2, 11), wie vorher, das Gewicht, ν den Homogenitätsgrad in den u_t.

[7]) Vgl. [4], § 3, oder [1].

schreiben kann. Mit Hilfe der konvarianten Ableitung können wir dann (1, 1) und (1, 7) in der Form:

(3, 2a) $$D\mathfrak{x}^i = \mathfrak{x}^i|_m dx^m + \mathfrak{x}^{i;k}\omega_k(d)$$

(3, 2b) $$D\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_i|_m dx^m + \mathfrak{x}_i{}^{;k}\omega_k(d)$$

schreiben, wo

(3, 3a) $$\mathfrak{x}^{i;k} = \frac{\partial \mathfrak{x}^i}{\partial u_k} + \mathfrak{C}_r{}^{ik}\mathfrak{x}^r - p\mathfrak{x}^i\mathfrak{C}_t{}^{tk}$$

(3, 3b) $$\mathfrak{x}_i{}^{;k} = \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u_k} - \mathfrak{C}_i{}^{rk}\mathfrak{x}_r - p\mathfrak{x}_i\mathfrak{C}_t{}^{tk}$$

bedeutet. Offenbar sind (3, 3a) und (3, 3b) Tensordichten vom Gewicht $p+1$. Eine kleine Rechnung zeigt, daß das invariante Differential noch in der Form

(3, 4a) $$D\mathfrak{x}^i = d\mathfrak{x}^i + \mathfrak{x}^s\omega_s^i(d) - p\mathfrak{x}^i\omega_r^r(d)$$

bzw.

(3, 4b) $$D\mathfrak{x}_i = d\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_t\omega_i^t(d) - p\mathfrak{x}_i\omega_r^r(d)$$

angegeben werden kann, wo

(3, 5) $$\omega_i^t(d) = \Gamma^{*t}_{i\ k}dx^k + \mathfrak{C}_i{}^{tk}\omega_k(d)$$

bedeutet.

Sind d und δ miteinander vertauschbare Differentiationssymbole und D bzw. $\varDelta$ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so ist durch

$$\varDelta dx^i - D\delta x^i$$

in jedem Grundelement des Raumes ein kontravarianter Vektor definiert, da dx^i im wesentlichen einen kontravarianten Vektor darstellt. Es wird:

$$\varDelta dx^i - D\delta x^i = \Omega_j{}^i{}_k[dx^j dx^k] + \mathfrak{C}_j{}^{ik}[dx^j\omega_k(d)],$$

wo die eckigen Klammern die entsprechenden alternierenden Differentialformen bezeichnen [8]), und

(3, 6) $$\Omega_j{}^i{}_k = \frac{1}{2}(\Gamma^{*i}_{j\ k} - \Gamma^{*i}_{k\ j})$$

ist. Die Transformationsformel (2, 3) zeigt sofort, daß die $\Omega_j{}^i{}_k$ einen schiefsymmetrischen Tensor bestimmen. $\mathfrak{C}_j{}^{ik}$ ist nach (1, 3) eine Tensordichte vom Gewicht $+1$. Die Größen $\Omega_i{}^j{}_k$ und $\mathfrak{C}_i{}^{jk}$ charakterisieren somit die Torsion des Raumes. Verschwindet der Tensor $\Omega_i{}^j{}_k$, so ist der Zusammenhang symmetrisch. Im metrischen Fall ist immer

$$\Omega_j{}^i{}_k = 0.$$

Wir bestimmen jetzt die Krümmungsgrößen des Raumes. Dazu berechnen wir die Formel

$$(\varDelta D - D\varDelta)\mathfrak{x}_i,$$

[8]) Vgl. [1].

wo Δ und D zwei invariante Differentiationssymbole und $\mathfrak{x}_i$ eine kovariante Vektordichte bedeutet. Aus der Formel (3, 4b) erhält man nach einer längeren Rechnung

$$(3,7)\qquad (\Delta D - D\Delta)\mathfrak{x}_i = -\Omega_i^s \mathfrak{x}_s + p\mathfrak{x}_i \omega_r^{r\prime},$$

wo $\omega_r^{r\prime}$ die äußere Ableitung von ω_r^r bedeutet, und

$$(3,8)\qquad \Omega_i^s = [\omega_i^t \omega_t^s] - \omega_i^{s\prime}$$

ist; die Berechnung von (3, 8) ergibt

$$(3,9)\qquad \Omega_i^s = \frac{1}{2} R_{i\,mk}^{\,s}[dx^m dx^k] + \mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m}[dx^k \omega_m] + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_i^{smk}[\omega_m \omega_k],$$

wo

$$(3,10)\qquad R_{i\,mk}^{\,s} = \overline{R}_{i\,mk}^{\,s} - \mathfrak{C}_i^{st}\,\overline{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o}\,{}^{9)}$$

mit

$$(3,10^*)\qquad \begin{aligned}\overline{R}_{i\,mk}^{\,s} = {} & \frac{\partial \Gamma_{i\,m}^{*s}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{*s}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma_{i\,m}^{*s}}{\partial u_r}\Gamma_{r\,k}^{*o} - \\ & - \frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{*s}}{\partial u_r}\Gamma_{r\,m}^{*o} + \Gamma_{i\,m}^{*r}\Gamma_{r\,k}^{*s} - \Gamma_{i\,k}^{*r}\Gamma_{r\,m}^{*s},\end{aligned}$$

$$(3,11)\qquad \mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m} = \frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{*s}}{\partial u_m} - \mathfrak{C}_i^{sl} u_t \frac{\partial \Gamma_{l\,k}^{*t}}{\partial u_m} - \mathfrak{C}_i^{sm}|_k,$$

$$(3,12)\qquad \mathfrak{S}_i^{smk} = \frac{\partial \mathfrak{C}_i^{sm}}{\partial u_k} - \frac{\partial \mathfrak{C}_i^{sk}}{\partial u_m} + \mathfrak{C}_t^{sm}\mathfrak{C}_i^{tk} - \mathfrak{C}_t^{sk}\mathfrak{C}_i^{tm}$$

ist.

$R_{i\,mk}^{\,s}$ ist ein Tensor homogen von nullter Dimension in den u_i; $\mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m}$ ist eine Tensordichte vom Gewicht $+1$ und homogen von (-1)-ter Dimension in den u_i; $\mathfrak{S}_i^{smk}$ ist endlich eine Tensordichte vom Gewicht $+2$ und homogen von (-2)-ter Dimension in den u_i.

In einem Cartanschen Raum hat der dritte Krümmungstensor die Form

$$S_i^{smk} = A_t^{sm} A_i^{tk} - A_t^{sk} A_i^{tm}, \qquad A_i^{sm} = \frac{L}{\sqrt{g}}\mathfrak{C}_i^{sm}.$$

Nach Überschiebung mit l_s wird

$$S_i^{omk} = 0$$

bestehen. Überschieben wir (3, 12) mit u_s, so wird nach (1.4)

$$\mathfrak{S}_i^{omk} = \delta_i^k \mathfrak{C}_s^{sm} - \delta_i^m \mathfrak{C}_s^{sk} + u_i\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_s^{sm}}{\partial u_k} - \frac{\partial \mathfrak{C}_s^{sk}}{\partial u_m}\right) + \mathfrak{C}_i^{mk} - \mathfrak{C}_i^{km}.$$

Ist

$$\mathfrak{S}_i^{omk} = 0,$$

---

9) $\overline{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o} = \overline{R}_{t\,mk}^{\,i} u_i$; wir haben $\overline{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o}$ geschrieben, weil die Überschiebung mit u_i eine Tensordichte ergibt.

so folgt, wenn wir $i = m$ setzen und auf m summieren wegen (1, 4) und wegen der Homogenität (—1)-ter Dimension der $\mathfrak{C}_s^{sm}$ in der u_i:

$$(2-n)\mathfrak{C}_s^{sk} = \mathfrak{C}_m^{km};$$

das ist im Cartanschen Raum immer erfüllt[10]). Bei Beachtung von (3, 6) können wir den folgenden Satz aussprechen:

S a t z 1. *Die Verallgemeinerung des Cartanschen Raumes bildet derjenige Raum H_n, in dem die Relationen*

$$\Omega_j{}^i{}_k = 0, \quad \mathfrak{S}_i^{okm} = 0$$

erfüllt sind.

Nach der Gleichung (3, 8) wird das Glied $\omega_r^{r'}$ in (3, 7) durch die Formel

$$\omega_r^{r'} = -\Omega_r{}^r$$

bestimmt sein. Statt der Gleichung (3, 7) bekommt man somit

(3, 13) $$(\varDelta D - D\varDelta)\mathfrak{x}_i = -(\Omega_i^s + p\delta_i^s \Omega_r{}^r)\mathfrak{x}_s.$$

Den Krümmungstensor (3, 10*), der im folgenden noch eine wichtige Rolle spielen wird, kann man auch mit Hilfe der Vektordichten und der kovarianten Ableitung bestimmen. Aus den Gleichungen (2, 11) und (2, 12) bekommt man

(3, 14) $$\mathfrak{x}_i|_k|_l - \mathfrak{x}_i|_l|_k = -\overline{R}_i{}^j{}_{kl}\mathfrak{x}_j + \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u_j}\overline{\mathfrak{R}}_j{}^o{}_{kl} - 2\Omega_k{}^s{}_l \mathfrak{x}_i|_s,$$

wo $\Omega_k{}^s{}_l$ durch (3, 6) bestimmt ist.

Jetzt werden wir die Parallelübertragung der Hyperflächenelemente und der Vektordichten in unserem H_n untersuchen. Die Parallelübertragung definieren wir immer durch das Verschwinden des invarianten Differentials. Dementsprechend ist die Parallelübertragung der Hyperflächenelemente nach (3, 1) durch die Differentialgleichung

(3, 15) $$\omega_k(d) = 0$$

festgelegt. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen kann man aus

$$\delta\omega_k(d) - d\omega_k(\delta) = 0$$

bestimmen. Nach (3, 15) ist das gleichbedeutend mit

$$\varDelta\omega_k(d) - D\omega_k(\delta) = 0.$$

In Hinsicht auf (3, 15) erhalten wir als Integrabilitätsbedingungen die Gleichung

(3, 16) $$\overline{\mathfrak{R}}_i{}^o{}_{mk} - u_i \overline{R}_t{}^t{}_{mk} = 0.$$

Diese Gleichung beweist den

---

[10]) Vgl. [1], Gl. (5. 12). Im metrischen Fall steht aber statt der Tensordichte $\mathfrak{C}_i^{jk}$ immer der Tensor A_i^{jk}.

Satz 2. *Ein absoluter (vom Wege unabhängiger) Parallelismus der Hyperflächenelemente existiert in denjenigen affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen, wo die Gleichungen* (3, 16) *bestehen.*

Die Parallelübertragung der Vektordichten definieren wir durch die Gleichung

$$D\mathfrak{x}_i = 0. \tag{3, 17}$$

Wenn noch das Hyperflächenelement parallel mitgeführt wird, so muß außer der Gleichung (3, 17) auch (3, 16) erfüllt sein. Die Integrabilitätsbedingungen von (3, 17) lassen sich durch

$$(\varDelta D - D\varDelta)\mathfrak{x}_i = 0$$

angeben. Nach (3, 9), (3, 13) und (3, 15) kann man den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. *Existiert in H_n ein absoluter Parallelismus der Vektordichten, so muß*

$$R_j{}^i{}_{kl} + p\delta^i_j R_m{}^m{}_{kl} = 0$$

erfüllt sein. Wegen der Willkürlichkeit des Gewichtes p ist

$$R_j{}^i{}_{kl} = 0.$$

§. 4. Die Äquivalenztheorie.

Es sein zwei verschiedene affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen $\hat{H}_n$ und H_n angegeben. Die beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{H}_n$ und H_n sind äquivalent, wenn es eine Transformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \bar{u}_i = \varDelta^{-1} \bar{S}^j_i u_j, \tag{4, 1a}$$

$$\bar{S}^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad \varDelta^{-1} = \text{Det}\left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\right| \tag{4, 1b}$$

existiert, durch die die Größen $\hat{\mathfrak{C}}_m{}^{ij}$, $\hat{\Gamma}^{*i}_{m\,j}$ von $\hat{H}_n$ gemäß den Transformationsformeln (1, 3) und (2, 3) in $\mathfrak{C}_m{}^{ij}$, $\Gamma^{*}_m{}^i{}_j$ von H_n transformiert werden. Nebst $\bar{S}^j_i$ führen wir auch das zu $\bar{S}^j_i$ inverse System S^k_i durch die Gleichungen

$$\bar{S}^j_i S^i_k = \delta^j_k \tag{4, 2}$$

ein. Wegen (4, 1b) wird dann

$$S^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$$

sein; von der Transformation (4,1a) nehmen wir nämlich immer an, daß sie umkehrbar eindeutig ist.

Die Äquivalenzbedingungen stellen wir nun in folgender Form zusammen. Wegen (1, 6) wird

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p} = - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^p}.$$

Mit Hilfe dieser Identität können wir die Gleichung (2, 3) umformen; es wird:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^p} = \Gamma^{*\,t}_{r\ p} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^t} - \hat{\Gamma}^{*\,i}_{j\ k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p}.$$

Die Äquivalenzbedingungen sind:

$$(4,3) \qquad \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} = S^p_i, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} = \bar{S}^p_i$$

$$(4,4) \qquad \hat{\mathfrak{S}}_j^{\ ik} S^j_l = \Delta \mathfrak{S}_l^{\ mt} S^i_m S^k_t,$$

$$(4,5) \qquad \frac{\partial S^l_j}{\partial x^k} = \Gamma^{*\,i}_{j\ k} S^l_i - \hat{\Gamma}^{*\,l}_{m\ t} S^m_j S^t_k.$$

Die Gleichungen (4, 4) und (4, 5) sind also im wesentlichen äquivalent mit (1, 3) und (2, 3). Zu diesen Gleichungen kommen noch die folgenden:

$$(4,6) \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u_k} = 0,$$

$$(4,7) \qquad \frac{\partial S^p_i}{\partial u_m} = 0,$$

$$(4,8) \qquad S^p_i \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_k} = \delta^k_i \Delta^{-1},$$

oder nach (4, 2)

$$(4,8^*) \qquad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial u_k} = \Delta^{-1} \bar{S}^k_r,$$

$$(4,9) \qquad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x^l} \bar{S}^p_i u_p + \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{S}^p_i}{\partial \bar{x}^r} u_p S^r_l.$$

Die Gleichungen (4, 8) und (4, 8*) sind wegen (4, 2) äquivalent. Sie folgen unmittelbar aus (0, 2). Auch die Gleichung (4, 9) folgt aus (0, 2) nach partieller Ableitung nach x^l. Wir müssen also die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems (4, 3)—(4, 9) bestimmen. Dies wollen wir mit Hilfe eines für Punktmanningfaltigkeiten zu gleichen Zwecken verwendeten Satzes von O. VEBLEN und J. M. THOMAS[11]) über ein gemischtes Differentialgleichungssystem durchführen. Die bestimmenden Funktionen sind $\bar{x}^i$, $\bar{u}_i$ und S^i_j, die Veränderlichen x^i, u_r. Unter den Differentialgleichungen unseres Systems ist (4, 4) eine skalare Relation, zu der wir aber sofort noch eine hinzufügen

11) Vgl. [3].

können, denn wegen (4, 3) bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial S^l_j}{\partial x^k} - \frac{\partial S^l_k}{\partial x^j} = 0,$$

die nach (4, 5) und (3, 6) mit

$$\Omega_j{}^i{}_k\, S^l_i - \hat{\Omega}_m{}^l{}_t\, S^m_j\, S^t_k = 0 \tag{4, 10}$$

gleichbedeutend sind.

Das Veblen—Thomassche Verfahren ist nun das folgende: wir müssen die skalaren Relationen nach u_s, x^i ableiten, bei den anderen Gleichungen der ersten Gleichungskette (4, 3)—(4, 10) die Integrabilitätsbedingungen bilden. Somit erhalten wir eine neue Gleichungskette, von der man durch ein entsprechendes Verfahren wieder eine neue Gleichungskette gewinnt, u. s. w. *Existiert nun eine Zahl N von der Art, daß die aus den N ersten Gleichungsketten bestehenden Gleichungen verträglich sind und jede ihrer Lösungen die $(N+1)$-te Gleichungskette identisch befriedigt, dann ist das gemischte Differentialgleichungssystem lösbar.*

Differenziert man (4, 4) und (4,10) nach u_r, so wird wegen (4, 8*)

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{C}}_j{}^{ik}}{\partial \bar{u}_p}\, \bar{S}^r_p\, S^j_l = \varDelta^2 \frac{\partial \mathfrak{C}_l{}^{mt}}{\partial u_r}\, S^i_m\, S^k_t$$

oder nach Überschiebung mit S^q_r

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{C}}_j{}^{ik}}{\partial \bar{u}_q}\, S^j_l = \varDelta^2 \frac{\partial \mathfrak{C}_l{}^{mt}}{\partial u_r}\, S^i_m S^k_t S^q_r, \tag{4, 11}$$

und in ähnlicher Weise:

$$\varDelta \frac{\partial \Omega_j{}^i{}_k}{\partial u_r} S^l_i S^q_r - \frac{\partial \hat{\Omega}_m{}^l{}_t}{\partial \bar{u}_q} S^m_j S^t_k = 0. \tag{4, 12}$$

Die Ableitung von (4, 4) und (4, 10) nach x^t ergibt wegen der Homogenität in den u_i und nach

$$\frac{\partial \bar{S}^p_r}{\partial \bar{x}^m} = -\frac{\partial S^l_j}{\partial x^k}\, \bar{S}^k_m\, \bar{S}^p_l\, \bar{S}^j_r = \hat{\Gamma}^*{}_r{}^l{}_m\, \bar{S}^p_l - \Gamma^*_j{}^p{}_k\, \bar{S}^k_m\, \bar{S}^j_r, \tag{4, 13}$$

$$\bar{S}^p_l\, u_p = \varDelta \bar{u}_l, \tag{4,14}$$

die Relationen (vgl. §. 2)

$$\hat{\mathfrak{C}}_j{}^{ik}|_r\, S^r_t\, S^j_l = \varDelta \mathfrak{C}_l{}^{mr}|_t\, S^i_m\, S^k_r, \tag{4, 15}$$

$$\hat{\Omega}_m{}^l{}_r|_s\, S^s_t\, S^m_j\, S^r_k = \Omega_j{}^i{}_k|_t\, S^l_i. \tag{4, 16}$$

(Die Gleichung (4, 12) folgt aus (4, 2), und (4, 14) aus (4, 1a)).

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 5) sind

$$\frac{\partial^2 S^l_j}{\partial x^k\, \partial u_r} = \frac{\partial^2 S^l_j}{\partial u_r\, \partial x^k} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 S_j^l}{\partial x^k \partial x^r} = \frac{\partial^2 S_j^l}{\partial x^r \partial x^k}.$$

Die erste ergibt nach (4, 8*)

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{*l}_{m\,t}}{\partial \bar{u}_p} S_j^m S_k^t = \varDelta \frac{\partial \Gamma^{*i}_{j\,k}}{\partial u_r} S_i^l S_r^p, \tag{4, 17}$$

die zweite

$$\hat{\bar{R}}_{m\ tp}^{\ l} S_j^m S_k^t S_r^p = \bar{R}_{j\ kr}^{\ i} S_i^l. \tag{4, 18}$$

Bei der Herleitung der Formel (4, 18) haben wir außer den bisherigen Gleichungen statt (4, 9)

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x^l} = -\frac{\partial \log \varDelta}{\partial x^l} \bar{u}^r + \hat{\Gamma}^{*o}_{r\ t} S_l^t - \varDelta^{-1} \Gamma^{*o}_{s\ l} \bar{S}_r^s$$

benutzt, die aus (4, 1b), (4, 9) und (4, 13) unmittelbar folgt.

Die Gleichungen (4, 6)—(4, 9) geben keine neuen Integrabilitätsbedingungen, da diese entweder trivialerweise erfüllt werden, oder aus (4,18) folgen. Z. B. die Integrabilitätsbedingungen von (4, 9) ergeben die Relation

$$\hat{\bar{\Re}}_{a\ bc}^{\ o} S_m^a S_k^b S_l^c = \varDelta^{-1} \bar{\Re}_{m\ kl}^{\ o}.$$

Die erste Gleichungskette ist von den Gleichungen (4, 3)—(4, 10) gebildet worden. Die Gleichungen (4, 11), (4, 12), (4, 15)—(4, 18) bilden die zweite Gleichungskette. Wir müssen diese wieder nach u_r und x^i partiell differenzieren. Wir können dann leicht verifizieren, daß die partielle Ableitung unserer Gleichungen nach u_r immer solche Tensordichten ergibt, bei denen immer

$$p + \nu = 0 \tag{4, 19}$$

besteht, wenn p das Gewicht, ν den Homogenitätsgrad in den u_i bedeutet. Nach der Ableitung nach x^r erhält man immer die kovarianten Ableitungen der entsprechenden Tensoren. Wegen der Relation (4,19) wird die kovariante Ableitung der Tensordichten nach (2, 7) ebensolche Form haben, wie die kovariante Ableitung eines Tensors.

Wir sind jetzt imstande die folgenden zwei Sätze zu formulieren:

Satz 4. *Zwei affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen sind dann und nur dann äquivalent, wenn es eine Zahl N von der Art gibt, daß die N ersten aus* (4, 11), (4, 12), (4, 15)—(4, 18) *durch kovariante Ableitung bzw. gewöhnliche Ableitung nach u_r folgenden Gleichungsketten ein verträgliches Gleichungssystem für die $\bar{x}_i$, $\bar{u}_r$, S_j^i als Funktion der x^a, u_t bilden und daß jede Lösung dieses Systems die* $(N+1)$*-te Gleichungskette identisch befriedigt.*

Die genannten Gleichungen ergeben noch den

Satz 5. *Der Krümmungstensor* $\bar{R}_j{}^i{}_{km}$, *die Torsionsdichte* $\mathfrak{C}_j{}^{ik}$, *der Torsionstensor* $\Omega_k{}^i{}_m$, *die Tensordichte* $\dfrac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}_k{}^i{}_j}{\partial u_m}$ *und die daraus durch eine endliche Anzahl gewöhnlicher Ableitungen nach den* u_i *bzw. kovariante Ableitungen nach den* x^i *hervorgehenden Tensoren und Tensordichten bilden ein vollständiges Invariantensystem.*

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, **71** (1939), 191—298.

[2] R. S. Clark, The conformal geometry of a general metric space, *Proceedings London Math. Soc.*, (2) **53** (1951), 294—309.

[3] J. M. Thomas—O. Veblen, Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.*, **27** (1926), 279—296.

[4] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), 7—17.

(*Eingegangen am 28. Juli 1954.*)

On a new type of radical.[1])

By L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Introduction.

In the theory of noncommutative rings a central role is played by the radical of a ring R. The radical was first defined only in case R satisfied the minimum condition on one-sided ideals,[2]) but later it was extended in different ways to rings without finiteness assumptions.[3]) In such rings most definitions are based on the concept of nilpotency (either for ideals or elements) or quasiregularity. The main purpose of introducing a suitable radical is to obtain some structure theorems for rings having no radical in one sense or another. Hence one is inclined to feel the radical — to speak roughly — a certain measure of "irregularity" of the ring and therefore it is natural to expect that the radical should be zero if the ring is imbeddable in a skewfield, or more generally, if it is free of zerodivisors. Although the radical of N. JACOBSON has been proved to be the most useful radical in the most general case and, besides, the Jacobson radical has also an important group-theoretic interpretation,[4]) it may yet happen that in a domain of integrity, moreover, in a discrete valuation ring, the Jacobson radical does not coincide with the zero ideal.[5]) Therefore, it is justified to say that, in spite of its usefulness, the Jacobson radical is in certain cases superfluously wide.

The present note has for its aim to present a new type of radical, one which contains only zerofactors, but not necessarily exclusively nilpotent elements. We base our definition of radical on the concept of zerofactor, at first introducing a new notion called left- and right-zeroid which is a rather special

1) This paper is an extended version of my previous note [10] published in Hungarian. (Numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this paper.)

2) See KÖTHE [14], DEURING [8], ALBERT [1], VAN DER WAERDEN [21], PERLIS [20], JACOBSON [12], ARTIN—NESBITT—THRALL [2], Чеботарёв [7].

3) See BAER [3], JACOBSON [13], BROWN—MCCOY [5].

4) See FUCHS [11]. (In rings with one-sided identity the Jacobson radical corresponds to the Frattini subgroup of its additive group considered as an operator-group whose operator-domain is the ring itself.)

5) This is the case e.g. in the ring of all p-adic integers.

case of left- resp. right-zerofactor. Our radical will then be defined as the meet of the join of all left-zeroid and the join of all right-zeroid ideals. Many of the main properties of the known radicals retain their validity in the present case, but it will turn out that zerofactors are not so easy to handle, and therefore, our present treatment possesses mainly theoretical rather than practical interest.

After the definition, we shall prove in § 3 that our radical (which may be called the zeroid radical) is the intersection of certain (in general not all) prime ideals of the ring. The next § 4 is devoted to discussing the connections of the new radical with the old types. It will turn out that the zeroid radical in general properly contains the union of all nil ideals[6]) as well as the McCoy radical, but from the point of view of inclusion it has nothing to do with the Jacobson radical. As regards the residue class ring with respect to the radical, it remained an open question whether it is radical free or not; we have proved only that it contains no nonzero nil ideal. In § 6 we show that the minimum condition on one-sided ideals implies that the zeroid radical coincides with the classical one (the join of all nilpotent left ideals). The radical of a matrix ring will also be discussed; under a certain condition it consists of all matrices whose elements lie in the radical of the underlying ring. Finally, some remarks are added concerning the commutative case.

§ 2. Definition.

Let R be an arbitrary associative (but not necessarily commutative) ring. An element a in R is said to be a *left-zerofactor* (*l-zerofactor*) if there is a $b \neq 0$ in R such that $ab = 0$; b is then called a *right-annihilator* of a. If A is a nonvoid subset of R, in particular an ideal[7]) of R, then we call A *l-zerofactor* if each element of A is a l-zerofactor, and call A *annihilable from the right* if for some $c \neq 0$ in R we have $Ac = 0$.

If the ideal A has the property that $A+B$ is a l-zerofactor whenever B is a l-zerofactor ideal, then A will be called a *l-zeroid* (*left-zeroid*) ideal. It is obvious that a l-zeroid ideal is necessarily a l-zerofactor. The existence of l-zeroid ideals is guaranteed by the fact that in any ring the zero ideal 0 is a l-zeroid ideal.

The sum of two l-zeroid ideals is also one. For, suppose A and B are two l-zeroid ideals and C is any l-zerofactor ideal. As B is l-zeroid, $B+C$ is a l-zerofactor and hence, A being l-zeroid, $(A+B)+C = A+(B+C)$ is a l-zerofactor ideal. This proves that $A+B$ is l-zeroid, as stated.

---

[6]) An ideal is called a nil ideal if all of its elements are nilpotent. Observe that a nil ideal is not necessarily nilpotent.

[7]) Ideal will throughout mean twosided ideal. For right- resp. leftideal we shall write abbreviatedly r-ideal resp. l-ideal.

Hence it is easy to conclude that the join of all l-zeroid ideals is again a l-zeroid ideal. It will be called the *left-radical* of R and denoted by $Z^{(l)}$.

Changing the roles of left and right, we may introduce analogously the notion of r-zeroid ideals and then define the *right-radical* $Z^{(r)}$ of R as the join of all r-zeroid ideals.

The following example will serve to illustrate that in general the left- and right-radicals are different, moreover, it may happen that one of them properly contains the other. Let R be a ring whose additive group R^+ is a finite abelian group of type $(2, 2)$; a and b will denote the generator elements of the direct summands of R^+ in some direct decomposition. Let the multiplication in R be defined by $ax = x$ and $bx = x$ for all $x \in R$. Then $(a+b)x = 0$ for all $x \in R$. It is readily checked that in R the associative law of multiplication and both distributive laws hold, so that R is a ring of four elements. Now $a+b$ is a left-annihilator of R, i. e. $Z^{(r)} = R$. On the other hand we have $Z^{(l)} = \{0, a+b\}$ ($Z^{(l)}$ is at the same time the maximal nilpotent ideal in R), thus in this example $Z^{(l)} \subset Z^{(r)}$ holds.[8])

In order to obtain a radical which is left-right symmetric, we define the *radical* Z of R as the intersection of its left- and right-radicals:[9])

$$Z = Z^{(l)} \cap Z^{(r)}.$$

Z is the join of all ideals which are both l- and r-zeroid.

It is evident that $Z = R$ if and only if each element of R is both l- and r-zerofactor. Such a ring may be called a *radical ring*.

For the connection of our radical with the known types of radical we refer to § 4.

§ 3. The radical as the intersection of prime ideals.

W. Krull has proved [15] that in a commutative ring the sum of all nilpotent ideals, i. e. the nilpotent radical is the intersection of all prime ideals of the ring. This fact has been proved by McCoy in general rings for the radical introduced by him [18]. A similar result holds for the Jacobson radical in rings with onesided unit element [13]. The theorem we are going to prove shows that these results have an analogue in the case of the zeroid radical; indeed, Z is the intersection of certain prime ideals of the ring.

We call an ideal M *maximal l-zerofactor* (*r-zerofactor*) if it is maximal with respect to the property of being a l-zerofactor (r-zerofactor). Zorn's lemma ensures that every l-zerofactor (r-zerofactor) ideal belongs at least to one maximal l-zerofactor (r-zerofactor) ideal.

---

[8]) The sign $\subset$ is used to denote proper inclusion.

[9]) This definition is not entirely the same as given in [10]; there we have understood by the radical what we now call left-radical.

Theorem 1.[10]) *The left-radical $Z^{(l)}$ of R is equal to the intersection of all maximal l-zerofactor ideals M; these M are prime ideals.*

Suppose $Z^{(l)}$ does not belong to some maximal l-zerofactor ideal M. Then $Z^{(l)}+M$ is no l-zerofactor, in violation of the fact that $Z^{(l)}$ is a l-zeroid ideal. Hence $Z^{(l)}\subseteq M$ for all maximal l-zerofactor ideals M.

Conversely, if X is the intersection of all maximal l-zerofactor ideals and A is any l-zerofactor ideal, then some maximal l-zerofactor M contains A, and therefore $X+A\subseteq M$. This establishes that $X+A$ is a l-zerofactor, i. e. X is contained in $Z^{(l)}$, in fact.

What we have still to verify is the primeness of the maximal l-zerofactor ideals M, by a prime ideal being understood an ideal P with the property that the product of two ideals, X and Y, does not belong to P unless either X or Y belongs to P. Now, if neither X nor Y belongs to M, then both $X+M$ and $Y+M$ contain elements $x+m'$ and $y+m''$ $(x\in X, y\in Y, m', m''\in M)$, respectively, which are not l-zerofactors. If $XY\subseteq M$, then the product $(x+m')(y+m'')=xy+m$ $(m\in M)$ must be a l-zerofactor, say, annihilated by a from the right. Now either a is a right-annihilator of $y+m''$, or, if this is not the case, then $(y+m'')a\neq 0$ is a right-annihilator of $x+m'$. This contradiction establishes the prime character of the maximal l-zerofactor ideals.

Theorem 1 implies at once:

Theorem 1a. *The radical Z of R is the intersection of all maximal l-zerofactor and maximal r-zerofactor ideals which are necessarily prime ideals.*

On account of the fact that the residue class ring with respect to a prime ideal does not contain annihilable ideals, it follows from a general structure theorem of Birkhoff:[11])

Theorem 2. *The residue class ring R/Z of R with respect to the radical is a subdirect sum of rings without annihilable ideals.*

Calling a ring *semisimple* if its radical Z is 0, we have

Corollary. *A semisimple ring is a subdirect sum of rings without annihilable ideals.*

§ 4. Connections between the different radicals.

In this section the following known radicals will be considered: *the nilpotent radical N* (the join of all nilpotent ideals), *the nil radical U* (or *the upper radical* defined as the join of all nil ideals of the ring), *the McCoy*

[10]) In the commutative case this theorem may be found in [9], and in the noncommutative case a similar result is contained in Curtis' paper [6].

[11]) See Birkhoff [4], McCoy [17] and Brown—McCoy [5].

radical M (the set of all elements belonging to no m-system[12]) not containing 0) and *the Jacobson radical* J (the join of all right-quasiregular r-ideals). Before entering into the discussion of the connection of the zeroid radical with the mentioned radicals, we observe that in general rings the following inclusion relations are valid:

(1) $$N \subseteq M \subseteq U \subseteq J.$$

Indeed, the inclusion $N \subseteq M$ follows at once from the fact that M is the intersection of all prime ideals P of the ring,[13]) and therefore $A^s = 0 \subseteq P$ implies $A \subseteq P$, i. e. all nilpotent ideals are contained in M. To prove the second inclusion, observe that if for some $a \in R$ we have $a^n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then a maximal ideal P containing no power of a is prime. For, each proper overideal of P contains some power of a, and therefore the product of two such overideals[14]) is never contained in P. Consequently, only nilpotent elements may belong to $M = \bigcap_{\text{all primes } P} P$, and hence $M \subseteq U$.[15]) For the last inclusion of (1) we refer to JACOBSON's paper [13] where it is shown that each nilpotent element is right-quasiregular.

As regards the zeroid radical Z, from Theorem 1a it results immediately: $M \subseteq Z$. Moreover, we may prove the inclusion relation $U \subseteq Z$. To this end, let h be a nilpotent element and A a l-zerofactor ideal. If $h^n = 0$, then $a' = (h + a)^n$ $(a \in A)$ belongs to A, because each term in the expansion is either 0 or contains a as a factor. Hence some $b \neq 0$ annihilates a' from the right. Let l be the least exponent for which b is a right-annihilator of $(h+a)^l$. Then[16]) $(h+a)^{l-1} b \neq 0$ is a right-annihilator of $h+a$, i. e. $h+a$ is a l-zerofactor. Consequently, every nil ideal is l-zeroid, and similarly, r-zeroid. Hence $U \subseteq Z$, in fact.

A simple example will show that in general Z does not coincide with U, not even under the assumption of commutativity and maximal condition. For instance, let P denote the ring of all polynomials in two indeterminates u and v, with rational numbers for coefficients, and let R be the residue class ring $P/(u^2, uv)$ of P with respect to the ideal (u^2, uv). Then it is easy to see that $(u)/(u^2, uv)$ is the join of all nil ideals (= nilpotent ideals), while $(u, v)/(u^2, uv)$ is the zeroid radical of this ring.

In order to make clear that the direction in which the nil radical was extended by N. JACOBSON to his radical is quite different from ours, we show by examples that it may well happen that the zeroid radical Z properly con-

---

12) By an m-system S is meant a subset of the ring R with the property: $a, b \in S$ imply the existence of an $x \in R$ such that $axb \in S$.

13) For this result see McCoy [18].

14) Clearly, there is no loss of generality in confining ourselves to the overideals of P.

15) By LEVITZKI's result [16], M is the lower radical L of the ring in the sense of BAER [3] and since $L \subseteq U$ holds, the relation $M \subseteq U$ follows immediately from these well-known results. But it may easily be proved directly as shown in the text.

16) In case $l = 1$, put here simply b.

tains the Jacobson radical J as well as conversely, and in the most general case neither contains the other. For the possibility $J \subset Z$ the last example will serve where $J = (u)/(u^2, uv)$. To illustrate the case $Z \subset J$, let us consider the ring of rational numbers with odd denominators; a simple calculation shows that $J = (2)$, while Z is obviously 0.

Before illustrating the most general case, we prove a lemma which has its own interest too.

Lemma 1.[17]) *If R is the direct sum of a finite number of nonzero rings R_i (which are ideals in R),*

$$R = R_1 + \dots + R_n, \tag{2}$$

and $Z_i^{(l)}$ ($Z_i^{(r)}$) is the l-radical (r-radical) of R_i, then for the l-radical $Z^{(l)}$ of R we have

$$Z^{(l)} = \begin{cases} R \text{ if } Z_i^{(l)} = R_i \text{ for some } i = 1, \dots, n, \\ Z_1^{(l)} + \dots + Z_n^{(l)} \text{ if } Z_i^{(l)} \neq R_i \text{ for all } i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

and the same for the r-radical $Z^{(r)}$ of R.

It suffices to verify the statement for the l-radical $Z^{(l)}$. It is immediately seen that an element $a = a_1 + \dots + a_n$ of R ($a_i \in R_i$) is a l-zerofactor if and only if for at least one i the component a_i is a l-zerofactor in R_i. Hence it results that if $Z_i^{(l)} = R_i$ for some i, then every element of R is a l-zerofactor, i. e. $Z^{(l)} = R$. But if $Z_i^{(l)} \neq R_i$ for every i, then taking any l-zerofactor ideal B_i in each R_i, we see that if an ideal A is l-zeroid, then $A + B_i^*$ (where $B_i^* = R_1 + \dots + R_{i-1} + B_i + R_{i+1} + \dots + R_n$) must be a l-zerofactor from which we infer that $A_i + B_i$ (A_i the ith component of A in decomposition (2)) is a l-zerofactor, that is to say, A_i is a l-zeroid ideal in R_i. This implies the second alternative of the statement.

We also remark that if R is the (discrete) direct sum of an infinity of its subrings then R is a radical ring. In fact, in this case every element of R is a l-zerofactor as well as a r-zerofactor.

Now, from the lemma and the fact that the Jacobson radical of a direct sum of rings is the direct sum of the respective Jacobson radicals, we conclude that the direct sum of the two rings given as examples in the paragraph last but one before Lemma 1 is an instance for a ring in which none of the Jacobson radical and the zeroid radical contains the other.

What has been said about the connections of the different types of radical implies

Theorem 3. *In general rings for the different radicals the following situation holds:*

$$N \subseteq M \subseteq U \subseteq \begin{cases} J \\ Z. \end{cases}$$

[17]) Observe that Lemma 1 is not true for the radical Z in place of the l-radical.

§ 5. The residue class ring with respect to the radical.

The known types of radical have the property that the residue class ring with respect to the radical has zero radical where, obviously, both radicals are to be taken in one and the same sense. Whether or not the same result holds for the zeroid radical is an open question. Here we prove the following weaker result.

Theorem 4. *The nil radical of the residue class ring R/Z with respect to the zeroid radical Z of R is always zero.*

We show that if some ideal C/Z in R/Z is a nil ideal then $C/Z = Z/Z$. Let $c \in C$ and $c^k \in Z$. If A is a l-zerofactor ideal in R and $a \in A$, then $(c+a)^k \in Z+A$, i. e. $(c+a)^k$ and thus also $c+a$ is a l-zerofactor. Consequently, C is a l-zeroid ideal and analogously, a r-zeroid ideal, completing the proof.

§ 6. The radical of a ring with minimum condition on one-sided ideals.

Assume the ring R contains a unit element e and the r-ideals of R satisfy the minimum condition. We shall prove that in this case the zeroid radical Z contracts to the classical radical N, i. e. the join of all nilpotent r-ideals.

Before entering into the proof of this statement, let us remark that without the existence of a unit element e this assertion need not be true.[18]) If R_1, R_2 are simple rings (with minimum condition on r-ideals) such that $R_1^2 = 0$ and $R_2^2 = R_2$, then the nilpotent radical of $R_1 + R_2$ (direct sum) is R_1, while the zeroid radical coincides with the whole ring, in view of Lemma 1.

Recall that in a ring with minimum condition on r-ideals the nilpotent radical and the nil radical coincide, so that they are equal to the intersection of all prime ideals P of the ring.[19]) Therefore, if we can show that each prime ideal P is a l-zerofactor, then this will imply $Z \subseteq Z^{(l)} = \cap P = N$ (use Theorem 1) whence by Theorem 3 we shall obtain $Z = N$ and this will establish our assertion.

Let $P (\neq R)$ be a (prime) ideal in R. If P were not a l-zerofactor, then, by the minimum condition on r-ideals, there would be a minimal r-ideal Q_r which is contained in P and is not a l-zerofactor. Let c denote an element in Q_r which is not a l-zerofactor. Then, by minimality, we must have $Q_r = (c)_r$, the r-ideal generated by c. Further, $c(c)_r$ is a r-ideal in Q_r and, since it con-

[18]) From the discussions of this section it will be clear that instead of assuming the existence of an identity element it will suffice to suppose the presence of a right identity in the ring.

[19]) Cf. Theorem 3.

tains c^2, it is neither a l-zerofactor; consequently, we have

$$c(c)_r = (c)_r.$$

This equality ensures the existence of an element $q \in (c)_r = Q_r$ such that $cq = c$, that is, $c(q-e) = 0$. The last equation shows that c is a l-zerofactor, for q as an element of P is surely different from e. The contradiction completes the proof of

Theorem 5. *In a ring with unit element and minimum condition on r-ideals the radical Z coincides with the join of all nilpotent r-ideals.*

In view of this theorem we see that a ring with unit element is semi-simple in the classical sense (i. e. contains no nilpotent r-ideals other than 0 and satisfies the minimum condition on r-ideals) if and only if it contains no zeroid ideals different from 0 and satisfies the minimum condition on one-sided ideals.

Our last proposition may be generalized by demonstrating that *a ring which is regular in the sense of* J. v. NEUMANN [19] *has zero zeroid radical*, i. e. $Z = 0$. The proof is carried out by showing at first that each (prime) ideal P of a regular ring R is a l-zerofactor. If $a \in P$ then there is an $x \in R$ such that $axa = a$. Since $P \neq R$, we have $xa \neq e$ (the unity of R); consequently, $a(xa - e) = 0$, i. e. a is a l-zerofactor and hence $Z = M$ (the McCoy radical). By making use of Theorem 3, the proof will be completed by observing that the nil radical U of a regular ring is necessarily 0, for $(a)_r \neq 0$ contains the idempotent element ax.

§ 7. The radical of a matrix ring.

We remember that the ring of all $n \times n$ matrices over a ring R possesses the property that its nilpotent radical arises as the ideal of all matrices whose elements lie in the nilpotent radical of R. We next intend to show that the corresponding result for the zeroid radical can also be proved provided we make a further assumption on R (see (*) below).

For convenience, we introduce the following notations. If S is any ring, the complete matrix ring of order n over S will be denoted by S_n and the zeroid radical of S_n by $Z(S_n)$. It is readily seen that if A is an ideal in S then A_n is an ideal in S_n.

We suppose the ring R under consideration satisfies:

(*) $\left\{\begin{array}{l}\textit{If } A \textit{ is a } l\textit{-zerofactor } (r\textit{-zerofactor}) \textit{ ideal and } a_1, \ldots, a_m \textit{ is a finite} \\ \textit{subset of } A, \textit{ then there is an element } c \neq 0 \textit{ in } R \textit{ with the property} \\ a_i c = 0 \ (\textit{resp. } c a_i = 0) \textit{ for } i = 1, \ldots, m.\end{array}\right.$

In order to verify that under (*) we have $Z_n = Z(R_n)$, we first prove a simple lemma.

Lemma 2. *An ideal Ξ in the complete matrix ring R_n over R with property* (*) *is a l-zerofactor if and only if there exists a l-zerofactor ideal A in R such that $\Xi \subseteq A_n$.*

At first, in order to verify the sufficiency of the stated condition, suppose A is a l-zerofactor ideal and $\Xi \subseteq A_n$. If α is a matrix in Ξ, then the set of all elements of α is a finite set in A, consequently, by (*), there exists an element $c \neq 0$ in R which is a common right annihilator of this set. But then the diagonal matrix $\langle c, \ldots, c \rangle$ of order n annihilates α from the right.

We assume, conversely, that Ξ is a l-zerofactor ideal in R_n. Let A be the ideal in R generated by all the elements of the matrices in Ξ. Plainly, $\Xi \subseteq A_n$ and it is enough to show that A is a l-zerofactor. Let $a^{(\nu)} \in A$, so that $a^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + \cdots + a_{m_\nu}^{(\nu)}$ where, without loss of generality, we may suppose that $a_i^{(\nu)}$ is, say, an element standing in the $(j_{i\nu}, k_{i\nu})$ position of a matrix $\alpha_i^{(\nu)} \in \Xi$. If we denote by $(x)_{jk}$ the matrix with x in the (j, k) position and zeros elsewhere, then the matrices[20])

$$\beta_i^{(\nu)} = \sum_{s=1}^{n} (x_\nu)_{s j_{i\nu}} \alpha_i^{(\nu)} (y_\nu)_{k_{i\nu} s}$$

are readily seen to be diagonal matrices of the type $\langle x_\nu a_i^{(\nu)} y_\nu, \ldots, x_\nu a_i^{(\nu)} y_\nu \rangle$. All of $\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_{m_\nu}^{(\nu)}$ belong to Ξ, so that the same is true for

$$\beta^{(\nu)} = \beta_1^{(\nu)} + \cdots + \beta_{m_\nu}^{(\nu)} = \langle x_\nu a^{(\nu)} y_\nu, \ldots, x_\nu a^{(\nu)} y_\nu \rangle$$

and also for $\beta = \beta^{(1)} + \cdots + \beta^{(t)}$, i. e. β has a right annihilator matrix $\gamma \neq 0$ in R_n. Now, any nonzero element c of γ annihilates $\sum_{\nu=1}^{t} x_\nu a^{(\nu)} y_\nu$ from the right, showing that the ideal RAR is a l-zerofactor. We infer that $A^3 (\subseteq RAR)$ and hence A is a l-zerofactor ideal in R. This completes the proof of Lemma 2.

As an immediate consequence of this lemma we obtain that *A_n is a l-zerofactor ideal in R_n if and only if A is a l-zerofactor ideal in R.* This observation, together with the same on r-zerofactors, is important in the demonstration of

Theorem 6. *If R satisfies* (*), *then the radical of the ring of all matrices with elements in R consists of all matrices whose elements lie in the radical of R.*

Let $\Xi = Z(R_n)$ and A a l-zerofactor ideal in R. Thus A_n is a l-zerofactor ideal in R_n. As $\Xi + A_n$ must be a l-zerofactor ideal, by Lemma 2 there is some l-zerofactor ideal B in R such that $\Xi + A_n \subseteq B_n$. Since A was arbitrary, we conclude that $\Xi \subseteq Z_n^{(l)}$. By symmetry we have $\Xi \subseteq Z_n^{(r)}$ whence $\Xi \subseteq Z_n$.

---

[20]) x_ν and y_μ denote arbitrary elements of R.

On the other hand, if H is any l-zerofactor ideal in R_n, then by Lemma 2 we have $H \subseteq B_n$ for some l-zerofactor ideal B of R. Thus $Z_n + H \subseteq Z_n + B_n = (Z+B)_n$. Since $Z+B$ must be a l-zerofactor, we are led to the conclusion that $Z_n + H$ is a l-zerofactor ideal in R_n, i. e. $Z_n \subseteq Z^{(l)}(R_n)$. Similarly we have $Z_n \subseteq Z^{(r)}(R_n)$ and the theorem is proved.

§ 8. Remarks concerning commutative rings.

1. N. JACOBSON has proved that in an algebra over a field Φ the elements of his radical are either nilpotent or are transcendental over Φ. A similar result may be established for our radical in commutative algebras $\mathfrak{A}$ provided $\mathfrak{A}$ satisfies the trivial necessary condition of containing at least one regular (i. e. no zerofactor) element.

Theorem 7. *Let $\mathfrak{A}$ be a commutative algebra over a field Φ, with at least one regular element. Then besides the nilpotent elements only transcendental elements over Φ may belong to the radical Z of $\mathfrak{A}$.*

For, let a be algebraic over the underlying field Φ. Then the subalgebra $\mathfrak{B}$ generated by a has a finite basis over Φ and it follows at once the existence of an integer n such that $\mathfrak{B}a^n = \mathfrak{B}a^{n-1}$. Assume $a \in Z$, the radical of $\mathfrak{A}$, and $a^m \neq 0$ for each positive integer m. Then there is a y in $\mathfrak{B}$, and so in Z, satisfying $ya^n = qa^n$ with a regular element $q \in \mathfrak{A}$. Thus $(y-q)a^n = 0$, i. e. the ideal $(y-q)$ is a zerofactor. Since $(y) \in Z$, we obtain that the ideal $(y)+(y-q)$ is a zerofactor, which is absurd, q being a regular element belonging to it. This also shows that *if $\mathfrak{A}$ is algebraic, the radical of $\mathfrak{A}$ is the totality of the nilpotent elements.*

2. It is a well known fact that every ring can be represented as a subdirect sum of subdirectly irreducible rings.[21]) Therefore it might be of some interest to have information about the radical of a subdirectly irreducible ring. The result we find in the commutative case will show that the radical of such a ring has a very simple structure.

Theorem 8. *The radical of a subdirectly irreducible commutative ring consists of the set of all zerofactors.*

It suffices to prove that if both x and y are zerofactors, then the ideal $(x)+(y)$ is a zerofactor. But

$$C = 0:[(x)+(y)] = 0:x \cap 0:y \neq 0,$$

since $0:x$ and $0:y$ are ideals and the ring is by hypothesis subdirectly irreducible. Any nonzero element of C annihilates each element of $(x)+(y)$.

[21]) See McCoy [17], for instance.

It is easy to prove that the radical Z has now a nonzero annihilator. In fact, let y be any nonzero element of the intersection of all ideals $0:x$ where x runs over all elements of Z; then $Zy=0$. It also follows that Z is a prime ideal; indeed, it is the only maximal zerofactor ideal which is prime by Theorem 1.

Bibliography.

[1] A. A. Albert, *Structure of algebras*, American Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 24 (New York, 1939).
[2] E. Artin, C. J. Nesbitt and R. M. Thrall, *Rings with minimum condition* (Ann Arbor, 1946).
[3] R. Baer, Radical ideals, *American Journal of Math.*, **65** (1943), 537—568.
[4] G. Birkhoff, Subdirect unions in universal algebra, *Bulletin American Math. Soc.*, **50** (1944), 764—769.
[5] B. Brown and N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, *American Journal of Math.*, **69** (1947), 46—58.
[6] Ch. W. Curtis, On additive ideal theory in general rings, *American Journal of Math.*, **74** (1952), 687—700.
[7] Н. Г. Чеботарёв, Введение в теорию алгебр (Москва—Ленинград, 1949).
[8] M. Deuring, *Algebren*, Ergebnisse d. Math. u. Grenzgeb. vol. IV/1 (Berlin, 1939).
[9] L. Fuchs, On a special property of the principal components of an ideal, *Kgl. Norske Vid. Selsk. Forh.*, **22** (1949), 28—30.
[10] L. Fuchs, A radikálnak egy új definíciója (On a new type of radical), *Comptes Rendus du premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), 435—443.
[11] L. Fuchs, A remark on the Jacobson radical, *these Acta*, **14** (1952), 167—168.
[12] N. Jacobson, *The theory of rings*, Math. Surveys, vol. 2 (New York, 1943).
[13] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *American Journal of Math.*, **67** (1945), 300—320.
[14] G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 161—186.
[15] W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Annalen*, **101** (1929), 729—744.
[16] J. Levitzki, Prime ideals and the lower radical, *American Journal of Math.*, **73** (1951), 25—29.
[17] N. H. McCoy, Subdirect sum of rings, *Bulletin American Math. Soc.*, **53** (1947), 856—877.
[18] N. H. McCoy, Prime ideals in general rings, *American Journal of Math.*, **71** (1949), 823—833.
[19] J. von Neumann, On regular rings, *Proceedings National Acad. Sci. U. S. A.*, **22** (1936), 707—713.
[20] S. Perlis, A characterization of the radical of an algebra, *Bulletin American Math. Soc.*, **49** (1942), 128—132.
[21] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. 2 (Berlin, 1940).

(Received October 26, 1954.)

Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Alle Gruppen in dieser Arbeit, wenn nicht anderes gesagt wird, sollen endlich sein. Mit $o(G)$ bezeichnen wir die Ordnung einer solchen Gruppe G. Stets werde $G=AB$ angenommen, wobei A, B Untergruppen von G sind. Diese Gruppen G nennen wir faktorisierbar.

Bisher sind mehrere Arbeiten erschienen, welche die Nichteinfachheit der faktorisierbaren Gruppen untersuchen [1]—[7]. Wir schließen uns in dieser Arbeit teils diesen Untersuchungen an, teils untersuchen wir gewisse faktorisierbare Gruppen mit Zentrum.

Das im unten folgenden Satz 1 gelöste Problem hat uns freundlichst Herr N. Itô aufgeworfen.

Die Elemente einer vorgelegten Gruppe $G=AB(=BA)$ können wir als $a_i b_k$ und $b_l a_s$ $(a_i, a_s \in A; b_k, b_l \in B)$ darstellen. Ist $A \cap B = 1$, so durchläuft das Element a_i' in $a_i b = b_i a_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ zusammen mit a_i bei festem b $(b \in B)$ alle Elemente von A. Man bezeichne im allgemeinen Fall mit $[b]$ das durch b eindeutig bestimmte System der b_i in $a_i b = b_i a_i'$ $(i=1,2,\ldots)$; dabei zählen wir die Elemente b_i mit Multiplizität.

Dem Satz 1 schicken wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. *Ist $\bar{b} \in [b]$, so ist $[\bar{b}]=[b]$.*

Beweis. Wegen $b \in [b]$ gilt eine Gleichung $ab=\bar{b}a'$ $(a, a' \in A; b, \bar{b} \in B)$. Setzen wir das Element $b=a^{-1}\bar{b}a'$ in die Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ ein, so bekommen wir die Gleichungen $a_i a^{-1}\bar{b} = b_i a_i' a'^{-1}$, aus welchen die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *$[b]$ enthält seine Elemente mit gleicher Multiplizität.*

Beweis. Es ist evident, daß $b \in [b]$ gilt. Wir fassen die Gleichungen $\bar{a}_i b = b\bar{a}_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ unter allen Gleichungen $a_i b = b_i a_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ ins Auge. Gilt $b_i = b$ für alle i, so ist die Behauptung trivial. Es sei dann $a_k b = b_k a_k'$ eine Gleichung, wo $b_k \neq b$ gilt. Schreiben wir das Element $b = a_k^{-1} b_k a_k'$ in die rechte Seite jeder Gleichung $\bar{a}_i b = b\bar{a}_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ ein so bekommen wir die Gleichungen $a_k\bar{a}_i b = b_k a'_k \bar{a}'_i$ $(i=1,2,\ldots)$. Es folgt aus diesen Gleichungen, daß die Multiplizität von b_k in $[b]$ nicht kleiner ist, als die von b. Andererseits wählen wir die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}'_i$ $(i=1,2,\ldots)$ von den Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ aus. Schreiben wir das Element $b_k = a_k b a_k'^{-1}$ in die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}'_i$ $(i=1,2,\ldots)$ ein, so entstehen die Gleichungen $a_k^{-1}\bar{\bar{a}}_i b = b a_k'^{-1}\bar{\bar{a}}'_i$ $(i=1,2,\ldots)$; also ist die Multiplizität von b in $[b]$ nicht kleiner, als die von b_k. Somit haben wir Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir werden noch den folgenden bekannten Satz A benützen (s. [1] oder [2]).

S a t z A. *$G = AB$ ist nichteinfach, wenn $A \cap B$ einen Normalteiler $\neq 1$ von A oder B enthält.*

S a t z 1. *$G = AB$ ist nichteinfach, wenn A abelsch ist, B ein Zentrum* $(\neq 1)$ *hat und $o(A) \geqq o(B)$ gilt.*

B e w e i s. Ist $A \cap B \neq 1$, so ist $A \cap B$ ein Normalteiler von A, also ist G nach Satz A nichteinfach. Im übriggebliebenen Fall $A \cap B = 1$ sei $b(\neq 1)$ ein Element des Zentrums von B. In den Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ $(a_i, a'_i \in A;\ b, b_i \in B;\ i=1,\ldots,n;\ n=o(A))$ sind wegen $o(A) \geqq o(B)$ nicht alle b_i verschieden, folglich ist nach Hilfssatz 2 die Multiplizität von b in $[b]$ mindestens zwei. Die Gruppe A hat also zwei Untergruppen $\bar{A}, \bar{A}'(\neq 1)$, für welche $b^{-1}\bar{A}b = \bar{A}'$ gilt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

F a l l 1. $[b]$ erzeugt nicht die Gruppe B. In diesem Fall ergibt sich (mit Verwendung des Hilfssatzes 1) $A\{[b]\} = \{[b]\}A = A' \subset G$ ($\{\ldots\}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe), also ist $G = A'B$. Wegen $A' \cap B \ni b$ (b ist ein Zentrumelement von B) und nach Satz A ist die Gruppe G nichteinfach.

F a l l 2. $[b]$ erzeugt die Gruppe B. Wir werden mehrere Unterfälle unterscheiden:

a) Gilt $b_i = b$ $(i=1,\ldots,n)$, so ist $b^{-1}Ab = A$, also ist A Normalteiler von G.

b) Ist $[b] \ni b_l \neq b$, so ist $\bar{A} b_l b^{-1} = b_l b^{-1}\bar{A}$. Schreiben wir nämlich das Element $b = a_l^{-1} b_l a'_l$ in $\bar{A}b = b\bar{A}'$ ein, so ergibt sich $\bar{A}b_l = b_l\bar{A}'$. Aus dieser Gleichung und aus $\bar{A}b = b\bar{A}'$ folgt die Behauptung. Man sieht auch, daß $\bar{A}$ durch $b_l b^{-1}$ also auch durch alle Elemente von $[b_i b^{-1}]$ $(i=1,\ldots,n;\ b_i \in [b])$ in sich transformiert wird.

Man bezeichne mit B' die durch die Elemente sämtlicher $[b_i b^{-1}]$ $(i=1,\ldots,n)$ erzeugte Gruppe.

b$_1$) Ist $B' = B$, so ist die Gruppe $\bar{A}$ Normalteiler in G.

b$_2$) Ist $B' \subset B$, so gilt $B' \not\ni b$ (wegen $\{[b_1 b^{-1}],\ldots,[b_n b^{-1}], b\} \supseteqq \{b_1 b^{-1},\ldots,b_n b^{-1}, b\} \supseteqq \{[b]\} = B$). Es ist ferner klar, dass $\{[b_1 b^{-1}],\ldots,[b_n b^{-1}]\}\{b\} \supseteqq$

$\{b_1 b^{-1}, \ldots, b_n b^{-1}\}\{b\} \supseteqq \{[b]\} = B$ gilt, also ist $\{[b_1 b^{-1}], \ldots, [b_n b^{-1}]\}\{b\} = B$ und $AB' = B'A \neq G$. Folglich gelten $G = AB = (AB')(B'\{b\}), AB' \cap B'\{b\} = B'$. Die Gruppe B' ist Normalteiler in $B'\{b\} (= B)$, also ist G nach Satz A nichteinfach. Somit wurde Satz 1 bewiesen.

Bemerkung 1. In dem Beweis benützten wir nur die Eigenschaft der Abelschen Gruppe A, daß jede Untergruppe von A Normalteiler in A ist. Der Satz 1 gilt also auch im Fall, daß A eine Hamiltonsche Gruppe ist.

Bemerkung 2. In dem Beweis war die Bedingung $o(A) \geqq o(B)$ nur beim Beweis der Existenz einer Gleichung $b\bar{A}b^{-1} = \bar{\bar{A}}$ ausgenutzt ($\bar{A}, \bar{\bar{A}} \subset A$; b ist Zentrumelement von B). Folglich ist Satz 1 auch für die unendlichen G richtig, wenn „$o(A) \geqq o(B)$" durch folgende Bedingung ersetzt wird: A enthält zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Untergruppen, die durch ein Zentrumelement von B ineinander transformierbar sind.

Satz 2. *Man gebe die verschiedenen Zentrumelemente der (endlichen oder unendlichen) Gruppe $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ in der Form $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$ $(a_i \in A; b_i \in B; i = 1, 2, \ldots)$ an. Dann bilden die verschiedenen $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$ je eine Gruppe A' bzw. B', und die Gruppe $G' = \{a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\} = A'B'$ ist abelsch.*

Beweis. Den Satz werden wir in vier Schritten beweisen.

1. Es gilt $a_i b_i = b_i a_i$ wegen $a_i^{-1}(a_i b_i) a_i = a_i b_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$

2. Die $a_1, a_2, \ldots$ und die $b_1, b_2, \ldots$ bilden je eine Gruppe A' bzw. B', da $(a_i b_i)(a_k b_k) = a_k(a_i b_i) b_k = (a_k a_i)(b_i b_k)$, $(a_i b_i)^{-1} = (b_i a_i)^{-1} = a_i^{-1} b_i^{-1}$ ist.

3. Es ist $A'B' = B'A'$, da wegen $b_i a_k = b_i(a_k b_k) b_k^{-1} = (a_k b_k) b_i b_k^{-1}$ also $B'A' \subseteqq A'B'$ und ähnlich $A'B' \subseteqq B'A'$ gilt. Folglich ist $G' = A'B'$ eine Gruppe.

4. A', B' sind Normalteiler von G'. Aus $a_i(a_k b_k) = (b_k a_k) a_i$ folgt nämlich $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_k a_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Hiernach ist A', desgleichen auch B', in der Tat normal in G'. Also ist $G' = A'B'$ ein direktes Produkt. Einerseits bekamen wir $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_k a_i$, andererseits gilt auch $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_i a_k$, also gilt $a_k a_i = a_i a_k$. Damit ist der Beweis beendet.

Korollar. *Ist $G = AB$ endlich mit $A \cap B = 1$ und sind A, B ohne Zentrum, so ist die Ordnung des Zentrums von G höchstens $\sqrt{o(G)}$.*

In diesem Fall müssen nämlich die $a_1, a_2, \ldots$, desgleichen auch die $b_1, b_2, \ldots$ untereinander verschieden sein, denn ist z. B. $b_1 = b_2 = b$ also $a_1 \neq a_2$, so hat A wegen $a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 a_2^{-1} \neq 1$ ein Zentrum, was ein Widerspruch ist. Da also $o(A') = o(B') = o(Z)$ gilt, wo Z das Zentrum von G bezeichnet, so ist in der Tat $o(Z)^2 \leqq o(A) \cdot o(B) = o(G)$.

Literatur.

[1] O. ORE, Contributions to the theory of groups of finite orders, *Duke Math. Journal*, **5** (1938), 431—460.

[2] L. RÉDEI und J. SZÉP, On factorisable groups, *diese Acta*, **13** (1950), 235—238.

[3] J. SZÉP, On factorisable not simple groups, *diese Acta*, **13** (1950), 239—241.

[4] N. ITÔ, Remarks on factorisable groups, *diese Acta*, **14** (1951), 83—84.

[5] H. WIELANDT, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7.

[6] B. HUPPERT, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **59** (1953), 1—7.

[7] B. HUPPERT und N. ITÔ, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II, *Math. Zeitschrift*, **61** (1954), 94—99.

(Eingegangen am 1. August 1954.)

On a class of infinite products whose value can be expressed in closed form.

By MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

1. The familiar formula of WALLIS

$$(1) \qquad \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{\pi}{2}$$

gives a very simple, not-trivial example of an infinite product with well-known value. L. FEJÉR suggested the problem to find a possibly wide class of infinite products, including the WALLIS product, whose value can be expressed in finite form by means of the elementary functions.

In a previous paper[1]) I discussed the product

$$(2) \qquad P = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+\nu}}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+\nu}}$$

for fixed $\nu \geqq 1$, $\{a_n\}$ meaning a strictly increasing sequence of *positive* numbers; it was proved that P is convergent if and only if the series $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_{n+\nu}}{a_n} - 1\right)^2$ converges, and some formulae were deduced for the case of an arithmetical progression.

2. Now let d, A and D mean fixed *complex* numbers $\neq 0$, and let z be a complex variable. We denote by $\mathfrak{A}_\nu(z)$, $\mathfrak{G}_\nu(z)$ the arithmetic and geometric mean[2]), respectively, of $z, z+d, \ldots, z+(\nu-1)d$, and consider, for a fixed $\nu \geqq 2$, the product

$$(3) \qquad Q = \prod_{\substack{z=A+nD \\ n=0,1,2,\ldots}} \left(\frac{\mathfrak{A}_\nu(z)}{\mathfrak{G}_\nu(z)}\right)^\nu = \prod_{\substack{z=A+nD \\ n=0,1,2,\ldots}} \frac{\left(z+\dfrac{\nu-1}{2}d\right)^\nu}{z(z+d)\ldots(z+\overline{\nu-1}\,d)};$$

---

[1]) Cf. M. MIKOLÁS, Sur un produit infini, *these Acta*, **12 A** (1950), 68—72. — The auxiliary function used here, $\mathfrak{S}(t, \alpha) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{(n+\alpha)^2}\right)$, may be written also in the form $\Gamma(\alpha)^2/\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\alpha-t)$.

[2]) Any value of the νth root may be chosen.

Q may be regarded plainly as a generalization of the WALLIS product. — Let, for the sake of brevity, $\alpha = \frac{A}{D}$, $\delta = \frac{d}{D}$, $h = \frac{\nu - 1}{2}$.

We need the following well-known facts from the theory of the gamma-function:

(4) $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots),$$

(5) $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots),$$

(6) $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z \qquad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

(7) $$\prod_{\mu=0}^{\nu-1} \Gamma\left(z + \frac{\mu}{\nu}\right) = (2\pi)^h \nu^{\frac{1}{2} - \nu z} \Gamma(\nu z) \qquad (\nu z \neq 0, -1, -2, \ldots),$$

furthermore

(8) $$\Gamma(m) = (m-1)! \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

(9) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Theorem I. *The product* (3) *converges if and only if neither of the numbers* $\alpha + h\delta$, $\alpha + \mu\delta$ ($\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1$) *is* 0 *or a negative integer. In this case Q can be written in closed form by means of the gamma-function, namely*

(10) $$Q = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\delta)\cdots\Gamma(\alpha + \overline{\nu-1}\,\delta)\cdot\Gamma(\alpha + h\delta)^{-\nu}.$$

Especially, if $\delta = 1$, *we have for* $\nu = 2$

(11) $$Q = \alpha \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \right)^2$$

and for any $\nu > 2$

(12) $$Q = \frac{(\alpha+\nu-2)(\alpha+\nu-3)^2\cdots(\alpha+[h])^{2h-[h]}}{\alpha(\alpha+1)^2\cdots(\alpha+[h]-1)^{[h]}} \left(\frac{\Gamma(\alpha+[h])}{\Gamma(\alpha+h)} \right)^{\nu};\ ^{3)}$$

if $\delta = \frac{1}{\nu}$, (10) *becomes*

(13) $$Q = (2\pi)^h \nu^{\frac{1}{2} - \nu\alpha} \frac{\Gamma(\nu\alpha)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{h}{\nu}\right)^{\nu}};$$

in case $\alpha + h\delta = 1$ *we obtain by putting* $\Theta_\mu = 1 - (\alpha + \mu\delta)$

(14) $$Q = \prod_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-1} \frac{\pi\Theta_\mu}{\sin \pi\Theta_\mu},$$

provided that neither of $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *is an integer.*

---

[3]) $[h]$ denotes the integer part of h. — If ν is odd, the last factor in (12) (including gamma-values) may be plainly omitted.

Proof. 1° If one of $\alpha+h\delta, \alpha+\mu\delta$ $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$ is zero or a negative integer, then the nominator or denominator of

$$(15)\qquad Q_N=\prod_{n=0}^{N}\frac{(A+nD+hd)^\nu}{(A+nD)(A+nD+d)\cdots(A+nD+\overline{\nu-1}\,d)}=$$
$$=\prod_{n=0}^{N}\frac{(\alpha+h\delta+n)^\nu}{(\alpha+n)(\alpha+\delta+n)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta+n)}$$

vanishes for N sufficiently large, and so Q_N has the value 0, or it has no meaning, respectively.

Otherwise we write

$$Q_N=\frac{\{(\alpha+h\delta)(\alpha+h\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta+N)\}^\nu}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+N)\cdot(\alpha+\delta)(\alpha+\delta+1)\cdots(\alpha+\delta+N)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta+N)}=$$
$$=\left(\frac{(\alpha+h\delta)(\alpha+h\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta+N)}{N!\,N^{\alpha+h\delta}}\right)^\nu\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{N!\,N^{\alpha+\mu\delta}}{(\alpha+\mu\delta)(\alpha+\mu\delta+1)\cdots(\alpha+\mu\delta+N)}.$$

Here, by (4), every fraction has a limit as $N\to\infty$, moreover

$$(16)\qquad Q=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+h\delta+n)^\nu}{(\alpha+n)(\alpha+\delta+n)\cdots(\alpha+\overline{\nu-1}\,\delta+n)}=\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\Gamma(\alpha+\mu\delta).$$

2° Let $\delta=1$. For $\nu=2$ the last formula becomes at once (11) because of (5). — If $\nu>2$, we use the relation

$$(17)\qquad \Gamma(z)=(z-1)(z-2)\cdots(z-\lambda)\Gamma(z-\lambda)\qquad(\lambda=1,2,\ldots),$$

arising from (5) by repetition; considering that

$$\Gamma(\alpha+[h]+p)=(\alpha+[h]-1)\cdots(\alpha+[h])\Gamma(\alpha+[h])\qquad(p=1,2,\ldots,2h-[h]),$$
$$\Gamma(\alpha+[h]-q)=\{(\alpha+[h]-q)\cdots(\alpha+[h]-1)\}^{-1}\Gamma(\alpha+[h])\qquad(q=1,2,\ldots,[h]),$$

(16) may be written in the form (12).

Concerning (13), (14), we have only to put $\delta=\frac{1}{\nu}$, $\delta=\frac{1-\alpha}{h}$ in (16) and then to apply the multiplication theorem of Gauss (7), furthermore the functional equations (5), (6), respectively.

3. In some particular cases it is possible to find for Q a finite expression which is *free* from gamma-values. We have namely the following

Theorem II. *Assume that neither of $\alpha+h\delta$, $\alpha+\mu\delta$ $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$ is 0 or a negative integer. — On the basis of (5)—(9) exclusively, Q can be transformed into a closed analytical expression built from $2,\pi,\nu$, factorial numbers, and from α, δ by means of rational operations, square roots and the sine-function, if and only if at least one of the following conditions is satisfied: 1) δ is an integer and $(\nu-1)\delta$ is even, 2) $2\alpha+(\nu-1)\delta=K$, where K means an integer different from zero and the negative even numbers.*

Proof. Let α, $\alpha+\delta, \ldots, \alpha+(\nu-1)\delta$, $\alpha+h\delta$ be complex numbers, different from $0, -1, -2, \ldots$.

1° Suppose that δ and $h\delta$ are integers (i. e. $(\nu-1)\delta \equiv 0 \pmod 2$). Then it follows by (17) ($\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1$)

$$(18)\quad \Gamma(\alpha+\mu\delta)=\begin{cases}(\alpha+\mu\delta-1)(\alpha+\mu\delta-2)\cdots(\alpha+h\delta)\Gamma(\alpha+h\delta) & \text{if } (\mu-h)\delta>0,\\ \{(\alpha+\mu\delta)(\alpha+\mu\delta+1)\cdots(\alpha+h\delta-1)\}^{-1}\Gamma(\alpha+h\delta) & \text{if } (\mu-h)\delta<0,\end{cases}$$

so that we obtain from (10) by substitution and simplification with $\Gamma(\alpha+h\delta)^{\nu}$ a finite and in α, δ rational expression for Q.

Let $2\alpha+(\nu-1)\delta = K$ ($K = 1, 2, 3, \ldots; -1, -3, -5, \ldots$). This implies (cf. (5), (9))

$$(19)\quad \Gamma(\alpha+h\delta)=\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)=\begin{cases}(s-1)! & \text{for } K=2s \quad (s=1,2,\ldots),\\ 2^{-s}(2s+1)!!\sqrt{\pi} & \text{if } K=2s+1 \quad (s=0,1,2,\ldots),\\ (-2)^{s+1}\dfrac{\sqrt{\pi}}{(2s+1)!!} & \text{if } K=-(2s+1)\ (s=0,1,2,\ldots).\end{cases}$$

Next consider the product

$$(20)\qquad \Gamma(\alpha+\mu\delta)\Gamma(\alpha+\overline{\nu-\mu-1}\,\delta)=\Gamma(\alpha+\mu\delta)\Gamma(K-\alpha-\mu\delta)$$

with an integer μ, $0 \leqq \mu \leqq \nu-1$; the second term contains two factorial numbers if $\alpha+\mu\delta$ is a positive integer (cf. (8)), otherwise it can be represented, on the basis of (17) and (6), as a closed expression of π, α, δ by means of rational operations and sine-values.

2° Now, we should like to know *all* the cases, in which the right-hand side of (10) can be written by using (5)—(9) in form required above. As it is at once to see, in any case in question $\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\Gamma(\alpha+\mu\delta)$ must be reducible by (5), (6), (7) (in a definite number of steps) so that the closed expression obtained does not contain values of $\Gamma(z)$ except possibly those with $z = 1, 2, 3, \ldots; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$.

Concerning the factor $\Gamma(\alpha+h\delta)$, this implies plainly two possibilities: 1) it occurs only 'apparently', i. e. we can simplify with $\Gamma(\alpha+h\delta)^{\nu}$ (after transformations permitted) in the product mentioned; 2) $\alpha+h\delta$ is a positive integer or one of the fractions $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$, i. e.

$$\alpha+h\delta=\frac{K}{2}\quad (K=1,2,3,\ldots;-1,-3,-5,\ldots).$$

The case 1) can be realised only if any of the values $\Gamma(\alpha+\mu\delta)$ ($\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1$) can be written by (5) and (17), respectively, as a product of (18) type; but such a relation between $\Gamma(\alpha+\mu\delta)$ and $\Gamma(\alpha+h\delta)$ assumes that $(\mu-h)\delta$, and therefore, in particular, $(\mu+1-h)\delta-(\mu-h)\delta=$

$=\delta$ and $(\nu-1-h)\delta=\frac{1}{2}(\nu-1)\delta$ are integers $(\mu=0, 1, \ldots, \nu-1)$. Thus we have got the first condition of the theorem.

In the case 2) one has $2\alpha+(\nu-1)\delta=K$ $(K=1, 2, 3, \ldots; -1, -3, -5, \ldots)$, i. e. the second condition must be fulfilled.

This completes the proof.

4. We give a few examples.

(11) becomes for $\nu=2$ and $\alpha=\delta=1$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{m(m+1)}=\frac{4}{\pi}, \tag{21}$$

and with $\alpha=\frac{1}{2}$, $\delta=1$ the formula (1) of WALLIS.

From (13) it results by putting $\alpha=\frac{1}{2\nu}$

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)\nu]^{\nu}}{(2n\nu+1)(2n\nu+3)\cdots(2n\nu+2\nu-1)}=2^{\frac{\nu-1}{2}} \quad (\nu=2, 3, \ldots), \tag{22}$$

while for $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}$ we obtain

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[2(n+1)\nu]^{\nu}}{[(2n+1)\nu+1][(2n+1)\nu+3]\cdots[(2n+1)\nu+2\nu-1]}=(2\pi)^{h}\nu^{-\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(2\pi)^h h!}{\nu^{\frac{\nu}{2}}} & \text{for } \nu=3, 5, 7, \ldots, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}}(\nu-1)!! & \text{for } \nu=2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \tag{23}$$

Since we have, by (6) and (7),

$$\prod_{l=1}^{\nu-1}\sin\frac{l\pi}{\nu}=\frac{\nu}{2^{\nu-1}} \qquad (\nu=2, 3, \ldots), \tag{24}$$

(14) transforms itself for $\nu=2\varrho$, $\alpha=\frac{1}{2\varrho}$, $\delta=\frac{1}{\varrho}$ $(\varrho=1, 2, \ldots)$ into

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)\varrho]^{2\varrho}}{(2n\varrho+1)(2n\varrho+3)\cdots(2n\varrho+4\varrho-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)^{\varrho}(2\varrho-1)!!, \tag{25}$$

which is a remarkably simple generalization of (1) $(\varrho=1)$.

It may be mentioned that (25) follows easily also from (22) and (23) if we take $\nu=2\varrho$ and multiply the corresponding terms.

(Received January 21, 1955.)

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОСТОТЫ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ.

Г. Поллак (Сегед).

Упомянутая в заглавии теорема имеет несколько доказательств (см. литературный указатель в конце статьи), но, насколько нам известно, предлагаемое в настоящей работе доказательство является первым, которое пользуется методом математической индукции. Теорема, как известно, гласит:

Знакопеременная группа n-ого порядка $\mathfrak{A}_n$ $(n \geqq 5)$ проста.

Доказательство. Сначала докажем, что группа $\mathfrak{A}_5$ проста. В самом деле, пусть $\mathfrak{N}$ $(\neq 1)$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{A}_5$ и $p \in \mathfrak{N}$ $(p \neq 1)$. Порядок p может равняться 2, 3 или 5. Так как совокупность всех элементов одинакового порядка порождает всю группу $\mathfrak{A}_5$, то нам достаточно показать, что вместе с p все элементы того же порядка входят в $\mathfrak{N}$. Но если $o(p)=3$ или 5, то $3|O(\mathfrak{N})$ соответственно $5|O(\mathfrak{N})$ и так как $3^2 \not| O(\mathfrak{A}_5), 5^2 \not| O(\mathfrak{A}_5)$, то $3 \not| O(\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N})$ соответственно $5 \not| O(\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N})$. Отсюда следует, что фактор-группа $\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N}$ не содержит элементов третьего, соответственно пятого порядка, что влечет за собой верность нашего утверждения. Если же $p=(i_1 i_2)(i_3 i_4)$, то $\mathfrak{N}$ содержит вместе с ним и $p'=(i_1 i_2 i_3)\,p(i_3 i_2 i_1)=(i_1 i_4)(i_2 i_3)$ и так как p и p' порождают четверную группу Клейна, то $4|O(\mathfrak{N})$, $8 \not| O(\mathfrak{A}_5)$ и мы можем повторить рассуждения, примененные в случае $o(p)=3$ или 5.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{A}_n$ $(n>5)$. Предположим, что $\mathfrak{A}_{n-1}$ проста и $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{A}_n$. Обозначим через $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ знакопеременную группу подстановок номеров $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ $(i=1, \ldots, n)$. Так как $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ является нормальным делителем в $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$, то вследствие индукционного предположения возможен только один из случаев

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} = \begin{cases} 1 \\ \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} \end{cases} \tag{1}$$

для каждого i. Пусть сначала для какого-нибудь i имеет место (1_2). Тогда, так как при $n>5$ для $j \neq i$ имеет место $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)} \neq 1$, то и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)} \neq 1$ и следовательно также $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)}$. Но $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ и $\mathfrak{A}_{n-1}^{(j)}$ совместно уже порождают всю $\mathfrak{A}_n$ и поэтому $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}_n$. Если же для всех i имеет место (1_1), то это значит, что отличные от тождественной подстановки из $\mathfrak{N}$ не оставляют на месте ни одного номера. Пусть теперь $p \in \mathfrak{N}$, $p \neq 1$ и

$$p = (i_1 i_2 i_3 \cdots i_{k_1}) \cdots (i_{k_s+1} \cdots i_{n-1} i_n).$$

Тогда

$$p' = (i_1 i_2)(i_3 i_n)\, p (i_1 i_2)(i_3 i_n)$$

тоже входит в $\mathfrak{N}$ и подстановка pp' оставляет на месте i_2, но она не равна единице, так как она ввиду $n > 5$ переставляет i_n. Поэтому $\mathfrak{N}$ не может иметь отличных от 1 элементов. Тем самым мы доказали, что $\mathfrak{A}_n$ имеет только тривиальные нормальные делители, что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА.

M. Bauer, Über die alternierende Gruppe, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1934), 222—223.

А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953), 59—61.

L. Rédei, Die Einfachheit der alternierenden Gruppe, *Monatshefte für Math.*, **55** (1951), 328—329.

B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*. Bd. 1 (Berlin, 1930), 144—145.

(Поступило 15/II 1955 г.)

Über die starke Summation von Fourierreihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

§. 1. Einleitung.

Die Fourierreihe

$$\mathfrak{S}(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

der Funktion $f(x) \in L[0, 2\pi]$ nennen wir stark summierbar in r-ter Ordnung, oder einfacher H_r-summierbar im Punkte x_0, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x_0) - f(x_0)|^r = 0$$

ist, wo $s_\nu(f; x)$ die ν-te Teilsumme von $\mathfrak{S}(f)$ bezeichnet.

G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD[1]) haben bewiesen, daß für $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$ $\mathfrak{S}(f)$ in jedem Lebesgueschen Punkte p-ter Ordnung von $f(x)$ stark summierbar in beliebiger positiver Ordnung r ist. Im Falle $p = 1$ war die Gültigkeit dieses Satzes zweifelhaft gewesen, bis G. H. HARDY und J. E. LITLLEWOOD[2]) ein Beispiel einer integrierbaren Funktion gaben, die im Punkte $x = 0$ einen Lebesgueschen Punkt besitzt, aber deren Fourierreihe hier nicht H_1-summierbar ist; zugleich warfen sie das Problem auf, ob die Fourierreihe einer beliebigen integrierbaren Fnnktion in einer gewissen Ordnung fast überall stark summierbar sei. J. MARCINKIEWICZ[3]) hat diese Frage bejahend beantwortet; er hat gezeigt, daß die Fourierreihe einer beliebigen Funktion $f(x) \in L[0, 2\pi]$ fast überall H_2-summierbar ist. Später hat A. ZYGMUND[4]) bewiesen, daß die Fourierreihe sogar in beliebiger positiver Ordnung r H_r-summierbar ist.

---

1) G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, Note on the theory of series (IV.), On the strong summability of Fourier series, *Proceedings of the London Math. Society*, **26** (1927), 273—286.

2) G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, The strong summability of Fourier series, *Fundamenta Math.*, **25** (1935), 162—189.

3) J. MARCINKIEWICZ, Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *Journal of the London Math. Society*, **14** (1939), 162—168.

4) A. ZYGMUND, On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (II), *Proceedings of the London Math. Society*, **47** (1942), 326—350.

Da die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion nach dem erwähnten Beispiel von G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD in einem Lebesgueschen Punkte nicht notwendigerweise H_1-summierbar, ja auch nicht H_2-summierbar sein braucht, kann man die Frage stellen, ob man eine einfache analytische Bedingung für die Funktion angeben kann, die fast überall erfüllt ist, und aus derem Erfülltsein in einem Punkte x_0 die H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe der Funktion im Punkte x_0 folgt. Mit dieser Frage befassen wir uns in der vorliegenden Arbeit. Auf analoger Weise kann man auch die Frage der H_{2m}-Summierbarkeit (m positiv, ganz) behandeln, um einfacheres Rechnen willen beschränken wir uns jedoch auf den Fall der H_2-Summation.

§ 2. Sätze über integrierbare Funktionen.

Satz I. *Ist $f(t)$ nach 1 periodisch und $f(t) \in L[0,1]$, so ist in fast allen Punkten des Intervalls $[0,1]$, gleichmäßig in k (>0)*

$$(1) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3+hk} \int_{-h}^{h} |f(x+u)-f(x)|\,du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v)-f(x)|\,dv = 0 \quad (h>0).$$

Zum Beweis haben wir die folgenden zwei Lemmas von J. MARCINKIEWICZ[5]) nötig:

Lemma I. *Ist die Funktion $f^*(t) \in L[0,1]$ auf einer meßbaren Menge E $(\subseteqq [0,1])$ gleich 0, so gibt es für jedes positive η eine perfekte Menge $F \subseteqq E$ und eine positive Zahl M, so daß*

$$\operatorname{mes} F \geqq \operatorname{mes} E - \eta,$$

$$\int_{-k}^{k} |f^*(x+v)|\,dv \leqq Mk \qquad (x \in F)$$

und

$$\int_{I_\nu} |f^*(v)|\,dv \leqq M \operatorname{mes} I_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gelten, wobei die I_ν die Komplementär-Intervalle von F in $(0,1)$ bezeichnen.

Lemma II. *Sei $F \subseteqq [0,1]$ eine perfekte Menge, und seien I_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ die Komplementär-Intervalle von F in $[0,1]$. Wenn die nicht-negative, nach 1 periodische Funktion $\Phi(t)$ auf der Menge F gleich 0 ist, und $\Phi(t) = \operatorname{mes} I_\nu$ für $t \in I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist, dann besteht in fast allen Punkten x des Intervalls $[0,1]$*

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x+t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

[5]) Siehe z. B. l. c.[3]).

Beweis von Satz I. Ausführlich werden wir nur das Bestehen der Relation

(2) $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2+hk}\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,du \int_u^{u+k} |f(x+v)-f(x)|\,dv = 0 \qquad (h>0)$$

gleichmäßig in k (>0) in fast allen Punkten x zeigen. Auf Grund dieser ist der Beweis von (1) leicht zu vollbringen.

Sei η eine beliebige positive Zahl, und wählen wir ω so groß, daß die Menge $E = \underset{t}{E}[|f(t)| \leqq \omega;\ 0 \leqq t \leqq 1]$ der Bedingung

$$\text{mes } E \geqq 1-\eta$$

genügt. Sei

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{falls } |f(t)| > \omega, \\ 0 & \text{falls } |f(t)| \leqq \omega, \end{cases}$$

und sei $f^{**}(t) = f(t) - f^*(t)$.

Da auf der Menge E $f^*(t)=0$ ist, gibt es nach Lemma I eine perfekte Menge $F \subseteqq E$ und eine positive Zahl M, so daß

(3) $$\text{mes } F \geqq \text{mes } E - \eta \geqq 1-2\eta,$$

(4) $$\int_{-k}^{k} |f^*(x+v)|\,dv \leqq Mk \quad \text{für } x \in F$$

und

(5) $$\int_{I_\nu} |f^*(v)|\,dv \leqq M \text{ mes } I_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gelten, wo die $I_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die Komplementär-Intervalle von F in $(0, 1)$ bezeichnen.

Sei $x_0 \in F$ ein Punkt, für den die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(6) $$\lim_{h\to 0} \frac{\text{mes } (F \cap [x_0-h,\ x_0+h])}{2h} = 1 \qquad (h>0),$$

(7) $$\int_{-h}^{h} |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du = o(h) \qquad (0<h\to 0),$$

(8) $$\int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

Ferner sei ε eine beliebige positive Zahl, und $h_0 (>0)$ sei so klein, daß für $0 < h \leqq h_0 (\leqq 1)$ die Ungleichung

(9) $$\int_{-h}^{h} |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du < \varepsilon h$$

besteht.

Da $f(t)=f^*(t)+f^{**}(t)$ und $f^*(x_0)=0$ ist, gilt die folgende Abschätzung:

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv \leqq$$

$$\leqq \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv +$$

$$+\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f^{**}(x_0+v)-f^{**}(x_0)|\,dv = \mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2.$$

Da $|f^{**}(t)|\leqq\omega$ ist, folgt auf Grund von (9)

(10) $$\mathfrak{J}_2 \leqq 2\,\omega\varepsilon h k$$

für $0<h\leqq h_0$.

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv = \int_0^k |f^*(x_0+u+v)|\,dv \leqq \begin{cases} Mk & \text{falls } x_0+u\in F, \\ M(\operatorname{mes} I_\nu+k) & \text{falls } x_0+u\in I_\nu, \end{cases}$$

also

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv \leqq M\{\Phi(x_0+u)+k\},$$

wo $\Phi(t)$ die in Lemma II definierte Funktion ist. Aus dieser Ungleichung und aus (9) erhalten wir, für $0<h\leqq h_0$,

(11) $$\mathfrak{J}_1 < M\varepsilon h k + M\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du.$$

Offenbar haben wir

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du = \int_0^h u^2|f(x_0+u)-f(x_0)|\,\frac{\Phi(x_0+u)}{u^2}\,du \leqq$$

$$\leqq \sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu} (u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du,$$

wo sich die Summation auf die ν bezieht, für die $I_\nu\subseteqq[x_0, x_0+h]$ ist. Aus (6) folgt die Existenz einer positiven Zahl $N=N(x_0)$, für die $(b_\nu-x_0)/(a_\nu-x_0)\leqq N$ $(\nu=1,2,\dots)$ ist, und so gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu} (u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du \leqq N^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2}\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Da nach Definition der Funktion $\Phi(t)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2} \leqq \int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt$$

ist, ergibt sich auf Grund der obigen

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du \leqq N^2h^2\int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt\int_0^h |fx_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Daraus folgt auf Grund von (8), (9), und (11) für $0 < h \leqq h_0$

$$\mathfrak{J}_1 < A\varepsilon(h^3+hk),$$

wo A eine von ε, h und k unabhängige Zahl ist. Daraus und aus (10) bekommen wir endlich, daß im Punkte x_0 (2) erfüllt ist. Nach dem Lebesgueschen Satze und der Lemma II sind (6), (7) und (8) in F fast überall erfüllt, und so besteht auch (2) in F fast überall. Da η beliebig gewählt war, gilt wegen (3) auch (2) fast überall.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Man sieht den folgenden Satz leicht ein:

Satz II. *Sei $f(t) \in L[0,1]$ eine nach 1 periodische Funktion. Ist* (1) *im Punkte x_0 erfüllt, so ist der Punkt x_0 ein Lebesguescher Punkt der Funktion $f(t)$, d. h.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du = 0 \qquad (h>0).$$

Beweis. Ist fast überall $f(t)=f(x_0)$, so ist die Behauptung evident. Im entgegengesetzten Falle ist

$$a=\int_0^1 |f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv > 0$$

und so ergibt sich aus (1) für $k=\frac{1}{2}$

$$\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du = \frac{1}{a}\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}|f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv,$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 3. H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe von integrierbaren Funktionen.

Satz III. *Sei $f(x)$ eine nach 2π periodische Funktion, $f(x) \in L[0, 2\pi]$. Wenn die Relation* (1) *im Punkte x_0 erfüllt ist, dann ist $\mathfrak{S}(f)$ im Punkte x_0 H_2-summierbar.*

Beweis. Zum Beweis benützen wir den Grundgedanken eines Auf-satzes von G. GRÜNWALD[6]). Wir können offenbar annehmen, daß $x_0=0$ und $f(0)=0$ ist. Sei ε eine beliebige positive Zahl und δ $(0<\delta<\pi)$ so klein, daß im Falle $0<h\leqq 2\delta$ die Bedingungen

$$\int_{-h}^{h}|f(u)|\,du\int_{u-k}^{u+k}|f(v)|\,dv<\varepsilon(h^3+hk)\qquad (k>0) \tag{12}$$

und

$$\int_{-h}^{h}|f(u)|\,du<\varepsilon h \tag{13}$$

erfüllt sind.

Sei $f_1(t)=f(t)$ falls $|t|\leqq\delta$, und $f_1(t)=0$ falls $\delta<|t|\leqq\pi$, ferner sei $f_2(t)=f(t)-f_1(t)$. Nach dem Riemannschen Lemma ist

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(f_2;0)=0. \tag{14}$$

Da $s_\nu^2(f;0)\leqq 2(s_\nu^2(f_1;0)+s_\nu^2(f_2;0))$, und da nach (14)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^2(f_2;0)=0$$

ist, reicht es hin nur die H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe $\mathfrak{S}(f_1)$ in $x=0$ zu beweisen. Da

$$s_\nu^2(f_1;0)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)\,\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u\,\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}}\,du\,dv$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^2(f_1;0)=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)\,k_n(u,v)\,du\,dv \tag{15}$$

mit

$$k_n(u,v)=\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-v)}{\sin\frac{u-v}{2}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u+v)}{\sin\frac{u+v}{2}}\right].$$

Wir betrachten die Zerlegung

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)\,k_n(u,v)\,du\,dv=\left(\int_0^\delta\int_0^\delta+\int_0^\delta\int_{-\delta}^0+\int_{-\delta}^0\int_0^\delta+\int_{-\delta}^0\int_{-\delta}^0\right)f(u)f(v)k_n(u,v)\,du\,dv.$$

Um den Satz zu beweisen, ist es genügend zu zeigen, daß alle vier Glieder

[6]) G. GRÜNWALD, Über die Summabilität der Fourierschen Reihe, *diese Acta*, **10** (1941—43), 55—63.

der rechten Seite im absoluten Betrag kleiner als ε-mal eine von ε unabhängige Konstante sind, falls n genügend groß ist. Wir schätzen nur das Integral

$$\mathfrak{J} = \int_0^\delta \int_0^\delta f(u) f(v)\, k_n(u, v)\, du\, dv = 2 \int_0^\delta \int_0^u f(u) f(v)\, k_n(u, v)\, du\, dv$$

ausführlich ab. Die anderen Integrale können ähnlich abgeschätzt werden.

Sei n so groß, daß die Ungleichung $2\pi/n \leqq \delta$ besteht, und betrachten wir die folgenden Gebiete:

$$\sigma_1 = \underset{(u,v)}{E}[0 \leqq u \leqq 2\pi/n;\ 0 \leqq v \leqq u], \qquad \sigma_2 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ 0 \leqq v \leqq \pi/n],$$

$$\sigma_3 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ u - \pi/n \leqq v \leqq u], \quad \sigma_4 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ \pi/n \leqq v \leqq u - \pi/n].$$

In folgendem bezeichnen $c_1, c_2, \ldots$ von n und von δ unabhängige Konstanten. Es gelten die folgenden Ungleichungen[7])

$$|k_n(u, v)| \leqq \begin{cases} c_1 n^2 & \text{für } (u, v) \in \sigma_1, \\ c_2 \dfrac{1}{u^2} & \text{für } (u, v) \in \sigma_2, \\ c_3 \dfrac{1}{uv} & \text{für } (u, v) \in \sigma_3, \\ \dfrac{1}{nuv(u-v)} & \text{für } (u, v) \in \sigma_4. \end{cases}$$

Auf Grund dieser Ungleichungen ist

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}| \leqq 2c_1 n^2 \iint_{\sigma_1} |f(u) f(v)|\, du\, dv + 2c_2 \iint_{\sigma_2} \frac{|f(u) f(v)|}{u^2}\, du\, dv\, + \\ (16) \qquad + 2c_3 \iint_{\sigma_3} \frac{|f(u) f(v)|}{uv}\, du\, dv + \frac{2}{n} \iint_{\sigma_4} \frac{|f(u) f(v)|}{uv(u-v)}\, du\, dv = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 + \mathfrak{J}_4. \end{aligned}$$

Aus (13) folgt

$$(17) \qquad \mathfrak{J}_1 \leqq 2c_1 n^2 \int_0^{2\pi/n} |f(u)|\, du \int_0^{2\pi/n} |f(v)|\, dv < c_4 \varepsilon.$$

Auf Grund von (12) ergibt sich durch partielle Integration

$$(18) \qquad \mathfrak{J}_2 = 2c_2 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\, du \int_0^{\pi/n} |f(v)|\, dv < 2c_2 \varepsilon \frac{\pi}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\, du < c_5 \varepsilon.$$

---

7) Siehe z. B. l. c. 6).

Da im Gebiet σ_3 $v \geqq u - \frac{\pi}{n} \geqq \frac{u}{2}$ besteht, ist

$$\mathfrak{J}_3 \leqq 4c_3 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv.$$

Nach Einführung der Funktion

$$\psi(t) = \int_0^t |f(u)| du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv$$

erhält man aus (12) durch partielle Integration

$$\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv = \left[\frac{\psi(t)}{t^2}\right]_{2\pi/n}^{\delta} + 2\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^3} dt <$$

$$< c_6 \varepsilon + 2\varepsilon \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{t^3 + t\pi/n}{t^3} dt < c_7 \varepsilon + 2\varepsilon\pi/n \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < c_8 \varepsilon,$$

also ist

$$\mathfrak{J}_3 < c_9 \varepsilon. \tag{19}$$

Ist $v \leqq \frac{u}{2}$, so ist $u - v \geqq \frac{u}{2}$, und es gilt für $\mathfrak{J}_4$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_4 = \frac{2}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u} du \int_{\pi/n}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{v(u-v)} dv \leqq \frac{4}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{\pi/n}^{u/2} \frac{|f(v)|}{v} dv + \\ + \frac{4}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} \int_{u/2}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{(u-v)} du = \mathfrak{J}_1^* + \mathfrak{J}_2^*. \end{aligned} \tag{20}$$

Auf Grund von (13) ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du < c_{10} \varepsilon \frac{1}{v}.$$

Also folgt durch abermalige partielle Integration auf Grund von (13)

$$\mathfrak{J}_1^* = \frac{4}{n} \int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v} dv \int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du < \frac{c_{11}}{n} \varepsilon \int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v^2} < c_{12} \varepsilon. \tag{21}$$

Sei endlich p eine natürliche Zahl, für die $2^p\pi/n \leqq \delta < 2^{p+1}\pi/n$ ist. Dann gilt auf Grund von (12) die folgende Abschätzung:

$$\mathfrak{J}_2^* \leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\int_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}\frac{|f(u)|}{u^2}\,du\left(\sum_{j=0}^{i-1}\int_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}\frac{|f(v)|}{u-v}\,dv\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{n}{2^i\pi}\frac{n}{2^j\pi}\int_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}|f(u)|\,du\int_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}|f(v)|\,dv <$$

$$< \frac{c_{13}}{n}\,\varepsilon\sum_{i=1}^{p}2^i\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{2^j} + c_{14}\,\varepsilon\sum_{i=1}^{p}\frac{i}{2^i} < c_{15}\varepsilon.$$

Aus dieser und aus (21) gewinnen wir nach (20) $\mathfrak{J}_4 < c_{16}\,\varepsilon$. So ergibt sich endlich auf Grund von (16), (17), (18) und (19) $|\mathfrak{J}| < c_{17}\varepsilon$, wenn n genügend groß ist.

Damit haben wir Satz III vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 10. Februar 1955.)

Über orthogonale Reihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag.

1. Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein orthogonales und normiertes Funktionensystem im Intervall $[a, b]$. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten a_k, die der Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

genügen. Es sei gesetzt:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

und das n-te $(C, \alpha > 0)$-Mittel der Folge $\{[s_\nu(x) - f(x)]^2\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen wir mit $\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x)$, d. h.

$$\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - f(x)]^2,$$

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Ein bekannter Satz von A. ZYGMUND behauptet folgendes: wenn die Reihe (1) im Intervall $[a, b]$ fast überall zur Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist, dann gilt in $[a, b]$ fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - f]^2; x) = 0.\ ^{1)}$$

Es wirft sich die Frage auf, ob die stärkere Behauptung gilt, daß bei der selben Voraussetzung auch die (C, α)-Mittel $(0 < \alpha < 1)$ der Folge $\{[s_\nu(x) - f(x)]^2\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ in $[a, b]$ fast überall gegen 0 konvergieren. In Zusammenhang mit diesem Problem beweisen wir den folgenden Satz:

---

1) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356–362.

Satz. *Wenn die Reihe* (1) *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall zur Funktion* $f(x)$ $(C, 1)$-*summierbar ist, dann besteht in* $[a, b]$ *fast überall die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

2. Dem Beweise des Satzes schicken wir einen Hilfssatz voraus. Wir definieren eine Indexfolge m_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ folgenderweise: sei $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, und für $\nu > 1$, $2^m < \nu \leq 2^{m+1}$, sei $m_\nu = 2^m$.

Hilfssatz. *Es gilt fast überall im Intervall* $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0.$$

Zum Beweis des Hilfssatzes genügt es nach einem bekannten Satz[2]) zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} \tag{2}$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert. Da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2}{\nu} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} (a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

ist, so ergibt sich mit Anwendung des Konvergenzsatzes von B. Levi, daß die Reihe (2) fast überall konvergiert. Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

3. Beweis des Satzes. Auf Grund der elementaren Ungleichung $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$ erhält man:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) \leq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) + 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{m_\nu} - f]^2; x).$$

Nach einem bekannten Satze[3]) folgt aus unserer Voraussetzung $\lim_{m\to\infty} s_{2^m}(x) = f(x)$ fast überall in $[a, b]$, also konvergiert das zweite Glied an der rechten Seite fast überall in $[a, b]$ gegen 0, wenn $n \to \infty$. So ist auf Grund der obigen Ungleichung hinreichend zu zeigen, daß in $[a, b]$ fast überall

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0 \tag{3}$$

ist.

---

[2]) Siehe z. B. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935), Seite 43.

[3]) A. N. Kolmogorov, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

Da bekanntlich $A_{2^n}^{(\alpha)} \sim 2^{n\alpha}$ und so $A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \leqq c2^{n(\alpha-1)}$ für $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-1}$ besteht, gilt die folgende Abschätzung:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2;\, x) = O(1)\,\sigma_{2^n-1}^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2;\, x) +$$
$$+ \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2.$$

Unter Anwendung unseres Hilfssatzes ergibt sich, daß das erste Glied der rechten Seite fast überall in $[a, b]$ gegen 0 konvergiert, wenn $n \to \infty$. Um (3) zu beweisen reicht es also hin zu zeigen, daß das zweite Glied auch gegen 0 konvergiert, fast überall in $[a, b]$.

Hierzu genügt es aber zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 \tag{4}$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert. Da $A_k^{(\alpha)} \sim (k+1)^\alpha$, gewinnen wir durch gliedweise Integration

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx = \tag{5}$$
$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2).$$

Wir betrachten die folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) =$$
$$= (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} =$$
$$= (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} k^{\alpha-1} = O(1)\,(a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2).$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx \leqq M \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

und so folgt mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (4) in $[a, b]$ fast überall konvergiert.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 10. Februar 1955.)

On abelian groups whose subgroups are endomorphic images.

By L. FUCHS in Budapest, A. KERTÉSZ and T. SZELE in Debrecen.

To Professor László Kalmár on his 50th birthday.

§ 1. Introduction.

In a previous paper[1]) [4] we have stated the problem of determining all abelian groups G with

Property P. *Every subgroup of G is an endomorphic image of G.*

In paper [4] we have made the first step towards the solution of this problem by determining all abelian groups in which every finitely generated subgroup is an endomorphic image. A further progress was made by E. SĄSIADA [6] who has considered the same problem replacing the term "finitely generated" by "countable". Now, the present paper has for its aim to give the complete solution of the general problem. We shall arrive at the solution by making extensive use of the methods elaborated in [1], [2], [3], [8] and of the results contained in these papers. However, the present paper may be read also without being acquainted with the cited papers.

We state also the dual of our present problem: to find all abelian groups G every factor group of which is isomorphic to some subgroup of G. Here we omit this dual problem, but we intend to discuss it on another occasion.

The solution of our present problem is almost trivial for torsion free groups. In fact, it is easy to see that such a group G has property P if and only if it contains a direct summand[2]) which is the direct sum of infinite cyclic groups in number equal to the rank of G (see [6]); hence a torsion free group possesses "rarely" the property P. On the other hand, the solution of the stated problem for torsion or mixed groups is far from being

---

[1]) Numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this paper.

[2]) The group operation will be written as addition.

trivial. This assertion is justified by the fact that we need a number of deep results from the structure theory of these groups. Of fundamental importance are in our investigations the basic subgroups of abelian p-groups, discovered by L. KULIKOV [5], as well as two recent results on basic subgroups according to which a basic subgroup B of an abelian p-group G is always an endomorphic image of G, resp. a direct sum of cyclic groups is a homomorphic image of G if and only if it is a homomorphic image of B too ([3], [8]). Without the concept of basic subgroups it seems to be impossible to characterize all torsion and mixed groups with property P, so that also our investigations show how important a structure invariant is the basic subgroup in abelian p-groups. Some methods and results of [2] have also applications in our discussions.

Considering that a torsion group is of property P if and only if every primary component of it has the same property, the investigation of torsion groups may be reduced immediately to p-groups. The solution leads in this case to an interesting result. Namely, it will turn out that a p-group G is of property P if and only if its final rank equals the final rank of its basic subgroup B, the "final rank" being defined as the minimal cardinal number among the ranks of $G, pG, p^2G, \ldots$. Thus the sought criterion is merely the equality of two cardinal invariants of G (for which the sign $\geqq$ is true in every p-group), and therefore the possession of property P has no deep effect on the structure of the group; consequently, a great variety of p-groups has property P. In particular, a countable p-group almost always is of property P, the only exceptions are the direct sums of a bounded group and of one or more groups of type p^∞. Hence it results that every countable p-group is a homomorphic image of any countable unbounded p-group G of property P. More generally, if G is an arbitrary p-group of property P, then every p-group whose power does not exceed the final rank of G, is a homomorphic image of G. This statement will be a simple consequence of the fact that a p-group G is of property P if and only if $B \sim G$ where B is a basic subgroup G.[3])

In case G is a mixed group of property P, in investigating the structure of G a great role is played by the torsion subgroup T of G and by the factor group G/T, the latter being a torsion free group. It is worth while noticing that a sufficient condition for G being of property P is that both T and G/T have property P.[4]) However, this condition is not necessary: it is

[3]) Since we have always $G \sim B$, therefore each p-group G of property P which is no direct sum of cyclic groups yields a pair of groups, namely G and B, such that $G \sim B$ and $B \sim G$, but G and B are not isomorphic.

[4]) Of course, a necessary and sufficient condition for G/T to have property P is that G/T contain a direct summand of the form $\sum_{\mathfrak{r}} C(\infty)$, and this requirement is equivalent to the same requirement on G in place of G/T. ($\mathfrak{r}$ is the torsion free rank of G.)

enough to know only of those primary components of T that they have property P whose final ranks exceed the torsion free rank of G. Although this result seems to be rather natural in view of the results on torsion and torsion free groups, its proof is not easy at all, since it needs certain rather deep results on mixed groups.

We may mention an interesting consequence of our results. We may ask for all abelian groups G with

Property P′. *Every subgroup, which is a direct sum of cyclic groups in G, is an endomorphic image of G.*

Evidently, a group G with property P has also property P′. Now our results will imply that the converse is also true and so, for an abelian group, the properties P and P′ are equivalent.

§ 2. Preliminaries.

By a group we shall mean throughout an additive abelian group with more than one element. Groups will be denoted by Latin capitals, their elements by the letters $x, a, \ldots, g$, while i, j, k, m, n will mean as usual rational integers, in particular, p a prime and the sequence $p_1, p_2, p_3, \ldots$ the set of all rational primes. Small Gothic types such as $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{r}$ denote cardinal numbers.

By $O(a)$ we denote the order of a group element a. For a subset S of a group $G, \{S\}$ and $|S|$ will denote the subgroup generated by S and the cardinality of S, respectively. The sign "$+$" is used to denote (besides group operation) direct sum and, for a cardinal number $\mathfrak{m}$,

$$\sum_{\mathfrak{m}} M$$

means the (discrete) direct sum of $\mathfrak{m}$ isomorphic copies of the given group M.

A group every element of which is of finite order is called a *torsion group*. In the contrary case, namely if every element is of infinite order, the group is said to be *torsion free*. A group which is neither a torsion group nor torsion free is a *mixed group*. In a mixed group G the elements of finite order form a subgroup T called the *torsion subgroup* of G. A torsion group is the direct sum of its uniquely determined *primary components*, these being *p-groups*, i. e. groups in which the orders of the elements are powers of a fixed prime p. If the torsion group T contains an element of a maximal order, then it is a *bounded group*, otherwise *unbounded*. A p-group H is called *p^k-bounded* if it contains an element of order p^k but it contains no element of order p^{k+1}.

The cyclic group of order s will be denoted by $C(s)$ for $1 < s \leqq \infty$, while $C(p^\infty)$ serves to denote the quasicyclic group (i. e. the group of type

p^∞), the latter being isomorphic to the additive group of all rational numbers with p-power denominators, reduced modulo 1 (p a fixed prime).

We shall denote by $A_\mathfrak{p}$ the direct sum of $\mathfrak{p}$ groups, each isomorphic to the direct sum of cyclic groups of order $p, p^2, \ldots$ respectively, i. e.

(1) $$A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}(p) = \sum_\mathfrak{p} \sum_{k=1}^{\infty} C(p^k).$$

An arbitrary subset $S = (a_\nu)$ of a group G such that $0 \notin S$ is said to be *independent* if for any finite subset $a_1, \ldots, a_k$ of S a relation

$$n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0 \qquad (n_i \text{ rational integers})$$

implies $n_1 a_1 = \cdots = n_k a_k = 0$, i. e. $n_i = 0$ in case $O(a_i) = \infty$ and $O(a_i) | n_i$ in case $O(a_i)$ is finite. By the *rank* of G, denoted by

(2) $$\text{rank}\,(G),$$

we mean the cardinality of a maximal independent system in G containing but elements of infinite and/or prime-power order. (2) is an invariant of G and it is easy to see that it is equal to $|G|$ unless (2) is finite. By the *torsion free rank* of G we shall mean the cardinality of a maximal independent system, containing but elements of infinite order, in G. This is again an invariant of G, being equal to rank (G/T) where T is the torsion subgroup of G.

If G is a p-group, then the monotone decreasing sequence of cardinals,

$$\text{rank}\,(G) \geqq \text{rank}\,(pG) \geqq \cdots \geqq \text{rank}\,(p^n G) \geqq \cdots$$

arrives (after a finite number of steps) at a minimal value, say, rank $(p^m G)$ which we shall call the *final rank* of G and denote by

$$\min_n \text{rank}\,(p^n G).$$

In the remaining part of this section let G denote an arbitrary abelian group containing elements of order p with a fixed prime p. We shall say that H is a *p^k-regular subgroup* of G if H is a p^k-bounded p-group and for each $a \in H$ we have

$$a \in \frac{p^k}{O(a)} H.$$

In [7] one of us has proved that a p^k-regular subgroup H of an arbitrary abelian group G is a direct summand of G if and only if

(3) $$H \cap p^k G = 0.^{5)}$$

This result implies the existence of a maximal p^k-regular direct summand of any group G (having such a summand at all), since p^k-regularity and property (3) of a subgroup H are of inductive character. Applying this to

[5]) Hence it follows easily that the p^k-regular groups coincide with the groups $\sum_\mathfrak{n} C(p^k)$, where $\mathfrak{n}$ is an arbitrary cardinal number.

$k=1,2,\ldots,$ we obtain successively $G=B_1+D_1=B_1+B_2+D_2=\ldots,$

$$G=B_1+B_2+\cdots+B_m+D_m \tag{4}$$

where B_k is a maximal p^k-regular direct summand of D_{k-1} (or $B_k=0$) (we have put $G=D_0$). Thus we get a subgroup of G,

$$B=B_1+B_2+\cdots+B_m+\cdots \tag{5}$$

which is a direct sum of cyclic p-groups, since $B_k=\sum C(p^k)$, and is by definition *a maximal subgroup of* G *such that it is a "partial-wise" direct summand of* G in the sense that the "partial sums" $B_1+B_2+\cdots+B_m$ are maximal p^m-bounded direct summands of G. We emphasize that D_m *in* (4) *has the property that* $d\in D_m$, $O(d)=p$ *imply* $d\in p^m D_m$.

Any subgroup B of G with the above properties is called a *basic subgroup* of the p-primary component T_p of the torsion subgroup T of G, or briefly, *a p-basic subgroup of* G. It is not hard to show that any two p-basic subgroups of G are isomorphic (see e. g. [8]). In case G is a p-group, then its basic subgroup B can alternatively be defined by the following three properties: B is a direct sum of cyclic groups, it is a serving[6]) subgroup of G, and the factor group G/B is a direct sum of groups $C(p^\infty)$.

As we have mentioned in § 1, in our following investigations an important role is played by the basic subgroups. In particular, we shall often make use of the following two lemmas:

Lemma 1. *A basic subgroup B of an abelian p-group G is a homomorphic image of G.*

Lemma 2. *If a direct sum of cyclic groups is a homomorphic image of an abelian p-group G, then the same direct sum is a homomorphic image of any basic subgroup B of G.*

For the proofs of these lemmas we refer to [8] (see also [3]).

In the description of the structure of mixed groups with property P we shall need the following results.

Lemma 3. *If the torsion subgroup T of an abelian mixed group G is the direct sum of cyclic groups, then G has a decomposition $G=G_1+G_2$ such that G_1 is a torsion group and* $|G_2|\leqq \max(\mathfrak{r},\aleph_0)$ *where* $\mathfrak{r}$ *is the torsion free rank of G.*

Lemma 4. *Each mixed abelian group G has a decomposition: $G=G_1+G_2$ where G_1 is a torsion group whose p_i-components are bounded and G_2 is a mixed group such that, for each prime p_i, the p_i-component of the torsion subgroup of*

[6]) H is a serving subgroup of G if for each $a\in H$, the solvability of an equation $nx=a$ in G implies its solvability in H.

G_2 has a rank not greater than any prescribed cardinal number $\mathfrak{m}_i$ which is $\geqq$ $\max(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{r}, \aleph_0)$ *where* $\mathfrak{p}_i$ *is the final rank of the p_i-component of the torsion subgroup of G and* $\mathfrak{r}$ *is the torsion free rank of G.*

Lemma 3 is a special case of Corollary in [2], p. 304; while Lemma 4 is an equivalent form of Lemma 3 of paper [2].

§ 3. The torsion groups with property P.

In this section we investigate the groups with property P and $\mathfrak{r}=0$, i. e. the torsion groups of property P. Obviously, such a group possesses property P if and only if every primary component of the group possesses this property, so that there is no restriction in considering only p-groups G. B will denote a basic subgroup of G.

Our main result on p-groups is contained in

Theorem 1. *For an abelian p-group G the following statements are equivalent:*

α) *G is a group with property* P;

β) *the final rank of G is equal to that of a basic subgroup B of G:*

$$\min_n \operatorname{rank}(p^n G) = \min_n \operatorname{rank}(p^n B); \tag{6}$$

γ) *G is a homomorphic image of B.*

Before proving this result, let us consider some corollaries of this theorem.

Corollary 1. *An abelian p-group G possesses property* P *if and only if every subgroup of G is a homomorphic image of B.*

Indeed, property P of G implies by γ) that $B \sim G \sim H$ for any subgroup H of G. The converse follows at once from the homomorphism $G \sim B$ (see Lemma 2).

Corollary 2. *An abelian p-group G of infinite final rank has property* P *if and only if any abelian p-group K satisfying*

$$|K| \leqq \min_n \operatorname{rank}(p^n G) \tag{7}$$

is a homomorphic image of G.

For, if G has property P, then by β) we have $B \sim K$, B being the direct sum of cyclic groups, and therefore $G \sim B$ implies $G \sim K$. Conversely, if for each K satisfying (7) we have $G \sim K$, then, in particular, each subgroup of G is a homomorphic image of G.

Corollary 3. *A bounded p-group has property* P.

This is obvious in view of Theorem 1.

Corollary 4. *A countable abelian p-group fails to have property* P *if and only if it is the direct sum of a nonvoid set of groups* $C(p^\infty)$ *and of a bounded p-group.*

In fact, it is evident that a p-group

$$G = N + \sum_{\mathfrak{m}} C(p^\infty) \qquad (\mathfrak{m} > 0) \tag{8}$$

with a bounded subgroup N can not have property P. On the other hand, if a countable p-group G is not of the form (8), then either G is bounded (see Corollary 3) or the basic subgroup of G is unbounded. In both cases G has property P.

Proof of Theorem 1.

α) implies β). Denoting by $\mathfrak{m}$ the final rank of G, α) ensures the existence of a homomorphism

$$G \sim C_n = \sum_{\mathfrak{m}} C(p^n) \qquad (n \text{ a fixed integer}),$$

so that by Lemma 2 we conclude $B \sim C_n$ whence $\min_n \operatorname{rank}(p^n B) \geqq \mathfrak{m}$. The sign $\leqq$ being true here for each group G, we arrive at β).

β) implies γ). Supposing β), let us consider the representation (4) of G for a natural integer m satisfying

$$\operatorname{rank}(p^m D_m) = \mathfrak{m} = \min_n \operatorname{rank}(p^n G).$$

Since each element of order p of D_m belongs to $p^m D_m$, and since the rank of a p-group can alternatively be defined as the cardinality of a maximal independent set of elements of order p in the group, it follows

$$\operatorname{rank} D_m = \operatorname{rank}(p^m D_m) = \mathfrak{m}. \tag{9}$$

On the other hand, representation (5) of B shows that for the group $F_m = B_{m+1} + B_{m+2} + \cdots$ we have

$$\mathfrak{m} \leqq \operatorname{rank}(p^m B) = \operatorname{rank}(p^m F_m) = \operatorname{rank} F_m. \tag{10}$$

F_m being a direct sum of cyclic groups, (9) and (10) imply $F_m \sim D_m$ and hence we obtain $B = B_1 + \cdots + B_m + F_m \sim B_1 + \cdots + B_m + D_m = G$, as stated.

γ) implies α). Let G be a p-group with $B \sim G$ and H a subgroup of G. Then we have $B' \sim H$ for a suitable subgroup B' of B. But B being the direct sum of cyclic groups, a homomorphism $B \sim B'$ exists, so that $G \sim B$ (Lemma 1) implies $G \sim B \sim B' \sim H$, i.e. G is a group with property P.

§ 4. The mixed groups with property P.

In this section we suppose that the torsion free rank $\mathfrak{r}$ of the group G under consideration is greater than 0. Our main purpose is to prove

Theorem 2. *An abelian group G of torsion free rank $\mathfrak{r} > 0$ possesses property* P *if and only if*

(i) *in case $\mathfrak{r} < \aleph_0$ the group G is of the form*

$$G = T + \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty) \tag{11}$$

where T is a torsion group with property P *(covered by Theorem* 1*);*

(ii) *in case $\mathfrak{r} \geqq \aleph_0$ the group G contains a direct summand*

$$\sum_{\mathfrak{r}} C(\infty) \tag{12}$$

and in the torsion subgroup T of G each primary component T_i of final rank $> \mathfrak{r}$ is a p_i-group with property P.

First, let us mention the following two immediate corollaries.

Corollary 5. *For a torsion free group G we have the trivial result that G has property* P *if and only if G is either a direct sum of a finite number of infinite cyclic groups or has a direct summand of type*

$$\sum_{|G|} C(\infty).$$

Corollary 6. *A necessary and sufficient condition for a countable mixed group G to have property* P *is that it can be represented either in the form* (11) *with a finite $\mathfrak{r}$ and with a torsion group T of property* P *(covered by Corollary* 4*), or in the form*

$$G = U + \sum_{\aleph_0} C(\infty)$$

with an arbitrary countable abelian group U.

Proof of Theorem 2. Let us first consider the case $\aleph_0 > \mathfrak{r} = r$. Now a group G in (11) surely possesses property P, for any subgroup of G is the direct sum of a subgroup of T and of a direct sum of groups $C(\infty)$ in number $\leqq r$.

Assume, conversely, that G (with torsion free rank $r < \aleph_0$) has property P. Choose in G an independent system of elements $g_1, \ldots, g_r$ of infinite order. By property P, there exists a homomorphism η mapping G onto its subgroup $\{g_1\} + \cdots + \{g_r\}$. If g_i' is an arbitrary inverse image of g_i under η $(i = 1, \ldots, r)$ and T is the kernel of η, then obviously

$$G = T + \{g_1'\} + \cdots + \{g_r'\}.$$

r being the torsion free rank of G, T does not contain elements of infinite order, i. e., T coincides with the torsion subgroup of G. In order to show that T has property P, take an arbitrary subgroup T' of T. By property P of G, there exists a homomorphism η' of G onto $T'+\{g_1'\}+\cdots+\{g_r'\}$. If g_i'' is an inverse image of g_i' under η' $(i=1,\ldots,r)$ and K is the set of all elements of G sent into T' by η', then we get

$$G=K+\{g_1''\}+\cdots+\{g_r''\}.$$

As before, we conclude $K=T$ showing that η' induces a homomorphism of T onto T', i. e. T is a group of property P, indeed.

Turning our attention to the case $\mathfrak{r}\geqq\aleph_0$, suppose G has property P. As before we can see that G contains a direct summand (12). Assume T_i is a p_i-primary component of the torsion subgroup T of G such that

(13) $$\mathfrak{p}_i=\min_n \operatorname{rank}(p_i^n T_i)>\mathfrak{r}.$$

We show that T_i has property P.

For this purpose let us consider a subgroup A of T_i such that $A\cong A_{\mathfrak{p}_i}(p_i)$ (see (1)), and let T_i' be the image of T_i under some fixed homomorphism η: $G\sim A$. If we shall have proved the inequality

(14) $$\operatorname{rank}(p_i^n T_i')\geqq\mathfrak{p}_i \qquad (n=1,2,\ldots),$$

then we shall be ready, for this ensures that A is a homomorphic image of T_i' (since T_i' is — as a subgroup of A — itself the direct sum of cyclic groups), and $T_i\sim T_i'\sim A$ implies, owing to Lemma 2, $B_i\sim A$ where B_i is a basic subgroup of T_i; finally, hence we obtain that the final ranks of B_i and T_i are equal, i. e. T_i has property P (cf. Theorem 1).

Now, in order to establish (14), take into account that η induces a homomorphism η_n: $p_i^n G\sim p_i^n A$. Under η_n the whole torsion subgroup $p_i^n T$ of $p_i^n G$ is mapped upon $p_i^n T_i'$ $(n=1,2,\ldots)$, considering that η maps T_i upon T_i' and all other primary components of T upon 0. Hence η_n maps a coset of $p_i^n G$ modulo $p_i^n T$ upon a coset of $p_i^n A$ modulo $p_i^n T_i'$. Since the cardinality of the cosets of $p_i^n G$ modulo $p_i^n T$ clearly equals $\mathfrak{r}$, therefore the image of $p_i^n G$ under η_n must be of power $\leqq\mathfrak{r}\cdot|p_i^n T_i'|$. On the other hand, this image $p_i^n A$ has, by the definition of A, the power $\mathfrak{p}_i$, consequently,

$$\mathfrak{p}_i\leqq\mathfrak{r}\,|p_i^n T_i'|$$

whence by (13) we obtain (14), in fact.

To complete the proof of Theorem 2, it remains to prove the sufficiency of the condition in case (ii). Assume the group G has a rank $\mathfrak{r}\geqq\aleph_0$, contains a direct summand G_3 of the form (12) and each primary component T_i of its torsion subgroup T which has a final rank $\mathfrak{p}_i>\mathfrak{r}$ is a p_i-group of property P. Put $G=G'+G_3$ where $T\subseteq G'$ and apply Lemma 4 to G' with $\mathfrak{m}_i=\max(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{r})$ to obtain

(15) $$G=G_1+G_2+G_3$$

where G_1 is a torsion group with bounded p_i-components, G_2 has the property that the p_i-components of its torsion subgroup are of rank $\leqq \mathfrak{m}_i$ and $G_3 = \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty)$.

If H is an arbitrarily given subgroup of G, then its torsion free rank $\mathfrak{s}$ is evidently $\leqq \mathfrak{r}$ and, for every prime p_i, the final rank of the p_i-component U_i of its torsion subgroup U is clearly $\leqq \mathfrak{p}_i$. Now apply again Lemma 4 *with the same* $\mathfrak{m}_i = \max(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{r})$ to get a decomposition

$$(16) \qquad H = H_1 + H_2$$

where H_1 is a torsion group with bounded p_i-components and the p_i-components U'_i of the torsion subgroup U' of H_2 are of rank $\leqq \mathfrak{m}_i$. This property of H_2 does not alter if we separate from H_1 those of its p_i-components whose rank does not exceed $\mathfrak{m}_i$ as well as those cyclic direct summands of the other p_i-components (H_1 is a direct sum of cyclic groups!) whose order p_i^k satisfies rank $(p_i^k U'_i) = \mathfrak{p}_i$, and incorporate all these subgroups of H_1 into H_2. Then, denoting again by H_1 and H_2 the arising groups, H_1 becomes isomorphic to some subgroup of G_1 and hence $G_1 \sim H_1$. Therefore, it suffices to establish the existence of a homomorphism $G_2 + G_3 \sim H_2$. But H_2 is a homomorphic image of the group

$$(17) \qquad \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty) + \sum_{\mathfrak{r} < \mathfrak{p}_i}^{*} A_{\mathfrak{p}_i}(p_i)$$

(the asterisk indicates that the summation is extended only over those primes p_i for which $\mathfrak{r} < \mathfrak{p}_i$); in fact, each subgroup of G the p_i-components of whose torsion subgroup are of rank $\leqq \max(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_i)$ has a generator system containing at most $\mathfrak{r}$ elements of infinite order and at most $\max(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_i)$ elements whose order is a power of p_i, for each i. Thus it will be enough to show that (17) is a homomorphic image of $G_2 + G_3$, or more simply, that

$$M = \sum_{\mathfrak{r} < \mathfrak{p}_i}^{*} A_{\mathfrak{p}_i}(p_i)$$

is a homomorphic image of G_2.

By hypothesis, any T_i with final rank $\mathfrak{p}_i > \mathfrak{r}$ has property P, i. e. a basic subgroup of T_i has the same final rank $\mathfrak{p}_i$. Since on account of (15) the final ranks of the p_i-components of the torsion subgroups of G and G_2 as well as the final ranks of the respective basic subgroups are the same, we infer that the p_i-components T'_i of the torsion subgroup T' of G_2 must have property P for each i with $\mathfrak{p}_i > \mathfrak{r}$, i. e. for these i we have

$$T'_i / Q_i \cong A_{\mathfrak{p}_i}$$

for some subgroup Q_i of T'_i. Let

$$Q = \sum_{\mathfrak{p}_i > \mathfrak{r}}^{*} Q_i + \sum_{\mathfrak{p}_j \leqq \mathfrak{r}} T'_j;$$

then

$$T'/Q \cong \sum_{\mathfrak{r} < \mathfrak{p}_i} A_{\mathfrak{p}_i}$$

is the torsion subgroup of G_2/Q. Now T'/Q being the direct sum of cyclic groups, we may apply Lemma 3 to the group G_2/Q and then obtain

$$G_2/Q = X/Q + Y/Q$$

where X/Q is a subgroup of T'/Q and hence again the direct sum of cyclic groups, while Y/Q is of power $\leqq \mathfrak{r}$. Consequently, the p_i-components of X/Q must have the final rank $\mathfrak{p}_i$ for the primes p_i satisfying $\mathfrak{p}_i > \mathfrak{r}$ and thus there exists a homomorphism $X/Q \sim M$. Now X/Q is a direct summand of G_2/Q and therefore $G_2 \sim G_2/Q \sim X/Q \sim M$ imply $G_2 \sim M$ which completes the proof of Theorem 2.

§ 5. The groups with property P′.

Having solved the problem of characterizing all groups of property P, it is easy to get a complete solution of the problem of finding the structure of all abelian groups with property P′. This problem is settled by the following

Theorem 3. *An arbitrary abelian group G has property* P′ *if and only if it has property* P. *Consequently, all groups with property* P′ *are covered by Theorems* 1 *and* 2.

It suffices to verify that property P′ implies property P.

An essential observation is that an arbitrary abelian group G contains a subgroup H such that (i) H is the direct sum of cyclic groups, (ii) the torsion free rank of H is equal to the torsion free rank $\mathfrak{r}$ of G; (iii) the p_i-components T_i, U_i of the torsion subgroups T, U of G and H respectively, satisfy:

$$\text{rank}(p_i^k U_i) = \text{rank}(p_i^k T_i) \qquad \text{for all } p_i, k, \tag{18}$$

unless the cardinal number on the right hand side is the finite final rank >0 of T_i when the left hand side may vanish. In this exceptional case T_i is namely the direct sum of a bounded group and a finite number of groups $C(p_i^\infty)$, and it is clear that in all other cases the p_i-group T_i contains a direct sum U_i of cyclic p_i-groups satisfying (18). Consequently, there exists an H with properties (i)—(iii).

Now assume that G possesses property P′. Then there exists an endomorphism $G \sim H$ where H is a group of the preceding paragraph. If the torsion free rank $\mathfrak{r}$ is finite, then the final rank of T_i can not be a nonzero integer, for then $C(p_i^s) + \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty)$, if s is sufficiently large, can not be a homomorphic image of G. Hence, in case of finite $\mathfrak{r}$, any subgroup F of G

satisfies (ii) and (iii) with $\leqq$ in (18) (and with no exceptional case), and besides G has the form $G = T + \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty)$; consequently, F is a homomorphic image of H. This shows that G has property P if its torsion free rank is finite.

In case $\mathfrak{r} > \aleph_0$, each subgroup F of G satisfies (ii) and (iii) with $\leqq$ in (18) and therefore there exists again a homomorphism $H \sim F$, q. e. d.

Bibliography.

[1] L. Fuchs, A. Kertész and T. Szele, On a special kind of duality in group theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 169—177.

[2] L. Fuchs, On a special kind of duality in group theory. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 299—314.

[3] L. Fuchs, On a property of basic subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 143—144.

[4] A. Kertész and T. Szele, Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 70—76.

[5] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, **16** (58) (1945), 129—162.

[6] E. Sąsiada, On abelian groups every countable subgroup of which is an endomorphic image, *Bull. Acad. Polonaise*, Classe III, **2** (1954), 359—362.

[7] T. Szele, On direct decomposition of abelian groups, *Journal London Math. Soc.*, **28** (1953), 247—250.

[8] T. Szele, On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 129—141.

(Received February 12, 1955.)

Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices.

By G. SZÁSZ in Szeged.

To Professor L. Kalmár on his 50th birthday.

Let L be any lattice and let a, b be any pair of its elements such that $a < b$. Then the set of all elements x of L such that $a \leqq x \leqq b$ is a sublattice of L and is called the *closed interval* $[a, b]$. If the inequalities $a < x < b$ are not satisfied by any x in L (i. e., if $[a, b]$ consists only of the elements a and b), then we say "a is covered by b" or "b covers a" and we write $a \prec b$ or $b \succ a$.

As usual, a finite chain

$$C\colon\ a_0 < a_1 < \cdots < a_m \qquad (m \text{ finite})$$

of elements of L is called *maximal* (and *of length* m) if $a_i \prec a_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. But in this paper we shall use the term "maximal" also for chains of infinite length in the following generalized sense: *A chain C of some elements of the lattice L is called maximal if it is not a proper subchain of any chain C' in L.* Clearly, for finite chains our generalized definition is equivalent to the usual one. By *the length of an infinite maximal chain* we mean the set-theoretical power of the set of its elements.

The problem of this paper is an extension of one considered by DEDEKIND [**3**, p, 397], BIRKHOFF [**1**, p. 66] and also previously by the author [**4**, p. 240]. We recall these results in a modified and somewhat generalized form.

BIRKHOFF has shown, on basis of the investigations of DEDEKIND, the following important theorem:

Theorem 1. *Let $[a, b]$ be any closed interval of a lattice in which the assumptions are satisfied:*

(A_1) $x \neq y$ *and* $x, y \succ u$ $(x, y, u \in [a, b])$ *imply* $x \cup y \succ x, y$;

(B_1) *all chains in* $[a, b]$ *are finite.*

Then

(S) *all maximal chains between a and b have the same length.*

It is known [**1**, p. 100] that for lattices of finite length ($\mathbf{A}_1$) is equivalent to

($\mathbf{A}_2$) $x \cap y \prec y$ *implies* $x \prec x \cup y$ $(x, y \in [a, b])$,

and for lattices of infinite length it is a consequence of ($\mathbf{A}_2$). Since, by ($\mathbf{B}_1$), the interval $[a, b]$ is a sublattice of finite length in L, it follows that in Theorem 1, ($\mathbf{A}_1$) may be replaced by ($\mathbf{A}_2$).

Two years ago, the author has shown in his above-mentioned paper that in addition to ($\mathbf{A}_2$) it suffices to assume the following condition which is considerably weaker than ($\mathbf{B}_1$):

($\mathbf{B}_2$) *there exists a finite maximal chain between a and b.*

In fact, the author has proved

Theorem 2. *If a closed interval $[a, b]$ of a lattice L satisfies* ($\mathbf{A}_2$) *and* ($\mathbf{B}_2$), *then the length of any chain between a and b does not exceed the length of the finite maximal chain of* ($\mathbf{B}_2$).

Consequently, statement (**S**) also holds in $[a, b]$.

Now, our purpose is to discuss the maximal chains of such intervals $[a, b]$ of a lattice L in which ($\mathbf{B}_2$) is not satisfied (i. e., in which all maximal chains between a and b are of infinite length). Since for lattices of finite length the property ($\mathbf{A}_2$) defines the semi-modularity, one would expect that replacing ($\mathbf{A}_2$) by the general condition of semi-modularity [**2**, p. 204], (**S**) remains valid even without ($\mathbf{B}_2$). However, this conjecture does not turn out to be right. We prove the following, somewhat surprising theorem:

Theorem 3. *Statement* (**S**) *of Theorem 1 is independent (not only of the semi-modularity but also) of the distributivity of the sublattice* $[a, b]$.

Proof. Since (**S**) obviously does not imply the distributivity of $[a, b]$, it suffices to construct a distributive lattice, naturally of infinite length, in which (**S**) is not satisfied. For this purpose consider the set H of all couples (x_1, x_2) in which x_1 resp. x_2 runs over all real resp. all rational numbers in the closed interval $[0, 1]$, and define a partial ordering in H as follows:

$$(x_1, x_2) \geqq (y_1, y_2) \quad \text{if and only if} \quad x_1 \geqq y_1, \quad x_2 \geqq y_2.$$

Consequently,

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \quad \text{if and only if} \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2.$$

By this partial ordering H is made into a lattice which obviously satisfies the distributive laws. Let now Θ be the equivalence relation on H defined as follows:

$$(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2) \ (\mathrm{mod}\ \Theta) \quad \text{means} \quad \begin{cases} (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ \text{or } x_2 = y_2 = 1. \end{cases}$$

Then clearly $(x_1, x_2) \equiv (x_1^*, x_2^*)$, $(y_1, y_2) \equiv (y_1^*, y_2^*) \pmod{\Theta}$ imply $(x_1, x_2) \cap (y_1, y_2) \equiv$ $\equiv (x_1^*, x_2^*) \cap (y_1^*, y_2^*) \pmod{\Theta}$ and similarly for $\cup$; that is, Θ is a congruence relation on H. This means, that the set L of all residue classes $\overline{(x_1, x_2)}$ mod Θ forms again a distributive lattice; the greatest element of L is the residue class $\overline{(x_1, 1)}$ $(0 \leqq x_1 \leqq 1)$ and the least element of L is the residue class $\overline{(0, 0)}$. It is now easily shown that (S) does not hold in L. For, the chain

$$\overline{(0, x_2)} \quad (0 \leqq x_2 \leqq 1;\ x_2 \text{ rational})$$

is a maximal one between $\overline{(0, 0)}$ and $\overline{(x_1, 1)}$ and it is countable, however the chain consisting of the elements

$$\overline{(x_1, 0)} \quad (0 \leqq x_1 \leqq 1,$$

and

$$\overline{(1, x_2)} \quad (0 \leqq x_2 \leqq 1;\ x_2 \text{ rational})$$

is again a maximal one between the same elements of L, but is uncountable. Thus our theorem is proved.

References.

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25), revised edition (New York, 1948).

[2] R. Croisot, Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, *Annales Sci. École Norm. Sup.*, **68** (1951), 203—265.

[3] R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Annalen*, **53** (1900), 371—403.

[4] G. Szász, On the structure of semi-modular lattices of infinite length, *these Acta*, **14** (1951/52), 239—245.

(Received January 6, 1955.)

On the solvability of systems of linear inequalities.

By JÁNOS SURÁNYI in Budapest.

To László Kalmár on his fiftieth birthday.

Introduction.

1. In what follows we shall give some criteria for the solvability of homogeneous and inhomogeneous systems of linear inequalities of the form [1])

(1) $$l_i(x) \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

and

(2) $$L_i(x) \equiv l_i(x) + b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + b_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

respectively. By a solution of the systems (2) we mean any point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ in the n-dimensional Euclidean space satisfying $L_i(\xi) \geqq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m$. In the case of system (1), however, we require of a solution ξ to satisfy not only $l_i(\xi) \geqq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m$ but also for some j $(1 \leqq j \leqq m)$ the strict inequality $l_j(\xi) > 0$.

The problem of homogeneous systems can immediately be reduced to that of inhomogeneous systems. In fact, the requirement that at least one of the linear forms $l_j(x)$ should be positive, is equivalent to the inequality

$$\sum_{i=1}^{m} l_i(x) > 0.$$

Owing to the homogeneity of the forms $l_i(x)$, the last inequality can be replaced as to solvability by the inhomogeneous one

$$l_{m+1}(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} l_i(x) \equiv a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \geqq 1,$$

where

$$a_{m+1,k} = a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{mk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Now, setting

$$L_i^*(x) \equiv l_i(x) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad L_{m+1}^*(x) \equiv l_{m+1}(x) - 1,$$

[1]) All the numbers of this paper are assumed to be real numbers.

the solvability of the system (1) is equivalent to the solvability of the inhomogeneous system

$$(1^*) \qquad L_i^*(x) \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m+1).$$

2. In the present paper I shall give criteria for the solvability of systems of linear inequalities in terms of the coefficient-matrix. Our results can be easily obtained along the lines suggested by the classical results and methods of the theory of linear equations. A criterion of this type was recently found by L. M. BLUMENTHAL.[2]) He obtained his criterion (see theorem VI below) in terms of the symmetrical matrix consisting of the elements

$$\alpha_{ij}=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, m);$$

as to his methods, he emphasized their metrical character.

Starting from BLUMENTHAL's preliminary note I have proved[3]) BLUMENTHAL's theorem by means of the notion of linear independence, i. e. by using affine methods only. The methods used in my paper also furnished some further criteria (theorems I and II) in terms of the original matrix $(a_{ik})_{mn}$, a fact that seems to underline the adequacy of these methods.

Theorem II was found independently by S. N. ČERNIKOV[4]). The basic geometrical idea of his proof is similar to mine, but the elaboration runs along different lines. Therefore, we publish here our former proof in a simplified form, but first we shall give another demonstration by induction.

3. Let us denote the rank of the matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

by r. For the solvability (in the above sense) of the system (1), resp. (2), the following criteria hold.

---

[2]) L. M. BLUMENTHAL, Two existence-theorems for systems of linear inequalities, *Pacific Journal of Math.*, **2** (1952), 523—530. Preliminary note: Abstract 286*t* in *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 380. — TH. MOTZKIN, Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen, *Dissertation*, Basel, 1936, dealing with various problems concerning linear inequalities, gave also criteria for the solvability, which seem, as the reviews of his paper show, to be analogous to our theorem I. His thesis was not accessible for me.

[3]) The new proof of BLUMENTHAL's theorem was first presented in the seminary of P. TURÁN, August 1952. A form completed with new criteria was read at the „Bolyai János Mathematical Society", January 31, 1953. See *Matematikai Lapok*, 4 (1953), 196, and published in Hungarian: Egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról, *Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának Évkönyve (Annals of the University Eötvös Loránd in Budapest, Faculty of Nat. Sci.)*, 1952/53, pp. 19—25.

[4]) С. Н. Черников, Систем линейных неравенств, Успехи Матем. Наук, **8** (1953), fasc. 2, pp. 8—73. See esp. pp. 17—29.

Theorem I. *System* (1) *is solvable if and only if* $2r-1$ *subscripts* $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, k_1, k_2, \ldots, k_r$ *can be found so that the determinants*

$$(3) \qquad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{r-1} k_1} & a_{i_{r-1} k_2} & \ldots & a_{i_{r-1} k_r} \\ a_{j k_1} & a_{j k_2} & \ldots & a_{j k_r} \end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

are either all non-negative, or all non-positive, but not all 0.

Theorem II. *System* (2) *is solvable if and only if* $2r$ *subscripts* $i_1, i_2, \ldots, i_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ *can be found so that*

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

and, for $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$(5) \qquad \frac{D_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} & b_{i_1} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_r} & b_{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \ldots & a_{i_r k_r} & b_{i_r} \\ a_{j k_1} & a_{j k_2} & \ldots & a_{j k_r} & b_j \end{vmatrix} \geqq 0.$$

By making use of our remark in **1** we can deduce Theorem I immediately from Theorem II. Indeed, let us assume that Theorem II is already proved. We shall see that, if system (1) — and so also system (1*) — is solvable, then the subscript i_r occurring in Theorem II may be chosen equal to $m+1$. Indeed, one of the subscripts $i_1, i_2, \ldots, i_r$ is equal to $m+1$, for in the opposite case we should have

$$\frac{D_{m+1}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \ldots & a_{i_r k_r} & 0 \\ a_{m+1, k_1} & a_{m+1, k_2} & \ldots & a_{m+1, k_r} & -1 \end{vmatrix} = -1$$

contrary to the requirements of Theorem II. Hence we may suppose $m+1 = i_r$, because a permutation of the subscripts has the same effect on the sign of Δ and that of the D_j's.

Now, if $i_r = m+1$, then we have by (5)

$$\frac{D_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{r-1} k_1} & a_{i_{r-1} k_2} & \ldots & a_{i_{r-1} k_r} & 0 \\ a_{m+1, k_1} & a_{m+1, k_2} & \ldots & a_{m+1, k_r} & -1 \\ a_{j k_1} & a_{j k_2} & \ldots & a_{j k_r} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_j}{\Delta} \geqq 0$$

for $j=1,2,\ldots,m$. Thus the conditions of Theorem I are also proved to be necessary.

Suppose now that the conditions of Theorem I are fulfilled, i. e. all the determinants Δ_i $(1\leqq i\leqq m)$ different from 0 have the same sign, and some of them does not vanish. Since these determinants differ from each other but in their last row, we have

$$0 \neq \sum_{i=1}^{m}\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i_{r-1}k_1} & a_{i_{r-1}k_2} & \ldots & a_{i_{r-1}k_r}\\ a_{m+1,k_1} & a_{m+1,k_2} & \ldots & a_{m+1,k_r}\end{vmatrix}=\Delta.$$

Furthermore

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i_{r-1}k_1} & a_{i_{r-1}k_2} & \ldots & a_{i_{r-1}k_r}\\ a_{jk_1} & a_{jk_2} & \ldots & a_{jk_r}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_r} & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i_{r-1}k_1} & a_{i_{r-1}k_2} & \ldots & a_{i_{r-1}k_r} & 0\\ a_{m+1,k_1} & a_{m+1,k_2} & \ldots & a_{m+1,k_r} & -1\\ a_{jk_1} & a_{jk_2} & \ldots & a_{jk_r} & 0\end{vmatrix}=D_j$$

for $j=1,2,\ldots,m$, whence

$$\frac{D_j}{\Delta}=\frac{\Delta_j}{\Delta}\geqq 0$$

by the hypotheses of Theorem I. Thus the conditions of Theorem II hold true for the system (1*) with the row-subscripts $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, m+1$. This means that system (1*), and so also system (1), is solvable.

In accordance with what has been said, we may restrict ourselves to the proof of Theorem II.

First proof, by induction on r.

4. If $r=0$, i. e. all the coefficients vanish, then $\Delta=1$ and the conditions of Theorem II reduce to $b_j\geqq 0$ $(j=1,2,\ldots,m)$, which are in fact necessary and sufficient in this case.

a) Suppose now that $r>0$ and the theorem is already proved for systems with coefficient-matrices of rank $r-1$.

Let us assume first that the system (2) is solvable and ξ is one of its solutions. Then we can find also a solution for which some of the linear forms $L_j(x)$ vanish, but not identically. Indeed, if this is not the case for the original ξ, then supposing a_{ik_1} is a non-vanishing coefficient, we diminish or augment the value of x_{k_1} according as a_{ik_1} is positive, or negative, until one of the linear forms vanishes. This happens for $x_{k_1}=\xi'_{k_1}$ say. Put $\xi'=$ $=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1-1}, \xi'_{k_1}, \xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_n)$. If we have e. g. $L_{i_1}(\xi')=0$, then, expressing ξ'_{k_1}, and substituting it into the other linear forms, we find that the system

$$
(2') \qquad L'_i(y) = \left(a_{i1} - \frac{a_{i_1 1}}{a_{i_1 k_1}} a_{ik_1}\right) y_1 + \cdots + \left(a_{i,k_1-1} - \frac{a_{i_1,k_1-1}}{a_{i_1 k_1}} a_{ik_1}\right) y_{k_1-1} +
$$
$$
+ \left(a_{i,k_1+1} - \frac{a_{i_1,k_1+1}}{a_{i_1 k_1}} a_{ik_1}\right) y_{k_1+1} + \cdots + \left(a_{in} - \frac{a_{i_1 n}}{a_{i_1 k_1}} a_{ik_1}\right) y_n + b_i - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 k_1}} a_{ik_1} \geqq 0
$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$ admits the solution

$$
(6) \qquad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_1-1}, \xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_n).
$$

Since the coefficient-matrix of (2′) has obviously the rank $r-1$, hence by the induction hypothesis we can find subscripts $i_2, \ldots, i_r$, $k_2, \ldots, k_r$ for which

$$
(4') \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{i_2 k_2} - \frac{a_{i_1 k_2}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_2 k_1} & \ldots & a_{i_2 k_r} - \frac{a_{i_1 k_r}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_2 k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r k_2} - \frac{a_{i_1 k_2}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} - \frac{a_{i_1 k_r}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_r k_1} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

and

$$
(5') \qquad \frac{D'_j}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} a_{i_2 k_2} - \frac{a_{i_1 k_2}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_2 k_1} & \ldots & a_{i_2 k_r} - \frac{a_{i_1 k_r}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_2 k_1} & b_{i_2} - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_2 k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r k_2} - \frac{a_{i_1 k_2}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} - \frac{a_{i_1 k_r}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_r k_1} & b_{i_r} - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 k_1}} a_{i_r k_1} \\ a_{j k_2} - \frac{a_{i_1 k_2}}{a_{i_1 k_1}} a_{j k_1} & \ldots & a_{j k_r} - \frac{a_{i_1 k_r}}{a_{i_1 k_1}} a_{j k_1} & b_j - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 k_1}} a_{j k_1} \end{vmatrix} \geqq 0
$$

for $j = 1, 2, \ldots, m$.

But the determinants Δ' and D'_j in (4′) and (5′) are equal to $a_{i_1 k_1}^{-1}$ times the determinants Δ and D_j in (4) and (5), respectively, and so the necessity of our conditions has been proved.

b) Assuming again the theorem proved for $r-1$, suppose the conditions (4) and (5) are fulfilled for a system (2) of rank r $(r > 0)$. If e. g. $a_{i_1 k_1} \neq 0$, then the conditions (4′), (5′) also hold, and so the system (2′) of rank $r-1$ admits a solution of the form (6). Let us choose

$$
\xi_{k_1} = -\frac{a_{i_1 1}}{a_{i_1 k_1}} \xi_1 - \cdots - \frac{a_{i_1 k_1-1}}{a_{i_1 k_1}} \xi_{k_1-1} - \frac{a_{i_1 k_1+1}}{a_{i_1 k_1}} \xi_{k_1+1} - \cdots - \frac{a_{i_1 n}}{a_{i_1 k_1}} \xi_n - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 k_1}},
$$

then for $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{k_1-1}, \xi_{k_1}, \xi_{k_1+1}, \ldots, \xi_n)$ we have $L_{i_1}(\xi) = 0$, and the other linear forms will assume the same value in the point ξ, as the corresponding linear form in the point (6). This completes the proof of the sufficiency of the stated condition.

5. The practical use of the criteria of theorems I and II can be facilitated by the following two remarks:

Remark I. *If the conditions of Theorem I, resp. Theorem II, are satisfied for some $r' < r$, then the system* (1) *resp. the system* (2) *is solvable.*

Thus, e. g., if the non-vanishing coefficients of an unknown occurring in system (1) are all of the same sign, respectively if none of the constants b_i in (2) is negative, then the corresponding system is solvable.

To prove our remark, observe that if the conditions are satisfied with the subscripts $i_1, i_2, \ldots, i_{r'-1}, k_1, k_2, \ldots, k_{r'}$, resp. $i_1, i_2, \ldots, i_{r'}, k_1, k_2, \ldots, k_{r'}$, then the subsystems

$$a_{ik_1}x_{k_1} + \cdots + a_{ik_{r'}}x_{k_{r'}} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

and

$$a_{ik_1}x_{k_1} + \cdots + a_{ik_{r'}}x_{k_{r'}} + b_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

are solvable owing to Theorems I and II, respectively, and their solutions, completed by values 0 for the further unknowns, furnish solutions for the corresponding original system.

Even more useful is[5])

Remark II. *If the column vectors with subscripts $k_1, k_2, \ldots, k_r$ in the coefficient-matrix of rank r are linearly independent, then in looking for determinants satisfying the conditions of our theorems, we may restrict ourselves to these columns with subscripts $k_1, k_2, \ldots, k_r$.*

Let us denote by $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ the column vectors; then the systems (1) and (2) may be written in the form

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n > 0,$$

resp.

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n + \mathbf{b} \geqq 0,$$

where $\mathbf{u} \geqq 0$ means that $\mathbf{u}$ is a vector without negative components in the given coordinate system, and $\mathbf{v} > 0$ means that $\mathbf{v} \geqq 0$ and $\mathbf{v}$ has at least one positive component.

By hypothesis, we have some vector equations

$$\mathbf{a}_k = c_{k1}\mathbf{a}_{k_1} + c_{k2}\mathbf{a}_{k_2} + \cdots + c_{kr}\mathbf{a}_{k_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Thus if ξ is a solution of system (1) or (2), then $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ with

$$\eta_\varrho = c_{1\varrho}\xi_1 + c_{2\varrho}\xi_2 + \cdots + c_{n\varrho}\xi_n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

is a solution of the system

$$\mathbf{a}_{k_1} y_1 + \mathbf{a}_{k_2} y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{k_r} y_r > 0,$$

or

$$\mathbf{a}_{k_1} y_1 + \mathbf{a}_{k_2} y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{k_r} y_r + \mathbf{b} \geqq 0,$$

respectively. Consequently, the conditions of the theorems must be satisfied also for the columns in question, q. e. d.

---

[5]) Cf. theorem IV of my paper quoted under [3]), pp. 22—23, and the second note to theorem 3 of the paper quoted under [4]), pp. 27—28.

Second proof.

6. Our Theorem II can be derived from the obvious inhomogeneous analogue of H. MINKOWSKI's[6] classical result concerning homogeneous systems. Although we restrict ourselves to Theorem II, we prove MINKOWSKI's theorem for homogeneous systems too, because BLUMENTHAL's result will be deduced from this theorem. For the sake of completeness, we shall reproduce his theorem together with the original proof. We shall employ the notations as used above.

Theorem III (MINKOWSKI). *System* (1) *is solvable if and only if it admits a solution* ξ *for which an independent system of* $r-1$ *linear forms*

$$l_{i_1}(x), l_{i_2}(x), \ldots, l_{i_{r-1}}(x)$$

exists, which vanishes at the point ξ.

(This implies $l_i(\xi)>0$ for every linear form l_i independent from the froms $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_{r-1}}$, for ξ has to be a solution of (1) in the sense given in **1**.)

Theorem IV. *System* (2) *is solvable if and only if it admits a solution* ξ, *for which an independent system of linear forms*

$$l_{i_1}(x), l_{i_2}(x), \ldots, l_{i_r}(x)$$

exists so that the corresponding inhomogeneous forms vanish:

$$L_{i_1}(\xi)=L_{i_2}(\xi)=\cdots=L_{i_r}(\xi)=0.$$

Such a solution ξ will be called an extremal solution ("äusserste Lösung" in the terminology of MINKOWSKI).

In the case of a homogeneous system, the geometrical meaning of the theorem is as follows. Each inequality determines in n-dimensional Euclidean space a closed half-space bounded by a hyperplane [$n-1$-dimensional linear manifold] through the origin. The solutions are the points common to all the half-spaces, i. e. lie in a pyramid with its vertex in the origin (for $r=n$), or in a "trough" with an "$n-r$-dimensional edge" through the origin. The extremal solutions are the points of the $n-r+1$-dimensional boundary faces of the pyramid or trough. In the case of an inhomogeneous system, the situation is quite analogous.

In order to find an extremal solution, we approach, starting from an arbitrary solution, to the boundary hyperplane of a half-space, until we reach some boundary hyperplane. Then, remaining in this hyperplane, we approach towards another, and so on, and thus we reach boundary faces of lower and lower dimensions. This argument shows the existence of an extremal solution. The following algebraic proof rests on the same idea.

---

[6]) H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, 2. Aufl. (Leipzig, 1910), pp. 39—45.

7. The sufficiency of the condition in Theorems III and IV is obvious.

Let us assume, conversely, that the system (1) admits a solution ξ. We choose a maximal linearly independent system

(7) $$l_{i_1}(x),\ l_{i_2}(x), \ldots,\ l_{i_s}(x)$$

in the set of all linear forms vanishing in the point ξ. (If all the forms are positive in the point ξ, then the set (7) is empty, $s=0$.)

Since for $s=r$ all the linear forms would vanish in the point ξ, hence s cannot exceed the value $r-1$. For $s=r-1$ the solution ξ is already an extremal solution, and the set (7) constitutes a desired set.

In case $s<r-1$, we choose a form $l_{i_{s+1}}(x)$ with $l_{i_{s+1}}(\xi)>0$; $l_{i_{s+1}}(x)$ is clearly independent of the forms (7). Considering that $s+1<r$, there exists a further form $l_{i_{s+2}}(x)$ independent of $l_{i_1}(x), l_{i_2}(x), \ldots, l_{i_{s+1}}(x)$ and, consequently, different from 0 in the point ξ. Proceeding in this way, we arrive at a set of forms

(7′) $$l_{i_{s+1}}(x), l_{i_{s+2}}(x), \ldots, l_{i_r}(x)$$

which are all different from 0 in the point ξ. (7) and (7′) form a maximal independent system among the forms $l_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,m)$. This implies that every $l_i(x)$ may be expressed in the form

$$l_i(x)=c_{i1}l_{i_1}(x)+c_{i2}l_{i_2}(x)+\cdots+c_{ir}l_{i_r}(x) \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

with appropriate constants c_{ik}.

8. Let us consider the linear forms in t:

$$\Lambda_i(t)=c_{i,\,s+1}t+c_{i,\,s+2}l_{i_{s+2}}(\xi)+\cdots+c_{i,\,r}l_{i_r}(\xi) \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

For $t=t_0=l_{i_{s+1}}(\xi)$ all these forms are positive, except those vanishing identically. Since we have $\Lambda_{i_{s+1}}(t)=t$, at least one of these forms will diminish if we reduce the value of t, starting from the value t_0. So proceeding until one of them vanishes, we arrive at a value $t=t_1$, for which one of the linear forms which were non-vanishing for t_0, will vanish; let one of these be the form $\Lambda_{i_0}(t)$.

In view of the linear independence of the set (7), (7′), the system

$$l_{i_1}(x)=l_{i_2}(x)=\cdots=l_{i_s}(x)=0,\ l_{i_{s+1}}(x)=t_1,\ l_{i_{s+2}}(x)=l_{i_{s+2}}(\xi), \ldots, l_{i_r}(x)=l_{i_r}(\xi)$$

is solvable. A solution η of it is at the same time a solution of the system of inequalities (1), since the inequalities $l_i(\eta)=\Lambda_i(t_1)\geqq 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ and $l_{i_r}(\eta)=l_{i_r}(\xi)>0$ hold. Since $l_{i_0}(\xi)\neq 0$,

$$l_{i_0}(x),\ l_{i_1}(x),\ l_{i_2}(x),\ \ldots,\ l_{i_s}(x)$$

are linearly independent and all vanish in the point η, thus the maximum number of linearly independent forms among those vanishing in point η is greater than the number of those vanishing in the point ξ. Repeating this process a sufficient number of times, we obtain an extremal solution.

For system (2) we may proceed just in the same way; here it is allowed that all the forms $L_i(x)$ may vanish, so that a solution required by Theorem IV can also be found.

9. Theorem II may be derived immediately from Theorem IV. Let ξ be an extremal solution of the system (2),

$$L_{i_1}(x),\ L_{i_2}(x),\ \ldots,\ L_{i_r}(x)$$

the corresponding linear forms, and Δ a maximal non-vanishing determinant of their coefficient-matrix.

Let us put $L_i(\xi)=T_i$, so that

$$T_{i_1}=T_{i_2}=\cdots=T_{i_r}=0 \quad \text{and} \quad T_j\geqq 0 \quad \text{for } j=1,2,\ldots,m.$$

Since the system of equations

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=T_i-b_i$$

is solvable, thus, bordering the determinant Δ (and using the notation adopted in (5)) we obtain

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \cdots & a_{i_1k_r} & -b_{i_1} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \cdots & a_{i_2k_r} & -b_{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & \cdots & a_{i_rk_r} & -b_{i_r} \\ a_{jk_1} & a_{jk_2} & \cdots & a_{jk_r} & T_j-b_j \end{vmatrix} = T_j\Delta-D_j=0,$$

or

$$\frac{D_j}{\Delta}=T_j\geqq 0.$$

Thus the necessity of the conditions has been proved.

If, conversely, the conditions (4) and (5) hold, then the system of equations

$$a_{ik_1}x_{k_1}+a_{ik_2}x_{k_2}+\cdots+a_{ik_r}x_{k_r}=\frac{D_i}{\Delta}-b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

is solvable. Denoting by $(\xi_{k_1},\xi_{k_2},\ldots,\xi_n)$ a solution,

$$\xi=(0,\ldots,0,\xi_{k_1},0,\ldots,0,\xi_{k_2},0,\ldots,0,\xi_{k_r},0,\ldots,0)$$

is a solution of system (2) too. In fact, we have

$$L_i(\xi)=l_i(\xi)+b_i=\frac{D_i}{\Delta}\geqq 0,$$

establishing the sufficiency of our conditions.

Blumenthal's criterion.

10. In order to prove BLUMENTHAL's theorem, we need a simple consequence of MINKOWSKI's Theorem III which has some interest in itself as well.

Theorem V. *System* (1) *is solvable, if and only if a maximal independent system of linear forms,*

$$l_{i_1}(x),\ l_{i_2}(x),\ \ldots,\ l_{i_r}(x)$$

exists such that in the relations

$$l_i(x) = c_{i1} l_{i_1}(x) + c_{i2} l_{i_2}(x) + \cdots + c_{ir} l_{i_r}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

the coefficients c_{ir} *of* $l_{i_r}(x)$ *are positive or* 0.

This condition is necessary. To see this we have only to choose an extremal solution ξ, a corresponding independent system $l_{i_1}(x), l_{i_2}(x), \ldots, l_{i_{r-1}}(x)$, and a further form $l_{i_r}(x)$ independent of them. Thus, owing to

$$l_{i_1}(\xi) = l_{i_2}(\xi) = \cdots = l_{i_{r-1}}(\xi) = 0, \quad l_{i_r}(\xi) > 0,$$

we have

$$0 \leqq l_i(\xi) = c_{i_r} l_{i_r}(\xi),$$

and therefore,

$$c_{ir} = \frac{l_i(\xi)}{l_{i_r}(\xi)} \geqq 0.$$

If, on the other hand, $c_{ir} \geqq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m$ then a solution ξ of the system of equations,

$$l_{i_1}(x) = l_{i_2}(x) = \cdots = l_{i_{r-1}}(x) = 0, \quad l_{i_r}(x) = 1$$

will also be a solution of the system of inequalities (1), in view of the inequalities

$$l_{i_r}(\xi) = 1\,(>0), \quad l_i(\xi) = c_{ir} l_{i_r}(\xi) = c_{ir} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

11. In order to obtain a criterion in terms of the coefficients, we have to do nothing else but to calculate the coefficients c_{ir} for each given i $(1 \leqq i \leqq m)$ from the equation system arising from (8):

$$a_{i_1k} c_{i1} + a_{i_2k} c_{i2} + \cdots + a_{i_rk} c_{ir} = a_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

By a direct solution of the system (9), we arrive at theorem I again. When, however, we transform the system by using a procedure applied to integral inequalities by A. HAAR[7]), then we get BLUMENTHAL's criterion concerning the matrix

$$(\alpha_{ij})_{mm} \quad \text{with} \quad \alpha_{ij} = a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \cdots + a_{in} a_{jn}.$$

---

[7]) A. HAAR, Über lineare Ungleichungen, *these Acta,* **2** (1923—24), 1—14.

Theorem VI. *System* (1) *is solvable if and only if for appropriate subscripts* $i_1, i_2, \ldots, i_r$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_r} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \ldots & a_{i_r i_r} \end{vmatrix} > 0,$$

and substituting the last row by the corresponding elements of any row, the resulting determinants are non-negative:

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_r} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{r-1} i_1} & a_{i_{r-1} i_2} & \ldots & a_{i_{r-1} i_r} \\ a_{i i_1} & a_{i i_2} & \ldots & a_{i i_r} \end{vmatrix} \geqq 0 \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Indeed let us multiply the k^{th} equation of (9) by $a_{i_\varrho k}$ for a given $\varrho = 1, 2, \ldots, r$, and add the equations thus obtained; then we find that the factors $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir}$ satisfy the equations

$$a_{i_1 i_\varrho} y_1 + a_{i_2 i_\varrho} y_2 + \cdots + a_{i_r i_\varrho} y_r = a_{i i_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{10}$$

Their matrix is identical with that of the quadratic form

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{i_\varrho i_\sigma} u_\varrho u_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} a_{i_\varrho k} a_{i_\sigma k} u_\varrho u_\sigma = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\varrho=1}^{r} a_{i_\varrho k} u_\varrho \right)^2,$$

which is seen to be either positive definite or semidefinite. However, this quadratic form must be definite, for in the opposite case the linear forms $l_{i_1}(x), l_{i_2}(x), \ldots, l_{i_r}(x)$ would be dependent. Thus we get $\delta > 0$, and therefore the system (10) admits a unique solution which must coincide with the factors in question, in particular,

$$c_{ir} = \frac{\delta_i}{\delta}.$$

In view of $\delta > 0$, and on account of Theorem V this completes the proof of Theorem VI.

I am grateful to P. Turán who kindly drew my attention to the problem of linear inequalities.

(Received February 5, 1955.)

On the theory of quasi-unitary algebras.

By L. PUKÁNSZKY in Szeged.

To Professor L. Kalmár on his 50th birthday.

1. Introduction. J. DIXMIER has recently introduced the concept of the quasi-unitary algebra, and developed various theorems clarifying its structure, cf. [2]. This notion contains as special cases the unitary algebras ([6], [9]), and the group algebras of (not necessarily unimodular) locally compact groups. Also the examples of factors given by J. VON NEUMANN in [8] can be interpreted from this point of view. It can be shown in virtue of this circumstance, that while many properties of the unitary algebras can be extended to the quasi-unitary case, the latter notion is more general also in the respect that the corresponding left ring $\mathbf{R}^g$ need not be semi-finite[1]), i. e. it can possess a nontrivial purely infinite component. This makes a difficulty, in view of the role of the left rings in the investigation of the quasi-unitary algebras. Thus it is of interest to obtain criteria for those quasi-unitary algebras $\mathbf{R}$ for which $\mathbf{R}^g$ is a semi-finite ring, and to clarify their structure.

The present paper is devoted to this problem, and in part continues the investigations of DIXMIER. Firstly, by continuation of his method we prove that if $\mathbf{R}^g$ is semi-finite, then $J=[M'M^{-1}]$[2]), where M is positive, self-adjoint, non-singular, $\eta\mathbf{R}^d$ [3]), and $M'=SMS$ (cf. Theorem 1, for the definitions and notations cf. below **2**). This result combined with DIXMIER's Theorem 2 shows that the representability of J in the form $[M'M^{-1}]$ is a necessary and sufficient condition for the semi-finiteness of $\mathbf{R}^g$, and then $\mathbf{Q}^d \subseteqq \mathbf{P}^d$. In other

[1]) A ring of operators $\mathbf{N}$ is called semi-finite, if every projection $P\in\mathbf{N}$ contains a finite projection. We say that the projection P is finite if there exists no partial isometry $V\in\mathbf{N}$ with $V^*V=P$, $VV^*=Q<P$.

[2]) Given two (in general unbounded) closed operators S, T defined on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, we note by $[ST]$ the minimal closed extension of the product ST (provided it exists).

[3]) If T is a closed operator, we denote by $T\eta\mathbf{N}$ that T commutes with every operator of the commutant $\mathbf{N}'$ of $\mathbf{N}$.

words, Theorem 1 gives a solution for DIXMIER's hypothesis 1 (cf. [2] p. 283) in the semi-finite case.

In Theorem 2 we prove, generalizing the corresponding results for unitary algebras (cf. [6] Theorem 4 and [10] Theorem 18), that if $\mathbf{R}^g$ is semi-finite, then $\mathbf{R}^g$, M' and the maximal extension of the canonical trace can be prescribed. More explicitly, given a semi-finite operator ring $\mathbf{N}$ on a Hilbert space, a positive, self-adjoint, non-singular operator $H\eta\mathbf{N}$, and a maximal normal trace φ defined on a two-sided ideal $\mathfrak{m}\subseteq\mathbf{N}$,[4]) there exists a quasi-unitary algebra $\mathbf{R}$ such that $\mathbf{R}^g$ is $*$-isomorphic with $\mathbf{N}$ and, under this isomorphism, M' and the maximal extension of the canonical trace correspond to H and φ, respectively. If $\mathbf{R}$ is a maximal, then we show that it is determined up to an isomorphism by this choice (Theorem 3).

Next we investigate some properties of the quasi-unitary algebras with a semi-finite $\mathbf{R}^g$. We show beside others that contrary to the unitary case the canonical trace need not be maximal (cf. lemma 10 and the remark which follows). Finally we give a proof for a theorem of DIXMIER about the quasi-central elements, which leads to somewhat more general result (Theorem 5, cf. Theorem 4 in [2]).

2. Definitions and preliminary results. For the following cf. [2], in particular chapters I, II, V—VII. A *quasi-unitary algebra* $\mathbf{R}$ is an algebra over the complex numbers, on which an involutive antiautomorphism $x\to x^s$, an automorphism $x\to x^j$, and an inner product (x, y) are defined, such that $\mathbf{R}$ becomes a pre-Hilbert space satisfying the following axioms:

(i) $(x^s, x^s)=(x, x)$,
(ii) $(x, x^j)\geqq 0$,
(iii) $(xy, z)=(y, x^{js}z)$,
(iv) the mapping $x\to yx$ with fixed y is continuous,
(v) the linear combinations of the elements of the form $xy+(xy)^j$ are dense in $\mathbf{R}$ (x, y, z arbitrary in $\mathbf{R}$).

A *unitary algebra* is a quasi-unitary algebra with $x^j\equiv x$.

Let $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ be the Hilbert space, which is obtained by completion of $\mathbf{R}$. By axiom (iv), for every $x\in\mathbf{R}$ there exists a bounded operator U_x (resp. V_x) on $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ satisfying $U_x y=xy$ (resp. $V_x y=yx$) for every $y\in\mathbf{R}$. The weak (or

[4]) We recall that a trace φ defined on a two-sided ideal $\mathfrak{m}$ of an operator-ring $\mathbf{N}$ is a positive linear form such that $\varphi(AB)=\varphi(BA)$ for $A\in\mathfrak{m}$ and $B\in\mathbf{N}$. φ is regular, if $\varphi(T)=0$ for $T\in\mathfrak{m}$, $T\geqq 0$ implies $T=0$. A trace φ is normal, if it has the following property: let T_α be an increasing directed set of positive operators $\in\mathfrak{m}$ with a l. u. b. $T\in\mathfrak{m}$, then we have $\varphi(T)=\underset{\alpha}{\text{l. u. b.}}\,\varphi(T_\alpha)$. It is maximal, if it has no proper normal extension.

If we say in the following simply a trace, we suppose that it is normal and maximal. In the case of semi-finite rings this means, that it is also regular. Every (not necessarily maximal) trace φ has a maximal extension, which is uniquely determined, if $\mathbf{N}$ is semi-finite and $\mathfrak{m}$ is strongly dense in it. For a theory of traces cf. [1].

strong) closure of the operators U_x (resp. V_x) is a ring of operators $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) on $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ with unit operator. $\mathbf{R}^g$ (resp. $\mathbf{R}^d$) is called the left (right) ring of $\mathbf{R}$. The set of bounded operators on $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ which commute with every element of $\mathbf{R}^g$, coincides with $\mathbf{R}^d$; in other words, $\mathbf{R}^d$ is the commutant of $\mathbf{R}^g$: $\mathbf{R}^{g\prime} = \mathbf{R}^d$ (Theorem of commutation). The minimal closed extension J of the correspondence $x \to x^j$ is positive, self-adjoint, non-singular, and it is equal to the minimal closed extension of its restriction to the linear combinations of the elements xy $(x, y \in \mathbf{R})$. Denoting by S the involution of $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ obtained by the continuation of the correspondence $x \to x^s$ over $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, we have $J^{-1} = SJS$. The mapping $T \to STS$ $(T \in \mathbf{R}^g)$ establishes a conjugate linear isomorphism between $\mathbf{R}^g$ and $\mathbf{R}^d$. An element a of $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ is called left bounded, if there exists an operator U_a defined on $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ such that $U_a x = V_x a$ for every $x \in \mathbf{R}$. Then $U_a \in \mathbf{R}^g$. If a is left bounded and $T \in \mathbf{R}^g$, then Ta is left bounded too, and $U_{Ta} = TU_a$. $U_a^* = U_b$ (with b left bounded) if and only if $a \in D_{J^{-1}}$, and then $b = SJ^{-1}a$.

If $J = [M'M^{-1}]$, where $M \eta \mathbf{R}^d$ is positive, self-adjoint, non-singular, and $M' = SMS$, then $\mathbf{R}^g$ is semi-finite. This follows from the fact, that the elements $A = \sum_{i=1}^{n} U_{a_i} U_{b_i}^*$ $(a_i, b_i$ left bounded and $\in D_M)$ form a strongly dense two-sided ideal $\mathfrak{m} \subseteq \mathbf{R}^g$, and $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} (Ma_i, Mb_i)$ defines a (not necessarily maximal) trace on $\mathfrak{m}$. This is the *canonical trace* for $\mathbf{R}^g$. The operator M is not determined uniquely by the condition $J = [M'M^{-1}]$. If $C \eta \mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ is positive, self-adjoint and non-singular, then $[CM]$ possesses this property too, and conversely, if $J = [M_1' M_1^{-1}]$, then there exists an operator $C \eta \mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d$ of the same kind such that $M_1 = [CM]$. Therefore, the canonical trace is also not uniquely determined. Denote by $\mathbf{P}^d$ the set of operators $\in \mathbf{R}^g$ which commute with J, and by $\mathbf{Q}^d$ the set of operators $\in \mathbf{R}^g$ which commute with $\mathbf{P}^d$. Then from $J = [MM^{-1}]$ it follows that $\mathbf{Q}^d \subseteqq \mathbf{P}^d$; and conversely, if $\mathbf{R}^g$ is semi-finite and $\mathbf{Q}^d \subseteqq \mathbf{P}^d$, then $J = [M'M^{-1}]$.

3. Theorem 1. *Let $\mathbf{R}$ be a quasi-unitary algebra for which $\mathbf{R}^g$ is semi-finite. Then $J = [M'M^{-1}]$, where $M \eta \mathbf{R}^d$ is self-adjoint, positive, non-singular, and $M' = SMS$.*

From the proof of Theorem 3 in [2] we shall use the following facts. Let φ be a trace defined on the (strongly dense) two-sided ideal $\mathfrak{m}$ of $\mathbf{R}^g$. Then there exists a positive, self-adjoint, non-singular operator $M \eta \mathbf{R}^d$ such that

a) if we denote by A the set of those left bounded elements $\in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ for which $U_a \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ [5]), then M is the minimal closed extension of its restriction to A;

[5]) If $\mathfrak{m}$ is a two-sided ideal in an operator-ring $\mathbf{N}$, then $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ denotes the two-sided ideal formed by the elements $T \in \mathbf{N}$ for which $T^*T \in \mathfrak{m}$.

b) if $a, b \in A$ then $(Ma, Mb) = \varphi(U_a U_b^*)$;

c) if J commutes with M, then putting $M' = SMS$ we have $J = [M'M^{-1}]$ (cf. [2] lemma 23).

Therefore in the following it suffices to show that in consequence of *a)* and *b)* J commutes with M.[6])

Before passing to the proof of this statement we need some lemmas.

Lemma 1. *For $x \in \mathbf{R}$ there exists an operator T_x such that $T_x M \subseteq M V_x$.*

Proof: We note first that if $a \in A$ then $V_x a \in A$ too, because $V_x a = U_a x$, and so $U_{V_x a} = U_{U_a x} = U_a U_x \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$. We define $T'_x Ma = M V_x a$ for $a \in A$; T'_x is densely defined. Since $\| T'_x Ma \|^2 = \| M V_x a \|^2 = \varphi(U_a U_x U_x^* U_a^*) \leqq K \varphi(U_a U_a^*) = K \| Ma \|^2$ where K depends only on x, T'_x can be extended by continuity to a bounded operator T_x. Finally, if $a \in D_M$, then there exists a sequence $a_n \in A$ $(n = 1, 2, \ldots)$ such that $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} V_x a_n = V_x a$, $\lim_{n \to \infty} M a_n = Ma$; hence from $T_x M a_n = M V_x a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ it follows that $V_x a \in D_M$ and $T_x Ma = M V_x a$.

We introduce for $X, Y \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ the scalar product $(X, Y) = \varphi(XY^*)$. Then with the involutive antiautomorphism $X \to X^*$ and the usual product $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ becomes a unitary algebra, which we denote again by $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, and its completion by $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. As it is shown in [6] (Theorem 4) or in different form in [10] (Theorem 18), the left and right rings of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ can be obtained in the following way. Let $T \in \mathbf{R}^g$ and $X \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, then we have $\varphi((TX)^*(TX)) = \varphi(X^* T^* TX) \leqq \leqq \|T\|^2 \varphi(X^* X)$, hence the correspondence $X \to TX$ can be extended to a bounded linear transformation L_T defined on $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. The totality of these operators L_T $(T \in \mathbf{R}^g)$ coincides with the left ring of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$. Similarly, we can define for $T \in \mathbf{R}^g$ the operator R_T by extending the correspondence $X \to XT$ to a bounded linear transformation on $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, and the totality of these operators forms the right ring of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.

Lemma 2. *The correspondence $Ma \to U_a$ $(a \in A)$ can be extended to an isomorphism ψ between the spaces $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ and $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, which carries $\mathbf{R}^g$ into the left ring, and $\mathbf{R}^d$ into the right ring of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.*

---

[6]) If $H_1 = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda^{(1)}$ and $H_2 = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda^{(2)}$ are two operators defined on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, we say that they commute, if $E_\lambda^{(1)}$ and $E_\mu^{(2)}$ commute for $\lambda, \mu \geqq 0$. In this case $[H_1 H_2]$ always exists, and is positive, self-adjoint.

Proof: If $X \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and $y \in \mathbf{R}$, $U_{Xy} = XU_y \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, hence $Xy \in A$. Since the set of the operators U_y ($y \in \mathbf{R}$) forms a strongly dense $*$-subalgebra of $\mathbf{R}^g$, there exists, by a theorem of KAPLANSKY (cf. [7] Theorem 1), a directed set of operators $\{U_{y_\alpha}\}_{\alpha \in F}$ ($y_\alpha \in \mathbf{R}$), which converges strongly and boundedly in norm to I. φ is normal, hence the mapping $B \to \varphi(X^* XB)$ ($B \in \mathbf{R}^g$) is continuous on bounded sets of $\mathbf{R}^g$ in the strong topology (cf. [3] Corollary 8 of the Theorem 3). So we have $\lim\limits_\alpha \varphi(X^* XU_{x_\alpha}) = \varphi(X^* X)$. From this it is clear that the linear set of the operators U_a ($a \in A$) is dense in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. Since $(Ma, Mb) = \varphi(U_a U_b^*)$ ($a, b \in A$), the correspondence $Ma \to U_a$ can be extended to a unitary mapping ψ between the spaces $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ and $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. If $T \in \mathbf{R}^g$ ($a, b \in A$), then $(TMa, Mb) = (MTa, Mb) = \varphi(U_{Ta} U_b^*) = \varphi(TU_a U_b^*)$. Hence the mapping ψ carries $\mathbf{R}^g$ into the left ring of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$. Since the right ring is the commutant of the left ring (Theorem of commutation), we see that ψ maps at the same time $\mathbf{R}^d$ into the right ring of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.

We put in the following $C = (M + iI)(M - iI)^{-1}$; C is unitary and $\in \mathbf{R}^d$. To prove that J and M commute, it suffices evidently to show this for J and C.

Lemma 3. *If $a \in A$ then $Ca \in A$ and $U_{Ca} = U_a C'$, where C' is a unitary operator $\in \mathbf{R}^g$, which depends only on C.*

Proof: Since $C \in \mathbf{R}^d$, there exists by lemma 2 a unitary operator $C' \in \mathbf{R}^g$ depending only on C such that $\psi(CMa) = U_a C'$ for $a \in A$. If $U_{x_\alpha} \to C'$ strongly and such that $\|U_{x_\alpha}\| \leq 1$ (Theorem of KAPLANSKY), then $U_a U_{x_\alpha}$ converges to $U_a C'$ in the metric of the space $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$.[7]) Since $\psi(MV_x a) = U_a U_x$, we have $\lim\limits_\alpha MV_{x_\alpha} a = CMa = MCa$, hence for $y \in \mathbf{R}$ by lemma 1 $\lim\limits_\alpha MV_y V_{x_\alpha} a = \lim\limits_\alpha T_y MV_{x_\alpha} a = T_y MCa = MV_y Ca$. Let $\int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ be the spectral representation of M. For every $\delta > 0$ $\|(I - E_\delta) V_y Ca\| = \lim\limits_\alpha \|(I - E_\delta) V_y V_{x_\alpha} a\| \leq K\|y\|$, where K does not depend on δ and α, because the operators $U_{V_{x_\alpha} a} = U_a U_{x_\alpha}$ are uniformly bounded in norm. Since M is non-singular, we have $\|V_y Ca\| \leq K\|y\|$ for every $y \in \mathbf{R}$. This proves that Ca is left bounded, and that $U_{Ca} = \psi(MCa) = U_a C'$.

Lemma 4. *For every left bounded $a \in \mathfrak{H}_\mathbf{R}$, Ca is left bounded too, and $U_{Ca} = U_a C'$ where C' is a unitary operator $\in \mathbf{R}^g$ which depends only on C.*

---

[7]) If $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, $\|U_\alpha\| \leq 1$, $U_\alpha \to U$ strongly, and U is unitary, then $TU_\alpha \to TU$ in the metric of the space $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. In this case we have namely

$$\varphi([TU - TU_\alpha][TU - TU_\alpha]^*) =$$
$$= \varphi(TT^*) + \varphi(TU_\alpha U^* T^*) - 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(TU_\alpha U^* T^*) \leq 2(\varphi(TT^*) - \mathrm{Re}\,\varphi(TU_\alpha U^* T^*)) \to 0.$$

Proof: If $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and a is left bounded, then $Ta \in A$, hence by lemma 3 $U_{CTa} = U_{Ta}C' = TU_aC'$, where $C' \in \mathbf{R}^g$ depends only on C. If $T_\alpha \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and $T_\alpha \to I$ strongly, then $V_x Ca = \lim_\alpha V_x T_\alpha Ca = \lim_\alpha T_\alpha U_a C' x = U_a C' x$ for every $x \in \mathbf{R}$, which proves that Ca is left bounded and that $U_{Ca} = U_a C'$.

Similarly, it can be proved that for every left bounded a, $C^* a$ is left bounded too, and that $U_{C^*a} = U_a C'^*$.

Proof of Theorem 1: We have by lemma 4 for every left bounded $a \in D_{J^{-1}}$: $U^*_{Ca} = (U_a C')^* = C'^* U_{SJa^{-1}} = U_{C'^*SJa^{-1}}$, which proves that $Ca \in D_{J^{-1}}$ and $SJ^{-1}Ca = C^* SJ^{-1}a$. Substituting a by Sx $(x \in \mathbf{R})$, and putting $\bar{C} = SCS$, $C'' = C'^*$, we get $J\bar{C}x = C''Jx$ for every $x \in \mathbf{R}$. If a is arbitrary $\in D_J$, then we can determine a sequence $x_n \in \mathbf{R}$ such that $x_n \to a$ and $Jx_n \to Ja$, since J is the minimal closed extension of its restriction to $\mathbf{R}$. Therefore $\lim_{n\to\infty} J\bar{C}x_n = \lim_{n\to\infty} C''Jx_n = C''Ja$, which proves that if $a \in D_J$, then $\bar{C}a \in D_J$ too. Replacing C by C^* in the above reasoning, and noting that $\overline{C^*} = \bar{C}^*$, we get that $a \in D_J$ gives $\bar{C}^* a \in D_J$ too. Therefore the domains of definition of the operators J and $\bar{C}^* J \bar{C}$ coincide, and since C'' is unitary, we have $\|\bar{C}^* J \bar{C} a\|^2 = \|Ja\|^2$ for $a \in D_J$. But as it is known, this gives necessarily $J = \bar{C}^* J \bar{C}$ or $J^{-1} = C^* J^{-1} C$, and so the proof of Theorem 1 is completed.

Corollary. *If* $\mathbf{R}$ *is a quasi-unitary algebra with a semi-finite* $\mathbf{R}^g$, *then* $\mathbf{Q}^d \subseteq \mathbf{P}^d$.

Proof: This is an immediate consequence of our Theorem 1 and of Theorem 2 in [2].

4. Theorem 2. *Given a semi-finite ring of operators* $\mathbf{N}$ *defined on a Hilbert space* $\mathfrak{H}$, *a positive, self-adjoint, non-singular operator* $H \eta \mathbf{N}$, *a trace* φ *defined on a two-sided ideal* $\mathfrak{m}$ *of* $\mathbf{N}$, *there exists a quasi-unitary algebra* $\mathbf{R}$ *with the following properties:* $\mathbf{R}^g$ *is* $*$*-isomorphic with* $\mathbf{N}$; M' (cf. Theorem 1) *and the maximal extension of the canonical trace on* $\mathbf{R}^g$, *and* H, φ, *respectively, correspond to each other under this isomorphism.*

Proof: Let $\int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda$ $(E_\lambda \in \mathbf{N})$ be the spectral representation of H. We denote by $\mathbf{R} \subseteq \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ the $*$-subalgebra of $\mathbf{N}$ consisting of the operators $X \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, for which there exists a projection $E(\Delta) = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$, $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, with $X = E(\Delta)X = XE(\Delta)$. For such an interval Δ we say that it contains the operator X, and we denote by $\mathbf{R}_\Delta$ the totality of operators $\in \mathbf{R}$ contained by Δ. It is evident that for $X, Y \in \mathbf{R}$ there exists a Δ such that $X, Y \in \mathbf{R}_\Delta$. We define an inner product between X, Y by $(X, Y) = \varphi\big((XH^{-1}(\Delta))(XH^{-1}(\Delta))^*\big)$, where $H^{-1}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}\lambda^{-1}\,dE_\lambda$.[8]) This is obviously independent of Λ, provided that it contains X and Y. It is not hard to verify that with this definition $\mathbf{R}$ becomes a pre-Hilbert space. To make a quasi-unitary algebra from $\mathbf{R}$ we define an automorphism of $\mathbf{R}$ by $X^j=H(\Lambda)XH^{-1}(\Lambda)$, and an involutive antiautomorphism by $X^s=H^{-1}(\Lambda)X^*H(\Lambda)$, where $X\in\mathbf{R}_\Lambda$. To show that the operation ^{j} gives an automorphism of $\mathbf{R}$, we have to prove that $(aX+BY)^j=$ $=aX^j+BY^j$ for arbitrary complex numbers a, b, and that $(XY)^j=X^jY^j$. Suppose that $X,Y\in\mathbf{R}_\Lambda$, then $(aX+BY)^j=H(\Lambda)(aX+BY)H^{-1}(\Lambda)=$ $=aH(\Lambda)XH^{-1}(\Lambda)+BH(\Lambda)YH^{-1}(\Lambda)=aX^j+BY^j$ by the definition of X^j and Y^j. If $X,Y\in\mathbf{R}_\Lambda$, then $(XY)^j=H(\Lambda)XYH^{-1}(\Lambda)=H(\Lambda)XE(\Lambda)YH^{-1}(\Lambda)=$ $=H(\Lambda)XH^{-1}(\Lambda)H(\Lambda)YH^{-1}(\Lambda)=X^jY^j$. The proof that $X\to X^s$ defines an involutive antiautomorphism of $\mathbf{R}$ is quite similar, and we omit it.

Lemma 5. *With the above definitions* $\mathbf{R}$ *satisfies axioms* (i)—(iv) *of a quasi-unitary algebra, enumerated in* **2**.

Proof: Ad (i): If $X,Y\in\mathbf{R}_\Lambda$, then we have $X^*,Y^*\in\mathbf{R}_\Lambda$ too, and

$$(Y^s,X^s)=\varphi\big([H^{-1}(\Lambda)Y^*H(\Lambda)H^{-1}(\Lambda)][H^{-1}(\Lambda)X^*H(\Lambda)H^{-1}(\Lambda)]^*\big)=$$
$$=\varphi\big(H^{-1}(\Lambda)Y^*XH^{-1}(\Lambda)\big)=\varphi\big([XH^{-1}(\Lambda)][YH^{-1}(\Lambda)]^*\big)=(X,Y).$$

Ad (ii): If $X\in\mathbf{R}_\Lambda$ then

$$(X^j,X)=\varphi\big([H(\Lambda)XH^{-1}(\Lambda)H^{-1}(\Lambda)][XH^{-1}(\Lambda)]^*\big)=$$
$$=\varphi\big(H^{\frac{1}{2}}(\Lambda)XH^{-3}(\Lambda)X^*H^{\frac{1}{2}}(\Lambda)\big)\geqq 0.$$[9])

Ad (iii):

$$(XY,Z)=\varphi\big([XYH^{-1}(\Lambda)][ZH^{-1}(\Lambda)]^*\big)=$$
$$=\varphi\big([YH^{-1}(\Lambda)][X^*ZH^{-1}(\Lambda)]\big)=(Y,X^{js}Z),$$

provided that $X,Y,Z\in\mathbf{R}_\Lambda$, because

$$X^{js}=H(\Lambda)[H^{-1}(\Lambda)X^*H(\Lambda)]H^{-1}(\Lambda)=X^*.$$

Ad (iv):

$$\|XY\|^2=\varphi\big(XYH^{-2}(\Lambda)Y^*X^*\big)=$$
$$=\varphi\big([YH^{-1}(\Lambda)]^*X^*X[YH^{-1}(\Lambda)]\big)\leqq K\varphi\big(YH^{-1}(\Lambda)][YH^{-1}(\Lambda)]^*\big)=K\|Y\|^2,$$

where K depends only on X, and $X,Y\in\mathbf{R}_\Lambda$.

---

[8]) In the following we put $H^k(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}\lambda^k\,dE_\lambda$, $k\gtreqless 0$, for an interval $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $0<\lambda_1<\lambda_2$ and for $H=\int\limits_0^\infty\lambda\,dE_\lambda$.

[9]) Note that if $A,B\in\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, then $AB\in\mathfrak{m}$ and $\varphi(AB)=\varphi(BA)$. Cf. for example [6], lemme 12.

The proof, that $\mathbf{R}$ satisfies also (v), will be given later (cf. lemma 7).

We take now the completion of $\mathbf{R}$ and denote it by $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Axiom (iv) allows to form the left multiplication operator U_X for every $X \in \mathbf{R}$. By axiom (iii) $U_X^* = U_{X^{js}}$, which shows, that the totality of these operators is $*$-invariant. We denote its weak closure by $\mathbf{R}^g$.

Lemma 6. *$\mathbf{R}^g$ contains the unit operator and is $*$-isomorphic with $\mathbf{N}$.*

Proof: As in lemma 2 we use again the unitary algebra formed by aid of $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, and denote its completion by $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. As we mentioned it, its left ring $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)^g$ coincides with the totality of the operators of the form L_T, $T \in \mathbf{N}$, and the correspondence $T \to L_T$ establishes obviously a $*$-isomorphism between $\mathbf{N}$ and $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)^g$. Hence it suffices to show that there exists a unitary mapping ψ between the spaces $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ and $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$ which carries $\mathbf{R}^g$ into $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)^g$. We define now $\psi'(X) = XH^{-1}(A)$ for $X \in \mathbf{R}$ and A containing X. We have evidently $(X, Y) = (\psi'(X), \psi'(Y))_1$. (We denote by $(\,,)_1$ the inner product in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$ to avoid the confusion with the inner product in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$.) Since $\mathbf{R}$ as a linear set is dense in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ by definition, and, as it is easily seen, so is in the space $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, and since $\psi'(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, ψ' can be extended to a unitary mapping ψ between these spaces. If $T, X, Y \in \mathbf{R}$,

$$(U_T X, Y) = (TX, Y) = (\psi(TX), \psi(Y))_1 = (L_T \psi(X), \psi(Y))_1$$

and since $\mathbf{R}$ as a $*$-subalgebra is dense in $\mathbf{R}^g$ and $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)^g$, lemma 6 is proved.[10])

We denote by J the minimal closed extension of the correspondence $X \to X^j$ in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, and by S the involution obtained by the extension of $X \to X^s$.

Lemma 7. *$J = [M'M^{-1}]$, where $M' \eta \mathbf{R}^g$ corresponds to H under the $*$-isomorphism between $\mathbf{R}^g$ and $\mathbf{N}$, and $M = SM'S$.*

Proof: We denote by $\overline{H}'$ the operator in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, corresponding to H under the $*$-isomorphism between $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)^g$ and $\mathbf{N}$. Let $\overline{S}$ be the involution obtained by the continuation of $X \to X^*$ over $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, and $\overline{H} = \overline{S}\overline{H}'\overline{S}$. $\overline{H}'$ and $\overline{H}$ are commuting, selfadjoint, non-singular operators, hence $[\overline{H}'\overline{H}^{-1}]$ exists. The isomorphism ψ carries the correspondence $X \to X^j$ $(X \in \mathbf{R})$ in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ into the linear transformation defined on $\mathbf{R} \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$ by $J'X = H(A)XH^{-1}(A)$ $(X \in \mathbf{R}_A)$. It is clear that $J'X = \overline{H}'\overline{H}^{-1}X$.

We prove now, that the minimal closed extension of J' is identical with $[\overline{H}'\overline{H}^{-1}]$, or, that the latter operator is the minimal closed extension of its

---

[10]) Observe that because of the maximality of φ, $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ is strongly dense in $\mathbf{N}$.

restriction to $\mathbf{R} \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. But this is contained in the following statement: Let $X \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$ be in the domain of definition of $\bar{H}'\bar{H}^{-1}$, then there exists an element $X_1 \in \mathbf{R}$ such that X_1 and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}X_1$ are arbitrarily near to X and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}X$, respectively. To see this, we put $\bar{H}' = \int_0^\infty \lambda d\bar{E}'_\lambda \left(\bar{E}'_\lambda \in \left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)''\right)$, and $\bar{E}_\lambda = \bar{S}\bar{E}'_\lambda\bar{S}$. Then there exists two intervals, Δ_1 and Δ_2, of the form $0 < \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ such that $\bar{E}'(\Delta_1)\bar{E}(\Delta_2)X$ and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}\bar{E}'(\Delta_1)\bar{E}(\Delta_2)X$ are arbitrary near to X and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}X$ respectively, and an element $X_1 \in \mathbf{R}$, such that X_1 and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}X_1$ are arbitrary near to $\bar{E}'(\Delta_1)\bar{E}(\Delta_2)X$ and $\bar{H}'\bar{H}^{-1}\bar{E}'(\Delta_1)\bar{E}(\Delta_2)X$, respectively. If M' and M correspond in the space $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ to $\bar{H}'$ and $\bar{H}$ respectively, then we have obviously $J = [M'M^{-1}]$, $M'\eta\mathbf{R}''$, and even $M = SM'S$. For this it suffices to observe that for $X \in \mathbf{R}$ and a suitable interval Δ,

$$\psi(SX) = (H^{-1}(\Delta)X^*H(\Delta))H^{-1}(\Delta) = (XH^{-1}(\Delta))^* = \bar{S}\psi(X),$$

i. e. $\bar{S}$ and S correspond to each other under ψ.

So the proof of lemma 7 is completed.

To show that $\mathbf{R}$ satisfies also the axiom (v) of the quasi-unitary algebras (cf. **2**), we need the folloving

Lemma 8. *J is the minimal closed extension of its restriction to the linear set in $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$ formed by the linear combination of the elements of the form XY ($X Y \in \mathbf{R}$).*

Proof: Passing by aid of the unitary mapping ψ to a problem in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$, it suffices to prove the following assertion: Given $X \in \mathbf{R}_\Delta$, there exists a projection $P \leqq E(\Delta)$, $P \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, such that $PX \in \mathbf{R}$ is arbitrary near to X in the metric of $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$. In this case $[\bar{H}'\bar{H}^{-1}]PX = H(\Delta)PXH^{-1}(\Delta)$ is arbitrary near to $[\bar{H}'\bar{H}^{-1}]X = H(\Delta)XH^{-1}(\Delta)$, and it was shown in the preceding lemma, that $[\bar{H}'\bar{H}^{-1}]$ is the minimal closed extension of its restriction to $\mathbf{R}$. But this follows from the fact, that $E(\Delta)$ is the l. u. b. of projections in $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ [10]), and from the remark in the footnote [7]).

An immediate consequence of this lemma is that $\mathbf{R}$ satisfies also axiom (v) in (**2**). By lemma 7 namely J is the minimal closed extension of the product of two commuting, positive, self-adjoint operators M^{-1} and M', hence it is itself positive, self-adjoint. So the range of $I+J$ is $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$, which combined with lemma 8 gives plainly that the elements $(I+J)XY = (XY) + (XY)^J$ ($XY \in \mathbf{R}$) span $\mathfrak{H}_\mathbf{R}$.

Summing up the above results, it can be seen from lemma 5 and from the preceding remark, that with the definitions at the beginning of the present section $\mathbf{R}$ becomes a quasi-unitary algebra. Lemma 6 shows that $\mathbf{R}''$ is $*$-isomorphic with $\mathbf{N}$; by lemma 7 we have $J = [M'M^{-1}]$ with $M\eta\mathbf{R}''$, $M = SM'S$, and M' corresponds to H under this isomorphism. To conclude the proof of the Theorem 2 it remains only to show, that the maximal extension φ' of the canonical trace in $\mathbf{R}^g$ corresponds to φ. If $X, Y \in \mathbf{R}_A$, then one sees at once, that $X, Y \in D_M$, and $\varphi'(U_X U_Y^*) = (MX, MY) = (XH(A), YH(A)) = \varphi(XY^*)$. It suffices therefore to remark that the trace φ is uniquely determined by its values on elements of the form XY^* $(X, Y \in \mathbf{R})$. But if the projections $P_\alpha \in \mathbf{R}$ converges to I strongly, and $X \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}} \subset \mathbf{N}$, then

$$\varphi(X) = \lim_\alpha \varphi(P_\alpha X) = \lim_\alpha \varphi(P_\alpha X P_\alpha P_\alpha),$$

and $P_\alpha X P_\alpha \in \mathbf{R}$, qu. e. d.

5. In the following we consider a quasi-unitary algebra $\mathbf{R}$ with a semi-finite left ring and we denote by φ the maximal extension of the canonical trace, and by $\mathfrak{m} \subset \mathbf{R}^g$ the corresponding two-sided ideal. We recall that now $J = [M' M^{-1}]$ (cf. Theorem 1) and we put $M = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda$ $(E_\lambda \in \mathbf{R}^d)$ and $M' = \int_0^\infty \lambda \, dE'_\lambda$, $E'_\lambda = S E_\lambda S \in \mathbf{R}^g$.

Lemma 9. *Suppose* $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ *be such that* $TE'(A) = T$, *where* $E'(A) = E'_{\lambda_2} - E'_{\lambda_1}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. *Then* $T = U_a$, *where* a *ist left bounded.*

Proof: By the theorem of KAPLANSKY (cf. [7] Theorem 1) we can choose a directed set of elements $x_\alpha \in \mathbf{R}$ such that $\| U_{x_\alpha} \| \leqq 1$, and

$$\operatorname*{weak\,lim}_\alpha U_{x_\alpha} = I.$$

We need now the following result of DIXMIER (cf. [2] lemme 7.a): If $a \in D_{J^{-1}}$ is left bounded and $L \in \mathbf{R}^g$ commutes with J, then SL^*Sa is left bounded too, and $U_{SL^*Sa} = U_a L$. We put $TE(A)x_\alpha = a_\alpha$, and prove that these elements converge weakly to an element $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Applying the above lemma to the case $a = x_\alpha$, $L = M^{-1}(A)$, we see that $M^{-1}(A)x_\alpha$ is left bounded, and $U_{M^{-1}(A)x_\alpha} = U_{x_\alpha} M'^{-1}(A)$. Hence it follows that $M^{-1}(A)a_\alpha = TM^{-1}(A)x_\alpha$ is left bounded too, and $U_{M^{-1}(A)a_\alpha} = TU_{M^{-1}(A)x_\alpha} = TU_{x_\alpha} M'^{-1}(A)$. So we have

$$\| a_\alpha \|^2 = \| MM^{-1}(A) a_\alpha \|^2 = \varphi(U_{M^{-1}(A)a_\alpha} U^*_{M^{-1}(A)a_\alpha}) =$$
$$= \varphi(TU_{x_\alpha} M'^{-2}(A) U^*_{x_\alpha} T^*) \leqq \| U_{x_\alpha} \|^2 \| M'^{-2}(A) \| \varphi(TT^*) \leqq K.$$

where K does not depend on α. We have further $\lim_\alpha (a_\alpha, xy) = \lim_\alpha (U_{a_\alpha} y^{sj}, x) = (Ty^{sj}, x)$ for $x, y \in \mathbf{R}$, which proves our assertion since the linear combinations of the elements xy $(x, y \in \mathbf{R})$ are dense in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Finally

$$Tx = \operatorname*{weak\,lim}_\alpha U_{a_\alpha} x = \operatorname*{weak\,lim}_\alpha V_x a_\alpha = V_x a$$

for $x \in \mathbf{R}$, from which lemma 9 follows immediately.

We recall ([2]), VIII) that the quasi-unitary algebra $\mathbf{R}$ is a continuation of $\mathbf{R}'$, if $\mathbf{R}'$ is a subalgebra of $\mathbf{R}$, the inner product, the automorphism and the involutive antiautomorphism in $\mathbf{R}'$ are the restrictions of the corresponding notions in $\mathbf{R}$, and finally $\mathbf{R}'$ is dense in $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ is said to be maximal,[11]) if it has no proper continuation. $\mathbf{R}$ is maximal if and only if it possesses the following property: If for $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ $J^n a$ exists and is left bounded for every $n \gtrless 0$, then $a \in \mathbf{R}$. Every quasi-unitary algebra is contained in a (uniquely determined) maximal algebra.

Theorem 3. *Let $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$ be maximal quasi-unitary algebras, with semi-finite left rings $\mathbf{R}_1^g$ and $\mathbf{R}_2^g$. We put $J_1 = [M_1' M_1^{-1}]$ and $J_2 = [M_2' M_2^{-1}]$* (cf. Theorem 1). *Suppose there exists a $*$-isomorphism ω between $\mathbf{R}_1^g$ and $\mathbf{R}_2^g$ such that M_1' and M_2', the maximal extensions of the canonical traces φ_1 and φ_2 correspond to each other respectively. Then $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$ are isomorphic, i. e. there exists a one to one mapping between them, which preserves the algebraic operations, the inner product, the automorphism, and the involutive antiautomorphism.*

Proof: Denote by $\mathfrak{m}_1$ the two-sided ideal belonging to φ_1, which is strongly dense in $\mathbf{R}_1^g$. We put $M_1 = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda^{(1)}$ and $E_1(\Delta) = E_{\lambda_2}^{(1)} - E_{\lambda_1}^{(1)}$, $E_1'(\Delta) = S_1 E_1(\Delta) S_1$ for an interval $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. We denote further by $\mathbf{S}_1$ the totality of operators $T \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ for which there exists a Δ such that $E_1'(\Delta) T = T E_1'(\Delta) = T$.

Similarly, we denote by $\mathfrak{m}_2$ the two-sided ideal $\subset \mathbf{R}_2^g$ belonging to φ_2, and we put $M_2 = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda^{(2)}$, $E_2(\Delta) = E_{\lambda_2}^{(2)} - E_{\lambda_1}^{(2)}$, $E_2'(\Delta) = S_2 E_2(\Delta) S_2$. Let $\mathbf{S}_2$ be the totality of operators $T \in \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$, for which $E_2(\Delta) T = T E_2(\Delta) = T$ with a suitable Δ.

If $T \in \mathbf{S}_1$, then by lemma 9 $T = U_a$, where a is left bounded. The reasoning of this lemma gives that $E_1'(\Delta) a = E_1(\Delta) a = a$ for a suitable Δ. Since $J_1 = [M_1' M_1^{-1}]$, we have $a \in D_{J_1^n}$ for $n \gtrless 0$, and $J_1^n a = M_1'^n(\Delta) M_1^{-n}(\Delta) a$. This shows that the totality of these elements a is a subset of $\mathbf{R}_1$, which we denote by $\mathbf{R}_1'$. We have further for $A = U_a$, $B = U_b \in \mathbf{S}_1$:

$$AB = U_{ab} \in \mathbf{S}_1 \quad \text{and} \quad \alpha A + \beta B = U_{\alpha a + \beta b} \in \mathbf{S}_1$$

for arbitrary complex numbers α and β. This gives that $\mathbf{R}_1'$ is a subalgebra of $\mathbf{R}_1$. Observing that $\mathbf{S}_1$ is a $*$-subalgebra of $\mathbf{R}_1^g$, for $a \in \mathbf{R}_1'$ we have $a^{J^*} \in \mathbf{R}_1'$, and since plainly $a^{J^n} \in \mathbf{R}_1'$ $(n \lesseqgtr 0)$, we have $a^s \in \mathbf{R}_1'$ too. We form also in a similar way the corresponding $\mathbf{R}_2' \subset \mathbf{R}_2$. If $T \in \mathbf{S}_1$ then $\omega(T) \in \mathbf{S}_2$, because from $T \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ it follows that $\omega(T) \in \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$, and since $\omega(E_1'(\Delta)) = E_2'(\Delta)$, $E_1'(\Delta) T = T E_1'(\Delta) = T$ gives $E_2'(\Delta) \omega(T) = \omega(T) E_2'(\Delta) = \omega(T)$. Define

[11]) In the terminology of Dixmier „algèbre quasi-unitaire achevée".

now a correspondence ψ between $\mathbf{R}_1'$ and $\mathbf{R}_2'$ by $U_{\psi(a)} = \omega(U_a)$, $a \in \mathbf{R}_1'$. Since $\omega(\mathbf{S}_1) = \mathbf{S}_2$ we have $\psi(\mathbf{R}_1') = \mathbf{R}_2'$ too, and it is clear that ψ is one to one. We have plainly $\psi(\alpha a + \beta b) = \alpha\psi(a) + \beta\psi(b)$ and $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$. To prove that ψ defines an isomorphism between $\mathbf{R}_1'$ and $\mathbf{R}_2'$ it remains to show that (i) $\psi(a^j) = \psi^j(a)$, (ii) $\psi(a^s) = \psi^s(a)$, (iii) $(a, b) = (\psi(a), \psi(b))$.

Ad (i): For $a \in \mathbf{R}_1'$ we have, applying again the lemma 7a in [2]:

$$\omega(U_{a^j}) = \omega(U_{M_1'(A) M_1'^{-1}(A) a}) =$$
$$= \omega(M_1'(A) U_a M_1'^{-1}(A)) = M_2'(A) U_{\psi(a)} M_2'^{-1}(A) = U_{\psi^j(a)}, \text{ hence } \psi(a^j) = \psi^j(a).$$

Ad (ii): $\omega(U_{a^{js}}) = \omega(U_a^*) = \omega(U_a)^* = U_{\psi(a)}^* = U_{\psi^{js}(a)}$, hence $\psi(a^{js}) = \psi^{js}(a)$, which combined with (i) shows that $\omega(a^s) = \omega^s(a)$.

Ad (iii): Since φ_1 and φ_2 correspond to each other under ω we have for $a, b \in \mathbf{R}_1'$ and a suitable A:

$$(a, b) = (M_1 M_1^{-1}(A) a,\ M_1 M_1^{-1}(A) b) = \varphi_1(U_{M^{-1}(A) a} U^*_{M^{-1}(A) b}) =$$
$$= \varphi_1(U_a M'^{-1}(A)\, [U_b M'^{-1}(A)]^*) = \varphi_2(U_{\psi(a)} M_2'^{-1}(A)\, [U_{\psi(b)} M_2'^{-1}(A)]^*) =$$
$$= \varphi_2(U_{M'_2{}^{-1}(A)\psi(a)} U^*_{M'_2{}^{-1}(A)\psi(b)}) = (M_2 M_2^{-1}(A)\psi(a),\ M_2 M_2^{-1}(A)\psi(b)) = (\psi(a), \psi(b)).$$

It is evident that $\mathbf{R}_1'$ (resp. $\mathbf{R}_2'$) is dense in $\mathbf{R}_1$ (resp. $\mathbf{R}_2$). Since a quasi-unitary algebra determines uniquely the corresponding maximal algebra, the above isomorphism can be extended to an isomorphism between $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$, qu. e. d.

6. In this section we intend to give more precise information about the structure of the space $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}}$ introduced in **3**, and its connection with the quasi-unitary algebra $\mathbf{R}$. The following lemma is in close connection with the extended Riesz—Fischer theorem (cf. [10] Theorem 13, for the techniques used cf. [4], especially 5 and 6).

Lemma 10. *Let $\mathbf{N}$ be a semi-finite operator-ring on the Hilbert space $\mathfrak{H}$ and φ a trace defined on the two-sided ideal $\mathfrak{m} \subset \mathbf{N}$. Let $T \eta \mathbf{N}$ be a closed operator on $\mathfrak{H}$ and let $T = VH$ be its polar representation, where $H = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$. Putting $H_n = \int_0^n \lambda\, dE_\lambda$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and $T_n = VH_n$ we consider the totality of operators $T \eta \mathbf{N}$, for which $T_n \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and $\lim_{n\to\infty} \varphi(T_n^* T_n) = \| T \|_2^2$ exists, and denote it by $Q(\mathbf{N})$. Defining the addition for $T, S \in Q(\mathbf{N})$ as $[T+S]$, $Q(\mathbf{N})$ becomes a linear space, and with the scalar product $(S, T) = \lim_{n\to\infty} \varphi(S_n T_n^*)$ even a Hilbert space.*

Proof: By a result of R. Pallu de la Barrière (cf. his Thesis, cited in [2] p. 293) there exists a family of elements $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ in $\mathfrak{H}$, such that for

$B \in \mathfrak{m}$ we have $\varphi(B) = \Sigma_{\alpha \in F}(Ba_\alpha, a_\alpha)$. If $T \in Q(\mathbf{N})$, then for $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(T_n^* T_n) = \Sigma_{\alpha \in F} \| T_n a_\alpha \|^2 \leqq \lim_{n \to \infty} \varphi(T_n^* T_n) = \| T \|_2^2 < +\infty,$$

from which it follows at once that $a_\alpha \in D_T$ $(\alpha \in F)$ and $\| T \|_2^2 = \Sigma_{\alpha \in F} \| T a_\alpha \|^2$. Obviously the converse is also true: If for $T \eta \mathbf{N}$, $a_\alpha \in D_T$ and $\Sigma_{\alpha \in F} \| T a_\alpha \|^2 < +\infty$, then $\lim_{n \to \infty} \varphi(T_n^* T_n)$ exists, hence $T \in Q(\mathbf{N})$. If $B = V|B|$ is the polar representation of $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, we have

$$\varphi(BB^*) = \varphi(V|B|^2 V^*) = \varphi(V^* V|B|^2) = \varphi(|B|^2) = \varphi(B^* B),$$

from which it is easily deduced, that if $T \in Q(\mathbf{N})$ then $T^* \in Q(\mathbf{N})$ too and $\| T \|_2^2 = \| T^* \|_2^2$. To prove that $[T + S]$ exists we observe that the linear set A of the elements $\Sigma_{\alpha \in F} B'_\alpha a_\alpha$, where $B'_\alpha \in \mathbf{N}'$ and $B_\alpha \neq 0$ only for *a* finite set of values of α, is dense in $\mathfrak{H}$. Otherwise because of the regularity of φ there would exist a projection $P \neq 0$, $P \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, such that $Pa_\alpha = 0$ $(\alpha \in F)$. Then $\varphi(P) = 0$, and so $P = 0$, which yields a contradiction. Since $a_\alpha \in D_{T+S}$ and $a_\alpha \subseteqq D_{T^* + S^*} \subseteqq D_{(T+S)^*}$, therefore $T + S$ and $(T+S)^*$ are densely defined in $\mathfrak{H}$. So $[T + S]$ exists, and plainly $\in Q(\mathbf{N})$. To prove the validity of the associative law $[R + [S + T]] = [[R + S] + T]$, it suffices to show that $T \in Q(\mathbf{N})$ is equal to the minimal closed extension T_1 of its restriction to A. For this observe first that $T_1 \in Q(\mathbf{N})$ too, and we can suppose T to be positive hermitian. If $B \in \mathbf{N}$ and $T \in Q(\mathbf{N})$ then $\lim_{n \to \infty} \varphi(T_n B B^* T_n^*)$ exists. Hence $\lim_{n \to \infty} \varphi(B^* T_n^* T_n B)$ exists too, which implies that $Ba_\alpha \in D_T$, or that TB is densely defined. Suppose now that the range of $I + T_1$ is not dense in $\mathfrak{H}$. Then there exists necessarily a projection $P \neq 0$, $P \in \mathbf{N}$, such that $O \supseteqq P(I + T_1)$. We have

$$O = [P(I + T_1)]^* \supseteqq (I + T_1)^* P \supseteqq (I + T_1^*) P \supseteqq (1 + T)P.$$

By the former remark there exists an element $f \neq 0$, $f \in \mathfrak{H}$, such that $Pf = f$ and $f \in D_T$. Hence $(I + T)f = 0$, which is impossible if T is positive hermitian. So the range of $I + T_1$ is dense in $\mathfrak{H}$, which proves that T_1 is hermitian, and so $T = T_1$.

It is easily verified that $(S, T) = \lim_{n \to \infty} \varphi(S_n T_n^*)$ possesses the properties of an inner product; to prove lemma 10 we have therefore only to establish the completeness of this space with respect to the norm $\| \ \|_2$. Let L_n be a sequence $\in Q(\mathbf{N})$ such that

$$\lim_{m, n \to \infty} \| L_n - L_m \|_2^2 = \lim_{m, n \to \infty} \| L_n^* - L_m^* \|_2^2 = 0.$$

It is easily seen that by $Sf = \lim L_n f$ $(f \in A)$ a (densely defined) linear transformation S is given. We define similarly $S'f = \lim L_n^* f$, $f \in A$. For $f, g \in A$ we have

$$(Sf, g) = \lim_{n \to \infty} (L_n f, g) = \lim_{n \to \infty} (f, L_n^* g) = (f, S'g)$$

This gives that $S^* \supseteqq S'$. Thus the minimal closed extension $\bar{S}$ of S exists, and plainly $\bar{S}\eta\mathbf{N}$. In particular $\bar{S}a_\alpha = \lim_{n\to\infty} T_n a_\alpha$ $(\alpha \in F)$, from which it follows that $\Sigma_{\alpha\in F}\|\bar{S}a_\alpha\|^2 < +\infty$ and so $\bar{S} \in Q(\mathbf{N})$. Finally it is clear that $\lim_{n\to\infty}\|T_n - \bar{S}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty}\Sigma_{\alpha\in F}\|(T_n - \bar{S})a_\alpha\|^2 = 0$. So the proof of lemma 10 is completed.

In the following we call the elements $\in Q(\mathbf{N})$ square integrable with respect to φ.

Lemma 11. *Let* $\mathbf{R}$ *be a quasi-unitary algebra with a semi-finite* $\mathbf{R}^g$. *Suppose that* $J = [M'M^{-1}]$, *and let* φ *be the maximal extension of the corresponding canonical trace. Suppose that* φ *is defined on the two-sided ideal* $\mathfrak{m} \subset \mathbf{R}^g$. *An operator* $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ *is of the form* U_a, *with a left bounded and* $a \in D_M$, *if and only if* $[TM'^{-1}]$ *exists and is square integrable with respect to* φ.

Proof: (i) Suppose that $T = U_a$, where a is left bounded. Let $M = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ and we put $\Delta_n = \left(\frac{1}{n} \leqq \lambda < +\infty\right)$ for $n = 1, 2, \ldots$. Since $M^{-1}(\Delta_n) \in \mathbf{R}^d$, and it commutes with J, $M^{-1}(\Delta_n)a$ is left bounded too, and $U_{M^{-1}(\Delta_n)a} = U_a M'^{-1}(\Delta_n)$.[12] So we get

$$\|MM^{-1}(\Delta_n)a\|^2 = \|(I - E_{\frac{1}{n}})a\|^2 = \varphi(U_{M^{-1}(\Delta_n)a} U^*_{M^{-1}(\Delta_n)a}) =$$

$$= \varphi(TM'^{-1}(\Delta_n)[TM'^{-1}(\Delta_n)]^*) = \sum_{\alpha\in F}\|M'^{-1}(\Delta_n)T^*a_\alpha\|^2 \leqq \|a\|^2$$

for $n = 1, 2, \ldots$, provided that $\varphi(A) = \sum_{\alpha\in F}(Aa_\alpha, a_\alpha)$ for $A \in \mathfrak{m}$. This gives that $a_\alpha \in D_{M'^{-1}T^*}$, therefore $M'^{-1}T^*$ is densely defined. Since $(M'^{-1}T^*)^* \supseteqq TM'^{-1}$ is densely defined too, we see that $[M'^{-1}T^*]$ exists. The series $\sum_{\alpha\in F}\|M'^{-1}T^*a_\alpha\|^2$ converges, hence $[M'^{-1}T^*]$ is square integrable with rescept to φ. By a remark made in the proof of lemma 10 the same is true for $[TM'^{-1}] = [M'^{-1}T^*]^*$.

(ii) Suppose that $[TM'^{-1}]$ exists, and is square integrable with respect to φ. Putting $\Delta_n = \left(\frac{1}{n} \leqq \lambda < +\infty\right)$, $E'(\Delta_n) = SE(\Delta_n)S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, we have by lemma 9 $TE'(\Delta_n) = U_{a_n}$ for each n, where a_n is left bounded. We prove now that the elements a_n converge to an element $a \in \mathfrak{H}_\mathbf{R}$. For this we observe first that for $n \geqq m$ $U_{E(\Delta_m)a_n} = TE'(\Delta_n)E'(\Delta_m) = U_{a_m}$[12]), hence $E(\Delta_m)a_n = a_m$. So we need only to prove that the sequence $\|a_n\|$ is bound-

[12]) If $T \in \mathbf{P}^d$ and a is left bounded, then Ta is left bounded too, and $U_{Ta} = U_a ST^*S$, also for an a not necessarily $\in D_{J^{-1}}$. (If $a \in D_{J^{-1}}$, then the problem is settled by lemme 8a in [2]). For this we have to prove that $V_x Ta = U_a ST^*Sx$ for every $x \in \mathbf{R}$. But by lemme 8b in [2] $V_x Ta = V_{ST^*Sx}a$, and by lemme 24 $V_{ST^*Sx}a = U_a ST^*Sx$, qu. e. d.

ed. But

$$\|a_n\|^2 = \|MM^{-1}(A_n)\, a_n\|^2 =$$
$$= \varphi(U_{M^{-1}(A_n)a_n} U^*_{M^{-1}(A_n)a_n}) = \varphi(TM'^{-1}(A_n)[TM'^{-1}(A_n)]^*) \leqq \|TM'^{-1}\|_2^2$$

for every n, which proves our assertion. We have further

$$V_x a = \lim_{n\to\infty} V_x a_n = \lim_{n\to\infty} U_{a_n} x = \lim_{n\to\infty} TE'(A_n)x = Tx$$

for every $x \in \mathbf{R}$, which shows that a is left bounded and $U_a = T$. Finally we prove that $a \in D_M$. To see this, observe that

$$\|M(A_n)a\|^2 = \|Ma_n\|^2 = \varphi(U_{a_n} U^*_{a_n}) \leqq \varphi(TT^*)$$

for every n, from which our assertion follows immediately.

Remark. Lemma 11 shows immediately, that the canonical trace in a unitary algebra constructed with $M = I$ is maximal. On the other side, combined with Theorem 2 it gives possibility to construct various examples of quasi-unitary algebras with a semi-finite $\mathbf{R}^g$ for which the canonical trace is not maximal by any choice of M. Indeed, we can proceed as follows. We choose a semi-finite ring $\mathbf{N}$, a maximal trace φ with the corresponding two-sided ideal $\mathfrak{m} \subseteqq \mathbf{N}$, and a positive, self-adjoint, non-singular $H \eta \mathbf{N}$. For a positive, self-adjoint, non-singular $C \eta \mathbf{N} \cap \mathbf{N}'$ we put $H_C = [CH]$. Next we consider the two-sided ideal $\mathfrak{a}$ formed by the operators $\sum_{i=1}^{n} A_i B_i^*$, where $A_i, B_i \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ are such that the operators $[A_i H_C^{-1}], [B_i H_C^{-1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are square integrable with respect to φ. Let $\mathbf{R}$ be the quasi-unitary algebra, which corresponds by Theorem 2 to $\mathbf{N}$, H and φ. If $\mathfrak{a}$ is properly contained in $\mathfrak{m}$ for any choice of C, then the canonical trace in $\mathbf{R}$ is not maximal. Consider for example the ring $\mathbf{B}$ of all bounded operators in a Hilbert space $\mathfrak{H}$. It is known that φ is determined up to a constant factor, $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ consists of the operators of the Hilbert—Schmidt class, and, whith the inner product $\varphi(AB^*)$, the totality of these operators forms a complete Hilbert space. Suppose further that H is bounded. Then it can be shown easily that $[AH^{-1}]$ exists and is square integrable if and only if $A = TH$, where $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$. If there exists a two-sided ideal $\mathfrak{n}$ properly contained in $\mathfrak{m}$, such that $H^2 \in \mathfrak{n}$, then evidently the operators $\sum_{i=1}^{n} A_i H^2 B_i^*$, where $A_i, B_i \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, are in $\mathfrak{n}$, hence they do not constitute all operators of $\mathfrak{m}$.

7. It is known (cf. [10] Theorem 19 and Corollary 19.1) that if $\mathbf{R}$ is a unitary algebra and $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, then the operator defined by $U'_a x = V_x a$ for $x \in \mathbf{R}$ has a minimal closed extension U_a, and the totality of these operators coincides with the set of square integrable operators with respect to the canonical trace (constructed with $M=I$). Let now $\mathbf{R}$ be a quasi-unitary algebra with a semi-finite $\mathbf{R}^g$. Suppose that $J=[M'M^{-1}]$, and denote by φ the maximal extension of the canonical trace, and by $\mathfrak{m}$ the corresponding two-sided ideal $\subset \mathbf{R}^g$. If, for an element $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, the minimal closed extension of the operator defined by $U'_a x = V_x a$ for $x \in \mathbf{R}$ exists, we denote it by U_a again. We prove now the following

Theorem 4. *Define a unitary mapping ψ of $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ on the Hilbert space L^2_φ (of the square integrable operators with respect to φ) by the condition $\psi(Mb) = U_b$, where b is left bounded and $\in D_M$. Denote by $T_a \in L^2_\varphi$ the operator corresponding to $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Then U_a exists if and only if $[T_a M']$ exists, and then $U_a = [T_a M']$.*

Proof: We put $M = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$, $M_n = \int_0^n \lambda\, dE_\lambda$ $(n=1,2,\dots)$. Since $E_\lambda \in \mathbf{P}^d$, i. e. it commutes with J, $E_\lambda x$ is left bounded and $\in D_M$ for any $x \in \mathbf{R}$. So the elements Mb are dense in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. To show that the same is true for the operators U_b in the space L^2_φ, we observe that if $T \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and if U_{x_α} $(x_\alpha \in \mathbf{R})$ converges strongly and boundedly in norm to I (cf. [7] Theorem 1), then $TU_{x_\alpha} = U_{Tx_\alpha}$ converges to T in the metric of L^2_φ[7]), and the elements Tx_α are left bounded. Therefore it suffices to remark that if $U_c \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ and c is left bounded, then putting $E'_n = SE_nS$ the operators $U_c E'_n = U_{E_n c}$[12]) converge to U_c in the metric of L^2_φ. So there exists a unitary mapping ψ of $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ on L^2_φ, which satisfies $\psi(Mb) = U_b$ for every left bounded $b \in D_M$. We divide the following in two steps.

(i) We prove that if U_a exists, then $[T_a M']$ exists too, and $U_a \supseteq [T_a M']$. Let $U_a = V|U_a|$ be the polar decomposition of U_a and $|U_a| = \int_0^\infty \lambda\, dF_\lambda$, $|U_a|_n = \int_0^n \lambda\, dF_\lambda$, $U_a^{(n)} = V|U_a|_n$ and $M'_n = SM_nS$ $(n=1,2,\dots)$. We put $\overline{F}_n = VF_nV^*$ for $n=1,2,\dots$, then for $x \in \mathbf{R}$

$$U_a^{(n)} x = \overline{F}_n U_a x = \overline{F}_n V_x a = V_x \overline{F}_n a,$$

hence $\overline{F}_n a$ is left bounded, and $U_{\overline{F}_n a} = U_a^{(n)}$. We show next that

$$U_{\overline{F}_n E_m a} = [\overline{F}_n T_a M'_m]$$

for $n, m = 1, 2, \dots$. By the reasoning of lemma 10, $[AT]$ and $[TA]$ exist for $A \in \mathbf{R}^g$ and $T \in L^2_\varphi$, and they are in L^2_φ. We see easily that $\|[AT]\|_2 \leqq \|A\|\,\|T\|_2$ and $\|TA\|_2 = \|[A^*T^*]\|_2 \leqq \|A\|\,\|T^*\|_2 = \|A\|\,\|T\|_2$. From this it follows at once, that for every $A \in \mathbf{R}^g$ there exist two bounded operators

L_A and R_A in L^2_φ, such that $L_A T=[AT]$, $R_A T=TA$ for $T\in L^2_\varphi$. We have

$$\psi(M_m M b)=\psi(M M_m b)=U_{M_m b}=U_b M'_m=R_{M'_m}U_b,$$

and

$$\psi(\bar F_n M b)=\psi(M\bar F_n b)=U_{\bar F_n b}=\bar F_n U_b=L_{\bar F_n}U_b.$$

Since the elements Mb (resp. U_b) are dense in $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ (resp. L^2_φ), we have, for every $c\in\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, $\psi(M_m c)=R_{M'_m}T_c$ and $\psi(\bar F_n c)=L_{\bar F_n}T_c$, hence

$$\psi(M_m\bar F_n a)=\psi(M\bar F_n E_m a)=U_{E_m\bar F_n a}=R_{M'_m}L_{\bar F_n}T_a=[\bar F_n T_a M'_m]$$
$$(m,n=1,2,\ldots).$$

Supposing that $c\in D_{T_a M'}$, we choose a sequence $c_n\in\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ such that $c_n\in D_{T_a M'_n}$, $E'_n c_n=c_n$ $(n=1,2,\ldots)$, and $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$, $\lim\limits_{n\to\infty}M'c_n=M'c$. Since $U_{E_n\bar F_m a}=U_a^{(m)}E'_n$, therefore

$$U_a^{(m)}c=\lim_{n\to\infty}U_a^{(m)}c_n=\lim_{n\to\infty}U_{\bar F_n E_m a}c_n=\lim_{n\to\infty}\bar F_m T_a M'_n c_n=\lim_{n\to\infty}\bar F_m T_a M'c_n=$$
$$=F_m T_a M'c.$$

Hence $\lim\limits_{m\to\infty}U_a^{(m)}c=\lim\limits_{m\to\infty}F_m T_a M'c$, which gives at once $c\in D_{U_a}$ and $U_a c=T_a M'c$, consequently $U_a\supseteq[T_a M']$[13]).

(ii) We prove now conversely, that if $[T_a M']$ exists, then U_a exists too, and $[T_a M']\supseteq U_a$. We put $T_a=V|T_a|$, $|T_a|=\int_0^\infty\lambda\, dG_\lambda$, $T_a^{(n)}=V|T_a|_n$, $\bar G_n=VG_nV^*$ $(n=1,2,\ldots)$. Similarly, as in (i), we get $\psi(G_n M_m a)=T_a^{(n)}M'_m$ $(m,n=1,2,\ldots)$. By lemma 11 $T_a^{(n)}M'_m=U_{a'}$, where $E_m a'=a'$ and a' is left bounded. Since $\psi(Ma')=T_a^{(n)}M'_m$, we have necessarily $Ma'=M_m\bar G_n a=$ $=M\bar G_n E_m a$,. which shows that $\bar G_n E_m a$ is left bounded, and $U_{\bar G_n E_m a}=$ $=T_a^{(n)}M'_m$ $(n,m=1,2,\ldots)$. If $x\in\mathbf{R}$ we have

$$\lim_{n\to\infty}V_x\bar F_n E_m a=\lim_{n\to\infty}T_a^{(n)}M'_m x,$$

therefore $M'_m x\in D_{T_a}$ and $V_x E_m a=T_a M'_m x$. Since $T_a M'_m\supseteq[T_a M']E'_m$, we have further

$$V_x a=\lim_{m\to\infty}V_x E_m a=\lim_{m\to\infty}[T_a M']E'_m x,$$

from which it follows that $x\in D_{[T_a M']}$, and that $V_x a=[T_a M']x$. But this gives clearly our statement.

Putting together the two parts, if U_a exists then by (i) $[T_a M']$ exists too, and $U_a\supseteq[T_a M']$, but by (ii) $[T_a M']\subseteq U_a$, hence $[T_a M']=U_a$, and conversely.

So the proof of the Theorem 4 is completed.

---

[13]) Note that $T_a M'$ is densely defined, since $T_a M'_n$ is densely defined for $n=1,2,\ldots$.

8. In this section we give a new proof for a theorem of DIXMIER concerning quasi-central elements, which leads to somewhat more general result (cf. [2] Theorème 4).[14]) We recall that if $\mathbf{R}$ is a quasi-unitary algebra, an element $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ is quasi-central, if for every $x \in \mathbf{R}$ we have $U_{xj}a = V_x a$. One verifies easily, that the set of these elements is a closed subspace of $\mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$, and denoting by $\mathfrak{M}$ the minimal subspace with a projection $P \in \mathbf{R}''$ containing it, we have $P \in \mathbf{R}'' \cap \mathbf{R}^d$ too (for these cf. [2] VII).

Theorem 5. *$\mathbf{R}''$ is of finite class if and only if $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$.*

Proof. The proof for the sufficiency of this condition is as in DIXMIER's paper. If G is quasi-central, then we have for $x, y \in \mathbf{R}$:

$$(U_x U_y a, a) = (U_y a, U_{xjs} a) = (U_y a, V_{xs} a) = (U_y V_{xsjs} a, a) = (U_y U_x a, a).$$

From this it follows by continuity $(STa, a) = (TSa, a)$ for $S, T \in \mathbf{R}''$. Since (Ta, a) $(T \in \mathbf{R}'')$ is a positive linear form, it determines a trace defined on every element of $\mathbf{R}''$. If, for $T \in \mathbf{R}''$, $(T^*Ta, a) = 0$ for every quasi-central a, then by $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ we have necessarily $T = 0$. Therefore $\mathbf{R}''$ has a complete system of traces, so that ([5] lemme 12) $\mathbf{R}''$ is of finite class.

Conversely, suppose that $\mathbf{R}''$ is of finite class, and $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$. Suppose that $J = [M'M^{-1}]$, $M \eta \mathbf{R}^d$, $M' = SMS$ (cf. Theorem 1). By central decomposition ([2] III) we can reduce the problem to the case, when $\mathfrak{M} = 0$ and the canonical trace φ is everywhere defined on $\mathbf{R}''$. Since now $I \in L^2_{\varphi}$, there exists an element $a \in \mathfrak{H}_{\mathbf{R}}$ such that $T_a = I$, hence by Theorem 4 U_a exists, and $U_a = M'$. We put

$$M' = \int_0^\infty \lambda\, dE'_\lambda \quad \text{and} \quad M'_n = \int_0^n \lambda\, dE'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Then $U_{E'_n a} = M'_n$, hence $SJ^{-1}E'_n a = E'_n a$ for $n = 1, 2, \ldots$, and so $SJ^{-1}a = a$.

Observe now, that if $c \in D_J$ then for $x \in \mathbf{R}$ we have $J^{-1}V_{xj}Jc = V_x c$. To prove this, we choose a sequence $y_n \in \mathbf{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ such that $\lim_{n \to \infty} y_n = c$ and $\lim_{n \to \infty} Jy_n = Jc$. In this case

$$V_x c = \lim_{n \to \infty} V_x y_n = \lim_{n \to \infty} J^{-1} V_{xj} J y_n,$$

which shows that $V_{xj}Jc \in D_{J^{-1}}$ and $J^{-1}V_{xj}Jc = V_x c$.

We have now for $x \in \mathbf{R}$:

$$V_x a = M'x = M'J^{-1}Jx = J^{-1}MJx = J^{-1}V_{xj}a = V_x J^{-1}a,$$

[14]) $\mathbf{Q}^d \subseteqq \mathbf{P}^d$ is proved in our Theorem 1, and the axiom A'·5, loc. cit., will not be used in the sequel.

hence $J^{-1}a=a$, and so $Sa=a$. We have also

$$V_{xj^{-1}}a=M'J^{-1}x=Mx=SM'x^{s}=SV_{x^{s}}SSa=U_{x}a.$$

This shows that a is quasi-central, and since obviously $a\neq 0$, we have a contradiction, and therefore our theorem is proved.

Bibliography.

[1] J. Dixmier, Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs, *Compositio Math.*, **10** (1952), 1—55.

[2] J. Dixmier, Algèbres quasi-unitaires, *Commentarii Math. Helv.*, **26** (1952), 275—322.

[3] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, **81** (1953), 9—39.

[4] H. A. Dye, The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators, *Transactions of the American Math. Soc.*, **72** (1952), 243—280.

[5] R. Godement, Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, *Journal de math. pures et appl.*. **30** (1951), 1—110.

[6] R. Godement, Théorie des caractères, I. Algèbres unitaires, *Annals of Math.*, **59** (1954), 47—62.

[7] I. Kaplansky, A theorem on rings of operators, *Pacific Journal of Math.*, **1** (1951), 227—232.

[8] J. v. Neumann, On rings of operators. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 94—161.

[9] R. Pallu de la Barrière, Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose, *Annales de l'École Norm. Sup.*, **70** (1953), 381—401.

[10] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Annals of Math.*, **57** (1953), 401—457.

(Received September 19, 1954.)

On weakly complemented lattices.

By G. SZÁSZ in Szeged.

1. Introduction. It is known that for any congruence relation K of a lattice L with least element O (similarly as for any one of a ring) the set S of elements L congruent to O is an ideal of L [2, p. 21] which is called the *kernel* of the congruence relation K. But whereas in a ring every congruence relation is determined by its kernel, this is not in general true in the case of lattices with least element [2, p. 21].

G. BIRKHOFF has proposed the very interesting problem to find necessary and sufficient conditions, securing that the correspondence between the congruence relations and ideals (as kernels of the congruence relations) of a lattice with least element be one-to-one [2, p. 161][1]). This problem is still unsolved in general, but for distributive lattices it has been solved two years ago by AREŠKIN [1]. In order to characterize the distributive lattices with least element for which the correspondence between congruence relations and their kernels is one-to-one, he has introduced the concept of „weakly complemented" lattices in the following sense:

Definition 1. *A lattice L with least element O is called weakly complemented if for each pair of distinct elements u, v of L there exists at least one element x in L such that*

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O.$$

In accordance with the result of AREŠKIN [1, p. 486], weakly complemented lattices form a very important class of lattices; nevertheless, the properties of such lattices have not yet been studied. In this paper we shall be concerned just with such investigations: in section 2, we give a characterization of weakly complemented lattices, more simple than definition 1; in section 3, we discuss connections between the class of weakly complemented lattices and some other important classes of lattices.

[1]) At that time it was only known, on basis of STONE's theorem on the one-to-one correspondence between Boolean algebras and idempotent rings with unit [4], that for distributive lattices with least element complementedness is a sufficient condition.

2. New characterization of weakly complemented lattices. In this section we give, using the term „semi-complement", a very simple characterization for weakly complemented lattices. The term „semi-complement" was introduced in a previous paper [**5**, p. 42] by the author, but it seems useful somewhat to modify the original definition in the following manner:

Definition 2. *By the semi-complement of an element x of a lattice L with least element O is meant an element y of L such that $x \cap y = O$.*

One sees immediately that O is a trivial semi-complement for all $x (\in L)$. A semi-complement y of the element x distinct from O will be called *proper semi-complement* of x [2]).

We recall also the following

Definition 3. *A lattice L with least element is called semi-complemented if all its elements distinct from the (eventually existing) greatest element of L have proper semi-complements in L.*

Now we prove

Theorem 1. *A lattice L with least element O is weakly complemented if and only if for each pair u, v of L such that $u < v$, there exists at least one semi-complement x of u which is not a semi-complement of v* (i. e., that $u \cap x = O$, but $v \cap x > O$).

Proof. First, let L be a weakly complemented lattice with the least element O, and let u, v be any pair of L such that $u < v$. Then, by definition 1, there exists at least one element x in L such that

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O.$$

Hence, by $u < v$, it follows

$$x \cap u = O, \quad x \cap v > O,$$

which proves the necessity of the condition of theorem 1.

Conversely, let L be a lattice with the least element O in which the condition of theorem 1 holds, and let u, v be any pair of distinct elements of L. Since, by $u \neq v$,

$$u \cap v < u \cup v,$$

it follows by our assumptions that there exists an element x in L for which

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O.$$

---

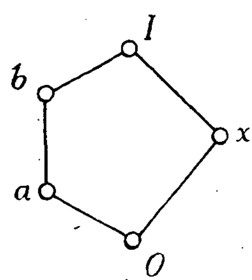
[2]) That is, the difference between the original definition and the new one is only that from now on we consider the element O as a (trivial) semi-complement of all elements of any lattice with least element O. For the advantage of this modification it suffices to remark that, by the new definition, if the element $x (\in L)$ is a semi-complement of $a (\in L)$ and y is an arbitrary element of L such that $y \leqq x$, then y is also a semi-complement of a; moreover, for any distributive lattice L with least element, the set of all semi-complements of an arbitrary element is an ideal of L.

This means just that the lattice L is weakly complemented, so that also the sufficiency of the condition of theorem 1 is proved.

Consequently, weakly complemented lattices may be defined also as follows:

Definition 4. *A lattice L with least element O is called weakly complemented if for each pair u, v of its elements such that $u < v$, there exists at least one semi-complement of u which is not a semi-complement of v.*

3. Further remarks on weakly complemented lattices. It is easily seen that *neither complementedness implies weakly complementedness*[3]) *nor conversely*. On the one hand, the lattice given by the diagramm



is obviously complemented, but, since the elements a and b have only common semi-complements (namely, the elements O and x), by definition 4 it is not weakly complemented. On the other hand, one sees easily that the family of all finite subsets of a countable set, partially ordered by set-inclusion, forms a weakly complemented lattice which is not complemented.

However, we prove

Theorem 2. *Any weakly complemented lattice is semi-complemented.*

Proof. Let L be any weakly complemented lattice with least element O and let a be any element of L not equal to the (eventually existing) greatest element of L. Then there exists an element b in L such that $a < b$. Hence, by definition 4, there exists a semi-complement x of a which satisfies the inequality

$$b \cap x > 0.$$

Consequently, $x \neq O$; that is, x is a proper semi-complement of a. Hence, by definition 3, L is semi-complemented.

On the other hand we prove

Theorem 3. *Any relatively complemented lattice with least element is weakly complemented.*

---

[3]) Hence, the term "weakly complemented" is not perfectly suggestive. Really, the class of weakly complemented lattices is a generalization (not of the complemented, but) of the relatively complemented lattices. (See theorem 3 below.)

Corollary. *Any complemented modular lattice is weakly complemented.*

Proof. Let L be any relatively complemented lattice with least element O and let a, b be any pair of its elements such that $a<b$. Further, let x denote any relative complement of a in the closed interval $[O, b]$. Then, by the definition of the relative complement,

(1) $$O \leqq x \leqq b,$$
(2) $$x \cap a = O,$$
(3) $$x \cup a = b.$$

Equation (2) shows that x is a semi-complement of a. Therefore, by definition 4, it suffices to show that x is not a semi-complement of b. But, (1) implies

(4) $$x \cap b = x,$$

and (3) implies, by $a \neq b$,

(5) $$x > O.$$

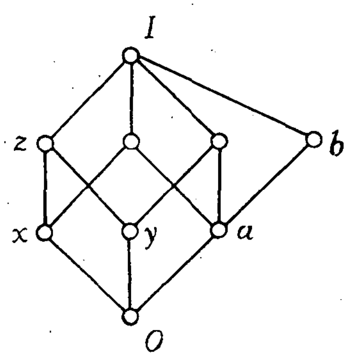
Thus, by (4) and (5), we have

$$x \cap b > O,$$

completing the proof of the theorem.

For the corollary, it suffices to recall the well-known result that any complemented modular lattice is relatively complemented [3, p. 7].

We remark that, in the corollary, the condition of modularity cannot be replaced by the weaker condition of semi-modularity. For, the lattice given by the diagramm



is complemented and semi-modular, but it is not weakly complemented, because every semi-complement of a (namely, each of the elements O, x, y, z) is also a semi-complement of b.

References.

[1] Г. Я. Арешкин, Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом, Доклады Акад. Наук С.С.С.Р., **90** (1953), 485—486.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25), revised edition (New York, 1948).

[3] J. Neumann, *Continuous geometry*, Princeton, 1936.

[4] M. H. Stone, Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **21** (1935), 103—105.

[5] G. Szász, Dense and semi-complemented lattices, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3), **1** (1953), 42—44.

(Received January 15, 1955.)

Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Von G. ALEXITS in Budapest.

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges Orthonormalsystem im endlichen Intervall (a, b). Bezeichne $\sigma_n^\alpha(x)$ das n-te (C, α)-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{1}$$

Die Reihe (1) heißt fast überall *stark* (C, α)-summierbar, wenn es eine Funktion $s(x)$ gibt, so daß fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [s(x) - \sigma_m^{\alpha-1}(x)]^2 = o(n)$$

zutrifft. Man könnte (1) fast überall *sehr stark* (C, α)-summierbar nennen, wenn sogar für jede wachsende Indexfolge $\{\nu_n\}$

$$\sum_{m=1}^{n} [s(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)]^2 = o(n) \tag{2}$$

fast überall gilt, wo die Ausnahmemenge mit $\{\nu_n\}$ natürlich variieren darf. ZYGMUND[1]) hat bewiesen, daß die fast überall stattfindinde Abelsche Summierbarkeit der Orthogonalreihe (1) unter der Bedingung $\Sigma c_n^2 < \infty$ schon die fast überall stattfindende starke (C, α)-Summierbarkeit für alle $\alpha > \frac{1}{2}$ nach sich zieht. ZALCWASSER[2]) hat die Frage gestellt, ob man in dieser Behauptung die starke Summierbarkeit — zumindesten für die (trigonometrische) Fourierreihe — nicht etwa durch die sehr starke Summierbarkeit ersetzen darf. Er

---

[1]) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362; Remarque sur la sommabilité des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise Cracovie, Sect. A*, **1926**, 185—191.

[2]) Z. ZALCWASSER, Sur la sommabilité des séries de Fourier, *Studia Math.*, **6** (1936), 82—88.

konnte aber nur beweisen, daß die Beziehung (2) für $\alpha=1$ und jede konvexe Indexfolge $\{\nu_n\}$ fast überall besteht.

Wir wollen nun — den Zygmundschen Beweisgang folgend — zeigen, daß diese Fragestellung unter gewisser Einschränkung der Größenordung von c_n bejahend zu beantworten ist.

S a t z. *Bezeichne $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton zunehmende Zahlenfolge mit konvergentem $\Sigma n^{-1}\lambda_n^{-1}$, für welche die Folge $\left\{\frac{n}{\lambda_n}\right\}$ monoton zunimmt. Die fast überall stattfindende Abelsche Summierbarkeit der Orthogonalreihe* (1) *impliziert unter der Bedingung*

$$c_n^2=O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right) \tag{3}$$

für alle $\alpha>\frac{1}{2}$ die sehr starke (C,α)-Summierbarkeit fast überall.

Ist die Reihe f. ü. nach der Funktion $s(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus dem eingangs erwähnten Zygmundschen Satz insbesondere $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha(x)=s(x)$ f. ü. $\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$, und so ist f. ü.

$$\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2=o(n).$$

Also haben wir wegen

$$\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)]^2\leqq 2\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2+2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2$$

nur zu zeigen, daß die letzte Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{\alpha-1})^2k^2c_k^2}{\alpha^2m(A_{\nu_m}^\alpha)^2},$$

wo A_ν^β den ν-ten Binomialkoeffizienten β-ter Ordnung bedeutet. Es gibt bekanntlich von ν unabhängige positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß $C_1\nu^\beta\leqq A_\nu^\beta\leqq C_2\nu^\beta$ ist, folglich gilt die Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2\,dx=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k)^{2\alpha-2}k^2c_k^2}{m\nu_m^{2\alpha}}.$$

Nach unserer Annahme (3) ist $k^2c_k^2=O\left(\frac{k}{\lambda_k}\right)$. Da die Folge $\left\{\frac{k}{\lambda_k}\right\}$ monoton wächst, folgt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, dx = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{m\lambda_{\nu_m}} \frac{\sum_{k=1}^{\nu_m} (\nu_m - k)^{2\alpha-2}}{\nu_m^{2\alpha}},$$

und wegen $\alpha > \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{\nu_m} (\nu_m - k)^{2\alpha-2} = O(\nu_m^{2\alpha-1})$, also erhalten wir letzten Endes

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, dx = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\lambda_{\nu_m}} < \infty.$$

Daraus folgt bekanntlich die Konvergenz fast überall der Reihe der Integranden, woraus sich nach einem oft verwendeten Kroneckerschen Lemma fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 = o(n)$$

ergibt, w. z. b. w.

Bekanntlich ist $\Sigma c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$ eine hinreichende Bedingung für die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall[3]). Aus unserem Satz ergibt sich mithin das folgende

Korollar. *Ist die Größenordnung der Koeffizienten c_n durch die Beziehung*

$$c_n^2 = O\left(\frac{1}{n\lambda_n (\log\log n)^2}\right)$$

eingeschränkt, so ist die Orthogonalreihe (1) *fast überall sehr stark* (C, α)-*summierbar für alle* $\alpha > \frac{1}{2}$.

(Eingegangen am 3. April 1955.)

[3]) D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108, und S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

Bibliographie.

Paul Turán, Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, 196 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1953.

Im vorliegenden Buch befaßt sich der Autor mit vielen weit auseinander liegenden Gebieten der Analysis und der analytischen Zahlentheorie. Das Inhaltsverzeichnis nennt: fastperiodische Funktionen, Potenzreihen und Dirichletsche Reihen mit Lücken, Randwerte analytischer Funktionen, Verschiebung ganzer Funktionen, Differentialgleichungen, angenäherte Auflösung algebraischer Gleichungen, Restglied der Primzahlformel, Riemannsche und quasi-Riemannsche Vermutung, usw.

Wie der Titel des Werkes erwarten läßt, besteht das Bindeglied der bunten Menge von Problemen, die in diesem Buch berücksichtigt werden, in der gemeinsamen Methode, mit deren Hilfe sie gelöst oder diskutiert werden. Demgemäß zerfällt das Buch in zwei Teile: die Fertigstellung des Apparates, d. h. die Aufstellung einer Reihe von Sätzen, die das Wesentliche der Methode zum Ausdruck bringen (I) und die Anwendungen auf die vielen Probleme (II).

Derartiges würde kaum möglich sein, wenn nicht die Probleme selbst ein gemeinsames Element aufzeigen würden. Im vorliegenden Werke liegt ein solches bindendes Element in dem Auftreten gewißer trigonometrischen Polynome der Gestalt

$$A_1 e^{i\lambda_1 t} + A_2 e^{i\lambda_2 t} + \cdots + A e_n^{i\lambda_n t} \tag{1}$$

oder verwandter Ausdrücke, die in bestimmter Weise abgeschätzt werden sollen. Ein bekannter Satz aus der Bohrschen Theorie der fastperiodischen Funktionen lehrt, daß wenn die komplexen Koeffizienten A_ν sämtlich dasselbe Argument haben und die λ_ν reell sind, der Absolutwert des Ausdrucks (1) beliebig nahe an sein triviales Maximum

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

gebracht werden kann und zwar für unendlich viele Werte des reellen Parameters $t \to \infty$. Ein anderer bekannter Satz lehrt, daß dasselbe der Fall ist bei beliebigen A_ν, wenn nur die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ linear unabhängig sind i. B. auf die rationalen Zahlen. Beide Sätze haben ein arithmetisches Aequivalent in klassischen Sätzen aus der Theorie der Diophantischen Approximationen, nämlich in den Sätzen von Dirichlet, bzw. Kronecker über die Annäherung von Zahlensystemen

$$(\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x) \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

modulo Eins an des System $(0, 0, \ldots, 0)$, bzw. an Systeme $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Der Natur dieser beiden Approximationssätzte gemäß, lassen sich die gesuchten t- oder x-Werte im ersten (Dirichletschen) Fall gut lokalisieren, im zweiten (Kroneckerschen) Fall dagegen nicht.

Von diesen zentralen Gedanken aus nun baut der Verfasser in I seine Methode auf, indem er eine Reihe von Sätzen entwickelt, in denen unter wechselnden Voraussetzungen, gewisse mit (1) verwandte Ausdrücke im obenangedeuteten Sinne abgeschätzt werden. Während er dabei manchmal absichtlich darauf verzichtet dem Absolutwert des betrachteten Ausdrucks den größmöglichen Wert zu erteilen, sondern sich mit geringeren Werten zufrieden gibt, gelingt es ihm, oft auf überraschende Weise, die Lokalisation der betreffenden Lösungswerte t erheblich zu verschärfen.

Bei der Anwendung dieser Sätze in II entstand auf diese Weise, trotz des reichhaltigen Inhalts, eine einheitliche Darstellung einer großen Reihe interessanter Ergebnisse, die bisher in der Literatur zerstreut waren und teilweise auch neu sind. Auch in den Fällen aber, wo die Ergebnisse schon bekannt waren, verdankt man sie oft dem Verfasser, der ja im letzten Jahrzehnte zu der Literatur Vieles beigetragen hat, das jetzt im Rahmen dieses klar geschriebenen Buches systematisch seinen Platz findet. Daß nicht alle Fragen restlos geklärt werden könnten, erhöht nur den Reiz dieser Arbeit, die an verschiedenen Stellen zu neuen Untersuchungen anregt. Für Kenner und Anfänger bietet sie deshalb gleich wertvolles Material. Es ist hier nicht am Platze, Ergebnisse zu zitieren; dazu wäre auch die Wahl zu schwer. Jedem aber, der in der analytischen Zahlentheorie und den angrenzenden Gebieten der Analysis oder der Zahlentheorie interessiert ist, sei die Lektüre dieses Buches wärmstens empfohlen.

Der Druck ist klar. Das Werk ist zwar nicht ohne einige Druckfehler, aber es wird durch diese nicht wesentlich entstellt.

Der Verfasser hat mir die folgende Liste von stöhrenden Druckfehlern und Ungenauigkeiten mitgeteilt, die ich dieser Besprechung beifüge.

S.11^{9} *statt* $F(t)$ *lese* $F(t)^{p}$
S.20^{14} *statt* (2.3.1) *lese* (2.1.1)
S.22_{8} *statt* $|b_j|^2$ *lese* $|a_j|^2$
S.23_{16} *statt* $|z_j|=1$ *lese* $\mathrm{R}w_j=0$
S.44_{3} *statt* $h(z)$ *lese* $f(z)$
S.56_{4} *statt* $\ldots < \mu_k$ *lese* $\ldots < \mu_k < \pi$
S.64_{1} *statt* z_j *lese* z_j^l
S.85^{12} *statt* $a < x_0 < b$ *lese* $a < x < b$
S.85_{4} *statt* für $u \to +\infty$ *lese* für $u \to \pm\infty$
S.101_{4} *statt* $\ldots + a_{nk}$ *lese* $\ldots + a_{nk}y$
S.105_{1} *statt* $f_0(x)=0$ *lese* $f_0'(z)=0$
S.117_{11} *vertausche die Zeichen* $=$ *und* $\leqq$
S.123_{13} *statt* nahe zur *lese* weit von
S.$125_{7,8}$ *statt* $(k-1)$ *lese* $(k+1)$
S.161_{5} *statt* (13.2.4) *lese* (14.2.4)
S.186_{8} *statt* $\frac{1}{2}$ *lese* $\frac{1}{2} + 12\delta^{1/4}$

S.18^{8} *statt* Nach Quadrierung... *lese* Wenn ω genügend groß ist, ist die linke Seite positiv; nach Quadrierung...
S.39^{1-2} *im Exponenten von e statt* $(K-l-1)$ *lese* $(K-2l)$
S.39 *in Formel* (5.2.6) *statt* $\frac{k\pi}{2m}$ *lese* $\frac{k\pi}{m}$
S.47_{12} *streiche die Wörter* und willkürliche Koeffizienten b_j
S.60_{12} *statt* $\max(1, |a_1|, \ldots, |a_n|)$ *lese* $\max(1, |a_1|, \ldots, |a_k|)$
S.71 *in Formel* (2.3.4) *setze immer* f *statt* F
S.74_{8} *statt* $2\pi k^2 \leqq x < 2\pi(k+1)^2$ *lese* $2\pi n^2 \leqq x < 2\pi(n+1)^2$
S.85^{1} *statt* folgt $f(x) \equiv 0 \ldots$ *lese* folgt z. B. im Falle $a=-\infty$, $b=+\infty, f(x) \equiv 0 \ldots$
S.91-95 *an mehreren Stellen statt* z_j *lese* τ_j
S.98 *an mehreren Stellen statt* λ_1 *lese* $|\lambda_1|$
S.112_{12} *das Zitatum lautet richtig, wie folgt:* ... Those familiar with the theory of Riemann zetafunction in connection with the distribution of primes...
S.116 *in Formel* (9.4.11) *statt* $\log^k \xi$ *lese* $\log^k T$
S.120 *in Formel* (10.1.2) *statt* $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-it\log j}\right|$ *lese* $\log\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-it\log j}\right|$

J. F. Koksma (Amsterdam)

Gaston Julia, Cours de Géométrie Infinitésimale. Deuxième édition entièrement refondue. Première fascicule. **Vecteurs et Tenseurs,** 103 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

Cette deuxième édition diffère de la première très sensiblement sous plusieurs regards. La théorie des tenseurs de deuxième ordre est présentée d'une façon nouvelle et plus géométrique. On a ajouté un nouveau paragraphe sur les tenseurs en coordonnées obliques. Il y a aussi beaucoup d'autres améliorations et additions, ainsi que des résultats nouveaux, publiés pour la première fois.

On constate avec satisfaction que le livre ne fait pas emploi de la méthode des quantités infinitésimales, dont l'élégance et efficacité ne sont qu'apparentes.

Table des matières: I. Vecteurs. Notions Élémentaires. II. Tenseurs du second ordre. III. Compléments d'Analyse vectorielle et tensorielle. IV. Notions sur les vecteurs et les tenseurs en coordonnées cartésiennes obliques.

Gy. Soós (Debrecen)

Szőkefalvi-Nagy Béla, Valós függvények és függvénysorok (Béla Sz.-Nagy, Fonctions et séries de fonctions réelles), 307 pages, Budapest, Tankönyvkiadó, 1954.

Ce livre contient la matière des cours de même titre de l'auteur, professés à l'université de Szeged. Dans l'arrangement d'une partie de la matière, il fait usage des idées et des méthodes dues à F. Riesz et publiées dans les trois premiers chapitres de leur ouvrage commun, "Leçons d'analyse fonctionnelle". Ces méthodes permettent notamment d'introduire l'intégrale de Lebesgue sans s'occuper d'avance de la théorie de la mesure et, de cette façon, fournissent la voie la plus courte et la plus commode, sinon la plus intuitive, pour arriver aux beaux résultats de la théorie de Lebesgue.

Après une introduction qui donne un aspect général du développement de la théorie des fonctions réelles et de son rôle joué dans l'analyse moderne, le premier chapitre résume les notions fondamentales de la théorie des ensembles abstraits et de celle des ensembles de points d'un espace euclidien. Le deuxième chapitre s'occupe des propriétés des fonctions continues et semi-continues, des différents types de convergence de suites de fonctions, des problèmes d'approximation des fonctions continues par des polynomes, et des propriétés des fonctions à variation bornée. Il est à remarquer que, auprès des théorèmes classiques d'approximation de Weierstrass, leur généralisation récente due à Stone est démontrée, elle aussi, et elle est appliquée à la démonstration du théorème de Tietze sur le prolongement des fonctions continues Les quatre chapitres qui suivent traitent des problèmes de dérivabilité, des propriètés des fonctions d'intervalle, de l'intégrale de Lebesgue et de celle de Stieltjes, à peu près dans le même ordre d'idées que l'ouvrage cité de l'auteur et de F. Riesz, y compris, comme applications ultérieures des méthodes, un exposé de l'intégrale de Riemann et de l'intégrale de Lebesgue sur les ensembles abstraits. Le septième chapitre contient les propriétés fondamentales de l'espace L^2 et des systèmes orthogonaux, avec les plus importants exemples des systèmes de ce type. Le huitième chapitre est consacré à la théorie de convergence des séries de Fourier; en dehors des théorèmes classiques on y trouve les théorèmes de Pringsheim et de Lukács sur la série conjuguée. Le dernier chapitre s'occupe des questions de sommabilité des séries de Fourier.

Le style concis et très clair de l'ouvrage contribue à l'influence éducative exercée par l'élégance des méthodes employées.

Ákos Császár (Budapest)

Henri Milloux et Charles Pisot, Principes. Méthodes générales (fasc. 1 du tome I du "Traité de théorie des fonctions", publié sous la direction de M. Gaston Julia), VIII + 300 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

C'est le premier volume d'une série conçue, avec le concours de M. G. Valiron, par M. G. Julia, sur le plan d'un "Traité de théorie des fonctions de variable complexe". D'après la préface par M. Julia, ce traité a pour but de permettre au lecteur pourvu de la culture mathématique d'un bon licencié, d'acquérir sur les idées, les méthodes, la technique de la théorie des fonctions, des connaissances suffisantes pour pouvoir lire la littérature moderne.

Le premier tome de la série est l'oeuvre de MM. Milloux et Pisot, il sera constitué de deux fascicules, le second devant suivre sous peu. Ce premier fascicule comprend une matière riche, très soigneusement exposée, et allant dans ces détails bien au delà les cadres indiqués par le titre.

Voici les chapitres: I. Introduction. Généralités. (Ensembles, intégrales, séries, etc.) — II. Fonctions holomorphes. Fonctions élémentaires. Premières notions sur les fonctions multiformes. — III. Théorèmes de Cauchy. Principes de maximum. Lemme de Schwarz. (Le théorème de Cauchy est démontré sous sa forme forte. Le lemme de Schwarz est utilisé systématiquement pour obtenir la formule limitée de Taylor, le théorème de Liouville, les propriétés des domaines de détermination infinie des fonctions entières, etc. Unicité de la représentation conforme. Théorème de Julia-Carathéodory.) — IV. Fonctions uniformes: Premières études. (Calcul des résidus, avec applications aux développements trigonométriques. Formule de Jensen. Théorème de Blaschke.) — V. Familles de fonctions et représentation conforme. (Théorèmes d'Arzelà—Montel et de Stieltjes—Vitali, application à la démonstration du théorème fondamental de Riemann sur les représentations conformes.) — VI. Fonctions analytiques. Représentations. Prolongements. (Séries de Taylor et de Laurent. Séries de polynomes. Transformations de Laplace. Séries de Dirichlet. Produits infinis de Weierstrass et séries de fonctions rationnelles de Mittag-Leffler.) — VII. Intégrales de fonctions analytiques. Principe de la symétrie et applications à la représentation conforme. Théorème de Picard. (Théorèmes de Schottky, Julia, Bloch, etc.)

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

G. Hoheisel, Partielle Differentialgleichungen. Dritte, neubearbeitete Auflage (Sammlung Göschen, Bd. 1003), 129 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1953.

Daß dieses Büchlein binnen 25 Jahren schon zur dritten Auflage kam, zeigt, daß es sich gut bewährt hat. Der Umfang hat sich im Vergleich mit der in 1928 erschienenen ersten Auflage im ganzen um 30 Seiten vermindert. Am meisten wurde die Behandlung von Berührungstransformationen und zum Teil die der Charakteristiken zusammengedrängt. Dagegen werden jetzt auch Randwertaufgaben behandelt, ohne aber die Differentialgleichungen der mathematischen Physik mit besonderer Beachtung zu würdigen. Auch der vektorielle Standpunkt hat sich hier mehr durchgesetzt. Die lineare Gleichungen werden in jedem Kapitel dieser Auflage in separaten Paragraphen untersucht.

Die sechs Kapiteln der ersten Auflage wurden in vier zusammengezogen: In den erstenzwei Kapiteln werden Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei bzw. n Veränderlichen behandelt, wo u. a. das vollständige Integral, das Cauchysche Problem, Pfaffsche Gleichungen, Charakteristiken und Involution, sowie kanonische und Berührungstransformationen eingeführt werden. — Die zwei weiteren Kapiteln behandeln Gleichungssysteme und den Spezialfall den die Gleichungen zweiter Ordnung darin bilden. Sieben Nachträge befassen sich mit „numerischen" bzw. speziellen Erörterungen. Es ist zu begrüssen, daß die Neuauflage auch einen kurzen Sachregister enthält, dessen Erweiterung aber noch wünschenswert zu sein scheint.

Wie aus den zahlreichen Hinweisen zu sehen ist, bildet diese Arbeit mit den „Gewöhnlichen Differentialgleichungen" und der „Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen" desselben Verfassers (dieselbe Sammlung No. 920, bzw. 1059, Berlin, 1951) eine organische Einheit.

Dieses geschickte, knappgefaßte Einleitungswerk wird sich wohl auch in seiner neuen Form für die in diesem Gebiet erste Orientierung suchenden Mathematikern als nützlich erweisen.

J. Aczél (Debrecen)

Karl Menger, Géométrie générale (Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule 124), 80 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Ce fascicule des „Mémoriaux" est un résumé de certaines recherches géométriques fondées sur la notion abstraite de la distance, recherches dont K. Menger était l'initiateur et qui se développaient surtout autour de son ancien cercle de Vienne. L'idée essentielle de ces recherches consiste dans le développement méthodique des propriétés intrinsèques de divers espaces, en se servant uniquement de la notion générale de distance. Coordonnées et représentations paramétriques n'intervenant pas dans la conception de l'espace, les résultats obtenus par cette voie atteignent un degré de généralité très élevé et éclaircissent en même temps l'essentiel géométrique de beaucoup de propriétés recherchées auparavant par des moyens du Calcul infinitésimal. L'auteur et les savants qui se sont associés à ces recherches générales ont réussi à démontrer que souvent l'usage des coordonnées et des représentations paramétriques est peut-être un moyen utile, mais leur introduction exige des restrictions considérables qui, pourtant, ne sont pas dû tout de caractère logique; au contraire, la possibilité d'introduire la conception de l'espace par les méthodes classiques de la Géométrie infinitésimale est une conséquence directe de la structure métrique intrinsèque de l'espace abstrait considéré. Ainsi p. ex. A. Wald a réussi il y a 20 ans, de caractériser les surfaces de Gauss uniquement par des relations métriques concernant les quadruples de points d'un espace compact.

Dès que M. Menger a commencé de développer les fondements de cette conception générale de la Géométrie (*Math. Annalen,* **100** et **103**), les recherches d'un grand nombre d'auteurs ont conduit à des résultats quelquefois profonds dont une partie est en contact avec d'autres conceptions géométriques générales, ainsi p. ex. avec les recherches de A. D. Alexandrov concernant les corps convexes.

Dans ce fascicule, l'auteur cherche à donner une image claire des diverses directions de recherche engendrées par son initiative. L'ouvrage est divisé en sept chapitres: I. La géométrie dans les espaces métriques, II. Théorie générale de la courbure, III. Analyse et généralisations de la notion d'espace métrique, IV. Calcul des variations et Géométrie métrique, V. Une théorie générale de la longueur, VI. Espaces vectoriels généralisés. VII. Esquisse d'une Géométrie métrique aléatoire.

La présentation de la matière traitée est très suggestive et d'une clarté logique bien caractéristique aux résumés présentés auparavant par M. Menger.

G. Alexits (Budapest)

C. Truesdell, The Kinematics of Vorticity (Indiana University Publications Science Series No. 19), XV + 232 pages, Bloomington, Indiana University Press, 1954.

The theory of vorticity, this important chapter of classical hydrodynamics, has been recently much elaborated by several authors using different, but elementary methods of analysis. Truesdell's monograph gives a critical review of these investigations from the unified point of view supplemented by the author's investigations published in the post-war years. The review is concentrated on a general theory of the kinematics of continuous media. Namely, it is known that the dynamical properties of fluids, and the flow of a fluid, whether perfect or viscuous, may be defined by purely kinematical conditions. On this account the greatest contributions to practical fluid dynamics were preceded by kinematical analysis belonging to pure mathematics rather than to mechanics or physics. Many theorems generally regarded as dynamical can be found in this monograph in a purer kinematical form and, based on this point of view, many old results are derived in a new way. All dynamical statements have been relegated by the author to parenthetical sections, appendices, or footnotes, to let the argument course freely and to leave the propositions free for applications to such special dynamical situations as may be of interest.

After some geometrical and extensive kinematical preliminaries the definition of the vorticity and its five interpretations based on the work of several authors is given; in the following chapters the different theorems of balance supplemented by the possible generalisations are discussed. The detailed study of the Bernoulli theorems, the convection, and the diffusion of vorticity deserve particular interest. Finally, in the last chapter, the circulation-preserving motion of the fluid is discussed, which topic affords the simplest and most elegant applications of the general theory.

The monograph contains a detailed and complete bibliography. Also the accurate historical remarks in the footnotes are very interesting. (We learn e. g. that STOKES' theorem was discovered by KELVIN.) Extensive application of the dyadic, instead of the more generally adopted tensor symbolism makes the book for not quite easy reading.

J. I. Horváth (Szeged)

H. Poincaré, Électricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques. Deuxième édition, revue et complétée (nouveau tirage), X + 641 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Ce livre, contenant le résumé des leçons professées par Poincaré à la Sorbonne en 1888, en 1890 et en 1899, peut être considéré comme un des plus importants traités d'électrodynamique depuis Maxwell. On l'étudie même aujourd'hui avec beaucoup d'intérêt, et cela non seulement pour sa valeur historique, mais aussi parce qu'une bonne partie de ses chapitres a conservé toute son actualité. C'est ainsi, entre autres, pour les chapitres sur l'électrodynamique phénoménologique des diélectriques et sur l'optique des cristaux, et tout particulièrement pour les chapitres résumant les théories prérélativistes de l'électrodynamique des corps en mouvement.

J. I. Horváth (Szeged)

Paul Appell, Traité de mécanique rationnelle. Tome V. **Éléments de calcul tensoriel. Applications géométriques et mécaniques,** par **René Thiry.** Deuxième édition (nouveau tirage, revu et corrigé), X + 202 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954.

La première impression de la seconde édition date de 1933, tandis que la première édition est parue en 1925. D'après l'intention originelle de Paul Appell, son célèbre Traité de la Mécanique Rationnelle aurait du contenir aussi une étude de la Mécanique Relativiste, et le présent volume était destiné à servir d'introduction mathématique à celle-ci, traitant du calcul tensoriel et de la géométrie de Riemann. Après un chapitre résumant les éléments de la théorie des transformations linéaires et des formes quadratiques en un nombre fini de variables, suit le chapitre le plus vaste et le plus intéressant du livre, traitant du calcul tensoriel. Un résumé, très utile, des règles et formules de ce calcul est ajouté à ce chapitre. Le troisième chapitre traite des applications à la géométrie de l'espace euclidien à trois dimensions et à de problèmes de la Mécanique classique: mouvements d'un corps solide, déformations d'un milieu continu, etc. Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'étude de la géométrie de Riemann et des géométries pseudo-euclidiennes à n dimensions. On y trouve entre autres des paragraphes sur les coordonnées normales de Riemann, et sur les espaces à courbure constante, concepts de grande importance dans l'appareil géométrique de la Théorie de la Relativité Générale. Le chapitre VI commence par une étude des fondements géométriques de la théorie de H. Weyl. On y fait connaître aussi les premières tentatives de A. Eddington et de E. Cartan pour généraliser la géométrie de Riemann. Le dernier chapitre contient un aperçu très instructif des géométries non-euclidiennes, en particulier des géométries Cayleyennes.

J. I. Horváth (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

R. Baldus — E. Löbell, Nichteuklidische Geometrie (Sammlung Göschen, Band 170). Dritte, verbesserte Auflage, 140 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1953. — DM 2.40.

E. W. Beth, Les fondements logiques des mathématiques (Collection de Logique Mathématique). Deuxième édition revue et augmentée, XV + 242 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 2500 fr.

N. Dequoy, Axiomatique intuitionniste sans négation de la géométrie projective (Collection de Logique Mathématique), 108 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 1250 fr.

P. Dubreil, Algèbre. Tome I. **Équivalences, opérations, groupes, anneaux, corps.** (Cahiers scientifiques, fascicule XX.) Deuxième édition, revue et augmentée, XII + 467 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954. — 3900 fr.

K. Hayashi, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, 182 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955. — DM 12.—

G. Julia, Cours de géométrie infinitésimale. *Deuxième édition entièrement refondue,* Deuxième fascicule: **Cinématique et géométrie cinématique.** Première partie: **Généralités,** 80 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 1500 fr.

G. Julia, Cours de géométrie infinitésimale. Deuxième édition entièrement refondue. Quatrième fascicule: **Cinématique et géométrie cinématique.** Deuxième partie: **Étude approfondie du mouvement d'un corps solide,** 88 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 1600 fr.

N. Mihaileanu, Geometrie neeuclidiană, 143 p., București, Editura Academiei Republicii Populare Române, 1954. — Lei 4.30.

H. Poincaré, Oeuvres. Tome 9, XVI + 704 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954.

J. B. Rosser, Deux esquisses de logique (Collection de Logique Mathématique, Série A, VII), 69 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 900 fr.

S. Stoilow, Teoria funcțiilor de o variabilă complexă. Vol. I, 308 p., București, Editura Academiei Republicii Populare Române, 1954. — Lei 10.65.

V. Thébault, Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (géométrie du tétraèdre), XI + 287 pages, Paris, Librairie Vuibert, 1955. — 2000 fr.

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 126—129, Paris, Gauthier-Villars.

126. M. P. Lévy, Le mouvement Brownien, 84 pages, 1954. — 1200 fr.
127. L. Poli — P. Delerue, Le calcul symbolique à deux variables et ses applications, 79 pages, 1954. — 1000 fr.
128. M. Zamansky, La sommation des séries divergentes, 46 pages, 1954. — 700 fr.
129. M. G. Heilbronn, Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach, 99 pages, 1955. — 1300 fr.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

Prix d'abonnement pour l'étranger \$ 6.—. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Sztálin-út 21).

Engedélyezési szám: 8777/36/10633.

Formátum B/5.
Terjedelem $8^1/_2$ A/5 ív.
Példányszám 600.

Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla.
Nyomdábaadás ideje: 1955. I. 14.
Megjelenés: 1955. V. 1.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, V., Szalay-u. 10—14.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó vállalat igazgatója.

Szegedi Nyomda Vállalat 55-204

Felelős vezető: Vincze György